Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS1113 - Optimización

Tarea 2

Profesores: Profesores: Margarita Castro, Raimundo Cuadrado, Marcel Favereau, Mathias Klapp, Esteban Salgado
Ayudante coordinador tareas: José Tomás Grez

Problema 1

1. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifique sus respuestas.

   a) Si un problema de programación lineal `(P)` es factible y su problema de Fase I correspondiente no tiene múltiples soluciones óptimas, entonces `(P)` tiene una única solución básica factible.

   b) Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro y $x \in C$. Entonces x es un vértice de C si y solo si $C \setminus \{x\}$ es convexo.

   c) El precio sombra de un recurso en un problema lineal de producción es 5. Entonces, si se suman 4 unidades de este recurso, la función objetivo del problema cambiará en 20 unidades.

   d) Si un problema de optimización `(P)` es no acotado, entonces su problema de Fase I asociado es no acotado.

   e) Las variables duales corresponden a las holguras de las restricciones primales.

2. Demuestre utilizando dualidad lineal que, si existe un vector p que satisface $p^\top A \geq 0^\top$ y $p^\top b < 0$, entonces no existe un vector $x \geq 0$ que satisfaga $Ax = b$.

Solución:

1. *a*) **Verdadero.** Si el problema de la Fase I correspondiente no tiene múltiples soluciones óptimas, entonces no existen bases factibles vecinas a la actual, es decir, el vértice del poliedro no puede alcanzar a otro. De esta manera, el problema tiene una única solución básica factible. Visto de otro modo, una solución básica factible del problema original a la que se le agregan variables adicionales con valor 0, es un vértice del problema de Fase I con valor óptimo 0, por lo que cada una de las soluciones óptimas del problema de fase I representa a una solución básica factible de `(P)`.

b) **Verdadero.** Primero veamos [$\Rightarrow$]. Sean $\lambda \in (0,1)$, $x_1, x_2 \in C \setminus \{x\}$ con $x_1 \neq x_2$. Por convexidad de C el punto $y = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C$. Como x es vértice de C se tiene que $y \neq x$, es decir, $y \in C \setminus \{x\}$ (el conjunto es convexo).

Ahora veamos [$\Leftarrow$]. Supongamos que x no es vértice de C, entonces existen $x_1, x_2 \in C \setminus \{x\}$ y $\lambda \in (0,1)$ tales que $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ por convexidad de $C \setminus \{x\}$ se tiene que $x \in C \setminus \{x\}$ lo que es una contradicción.

c) **Falso.** Si se adquieren 4 unidades más podría cambiar la base óptima. La afirmación es cierta solo si no cambia la base óptima.

d) **Falso.** El problema de Fase I nunca es no acotado, ya que, es un problema de minimización con cotas inferiores.

e) **Falso.** Las holguras de las restricciones son los costos reducidos del dual.

2. Consideremos el problema primal:

$$\left.\begin{array}{lrcl} \max\limits_{x} & 0^\top x & & \\ & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}\right\} \texttt{(P)}$$

Su dual es:

$$\left.\begin{array}{lrcl} \min\limits_{y} & b^\top y & & \\ & y^\top A & \geq & 0^\top \end{array}\right\} \texttt{(D)}$$

Buscamos demostrar que si existe p dual factible con $b^\top p < 0$, entonces `(P)` es infactible.

Por contradicción, supongamos que existe tal p y que existe $x \geq 0$ tal que $Ax = b$ (es decir, primal factible). Sabemos que p es tal que $p^\top A \geq 0^\top$ (dual factible) y $b^\top p < 0$.

Por la no negatividad de x tenemos que $0 \leq \underbrace{p^\top Ax}_{Ax=b} = p^\top b$.

Obtenemos una contradicción. Por lo tanto, si existe ese vector p, entonces `(P)` es infactible, es decir, no existe $x \geq 0$ tal que $Ax = b$.

Problema 2

Sea $n \geq 2$ y sea (P) el siguiente problema de programación lineal continua:

$$\left.\begin{array}{rrcl} \min\limits_{x} & \sum\limits_{i=1}^{n} i \cdot x_i & & \\ (\forall\, \ell \in \{1,\ldots,n\}) & \sum\limits_{i=1}^{\ell} x_i & \geq & \ell \\ & x & \geq & 0 \end{array}\right\} \texttt{(P)}$$

1. Demuestre que para toda solución factible del dual y se tiene que para todo $k \in \{2, ...n\}$, $y_k + y_{k+1} + ... + y_n < k$.

2. Encuentre la solución óptima de (P).

Solución

1. Construimos el dual de (P):

$$\left.\begin{array}{rrcl} \max\limits_{y} & \sum\limits_{i=1}^{n} i \cdot y_i & & \\ (\forall\, \ell \in \{1,\ldots,n\}) & \sum\limits_{i=\ell}^{n} y_i & \leq & \ell \\ & y & \geq & 0 \end{array}\right\} \texttt{(D)}$$

   Viendo la primera restricción del dual (aquella con $\ell = 1$) notamos que para todo $k \in \{2, \ldots, n\}$

$$\sum_{\ell=k}^{n} y_\ell \leq \sum_{\ell=1}^{k-1} y_\ell + \sum_{\ell=k}^{n} y_\ell \leq 1 < k,$$

   pues $y \geq 0$.

2. Sea x^* el óptimo de (P) e y^* el óptimo de (D). Por el *teorema de holguras complementarias* se sabe que en el óptimo para todo $\ell \in \{1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} x^*_\ell \left(\ell - \sum_{i=\ell}^{n} y^*_i\right) &= 0 \\ y^*_\ell \left(\ell - \sum_{i=1}^{\ell} x^*_i\right) &= 0. \end{aligned}$$

   Por el inciso 1, sabemos que para $\ell \geq 2$ se tiene que $\ell - \sum\limits_{i=\ell}^{n} y^*_i > 0$, luego $x^*_\ell = 0$.

   La solución primal óptima debe tener la forma $x^* = (x_1, 0, \ldots, 0)$, sustituyendo este vector en la formulación del problema primal se tiene

$$\left.\begin{array}{rlcl} \min\limits_{x_1} & x_1 & & \\ (\forall\, \ell \in \{1,\ldots,n\}) & x_1 & \geq & \ell \\ & x_1 & \geq & 0 \end{array}\right\} \texttt{(P')}$$

por lo que $x_1^* = n$ y la solución óptima primal es $x^* = (n, 0, \ldots, 0)$ con valor óptimo n.

Problema 3

El algoritmo *simplex* permite resolver problemas de optimización lineal en forma estándar

$$\texttt{(P)} \min_{x \in \mathbb{R}^n_+} \{c^\top x \,:\, Ax = b\}$$

con $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. En cada iteración del algoritmo seleccionamos una base $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ con m índices de variables que define un subconjunto de columnas de A con su matriz A_B invertible. Para esta base se calcula la solución básica asociada y se verifica que se cumplan las condiciones de factibilidad. Posteriormente, se buscan nuevas soluciones básicas moviéndose entre vértices del poliedro que define `(P)`, hasta encontrar una solución que cumple las condiciones de optimalidad, es decir:

$$\bullet\ \textbf{Factibilidad:}\ \ x^\star = \begin{pmatrix} A_B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \qquad \bullet\ \textbf{Optimalidad:}\ \ c^\top - c_B^\top A_B^{-1} A \geq 0$$

Computacionalmente, la inversión de la matriz A_B es una operación costosa, pues crece proporcional a m^3 usando el algoritmo de eliminación de Gauss-Jordan.

En esta tarea, usted desarrollará una implementación eficiente del algoritmo simplex. Para ello, considere dos iteraciones consecutivas del algoritmo simplex con bases respectivas B^1 y B^2. Notar que B^2 difiere de B^1 en solo un índice de variables, por lo que $A_{B^1}^{-1}$ tiene información que se puede utilizar para construir $A_{B^2}^{-1}$.

Recordemos algunas nociones de álgebra lineal:

- La matriz $\mathbb{I}$ representa la matriz identidad, es decir, una matriz cuadrada que tiene valor 1 en la diagonal y cero en las otras entradas.
- Dada una matriz M, se pueden representar operaciones fila sobre M utilizando una matriz E_{ij} cuyas entradas valen 0 excepto en la entrada (i, j) que vale 1:
  - Para sumarle β veces la fila j a la fila i en M, se multiplica M por la izquierda por la matriz $(\mathbb{I} + \beta E_{ij})$.
  - Para escalar β veces la fila i en M, se multiplica M por la izquierda por $(\mathbb{I} + (\beta - 1)E_{ii})$.
  - Para intercambiar la fila i por la fila j en M, se multiplica M por la izquierda por $(\mathbb{I} + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj})$.

  En otras palabras, una secuencia de k operaciones fila sobre M se puede representar por la matriz $F_k F_{k-1} \cdots F_2 F_1 M$ donde cada F_i representa la i-ésima operación. Denotamos por F al producto de las matrices que representan las operaciones, es decir, $F = F_k F_{k-1} \cdots F_2 F_1$. Nótese que las matrices F_i generadas de esta forma son todas invertibles.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $B^1 = \{1, \ldots, m\}$ y que $B^2 = \{1, \ldots, \ell - 1, j, \ell + 1, \ldots, m\}$, es decir, en el cambio de base de B^1 a B^2 sale el ℓ-ésimo índice de variable y entra el j-ésimo. Es fácil observar que

$$A_{B^1}^{-1} A_{B^2} = [\underbrace{A_{B^1}^{-1} A_1}_{e_1} \cdots \underbrace{A_{B^1}^{-1} A_{\ell-1}}_{e_{\ell-1}} \quad \underbrace{A_{B^1}^{-1} A_j}_{\bar{A}_j} \quad \underbrace{A_{B^1}^{-1} A_{\ell+1}}_{e_{\ell+1}} \cdots \underbrace{A_{B^1}^{-1} A_m}_{e_m}]$$

donde e_i es el i-ésimo vector canónico. Notese que la aparición de los vectores canónicos se debe a que los índices $i \in B^2 \setminus \{j\}$ están también en B^1 y se está multiplicando por la matriz inversa.

Aplicando operaciones fila se puede transformar el vector $\bar{A}_j = A_{B^1}^{-1} A_j$ en e_ℓ para obtener $A_{B^2}^{-1}$. Sea F la matriz del producto de tales operaciones fila, entonces $F A_{B^1}^{-1} A_{B^2} = \mathbb{I}$ y, por lo tanto,

$$A_{B^2}^{-1} = F A_{B^1}^{-1}$$

De esta forma se puede construir la matriz $A_{B_2}^{-1}$ de la siguiente iteración a partir de la información de la matriz $A_{B_1}^{-1}$ de la iteración actual sin tener que invertir otra matriz.

- Una forma de encontrar la matriz $F A_{B^1}^{-1}$ es la siguiente:
  - Suponga que en una iteración tiene las matrices asociadas a la base B^1 y busca las matrices asociadas a la base B^2.
  - La variable que entra a la base es la j-ésima y la que sale de la base es la ℓ-ésima.
  - Construya la matriz extendida $\left[A_{B^1}^{-1} \mid \bar{A}_j\right]$.
  - Aplique las siguientes operaciones fila en la matriz extendida para que su última columna se vuelva e_ℓ:
    - Para cada $i \neq \ell$, se le agrega a la i-ésima fila $(-\overline{a_{ij}}/\overline{a_{\ell j}})$ veces la ℓ-ésima fila.
    - Se divide la ℓ-ésima fila por $\overline{a_{\ell j}}$.
  - Las primeras m columnas de la matriz extendida forman la matriz $A_{B^2}^{-1}$.

  El cómputo de obtener la nueva matriz inversa con esta implementación crece proporcional a $m^2 \ll m^3$ y su aplicación al algoritmo simplex se conoce como *simplex revisado*. El resto del algoritmo simplex no tiene diferencias.

Ejemplo:

Suponga que:

$$A_{B^1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \bar{A}_j = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$[A_{B^1}^{-1}|\bar{A}_j] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Queremos ingresar la j-ésima variable en la segunda posición de la base. Las siguientes operaciones fila transforman a $\bar{A}_j$ en el vector canónico $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

- Sumar dos veces la segunda fila a la primera, quedando:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 8 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

- Restarle a la tercera fila la segunda fila, quedando:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 8 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & -6 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

- Dividir la segunda fila por 2, quedando:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 8 & 5 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 6 & -6 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Con esto nos queda:

$$[FA_{B^1}^{-1}|e_2] = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 8 & 5 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 6 & -6 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Así,

$$A_{B^2}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 5 \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 6 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

Nótese que la matriz F es:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta:

Considere el siguiente problema:

$$\begin{array}{lrcr} \text{mín} & x_1 - x_2 & & \\ \text{s.a.} & 3x_1 - x_2 & \leq & -3 \\ & x_1 + 4x_2 & \leq & 12 \\ & x_1 - x_2 & \leq & -2 \\ & 4x_1 + x_2 & \geq & -12 \\ & x_2 & \geq & 0 \\ & x_1 & \leq & 0 \end{array}$$

a. Grafique el dominio del problema.

b. Escriba el problema en forma estándar ($b \geq 0$, variables no negativas y restricciones de igualdad).

c. Resuelva el problema utilizando el algoritmo simplex comenzando desde el punto $(-2, 0)$. Es necesario que muestre el paso a paso al calcular las inversas de las matrices. *Hint*: El siguiente enlace tiene un video para recordar cómo invertir matrices: **Inversa matrices**.

d. Resuelva el problema utilizando el *simplex revisado* (es decir, el método descrito al comienzo del problema) comenzando desde el punto $(-2, 0)$. Indique claramente en el gráfico cómo se va moviendo la solución a través de los vértices hasta llegar al óptimo.

e. ¿Existe degenerancia en este ejemplo? De ser así, indique los puntos en el gráfico e indique qué valores toman las variables básicas en estos puntos.

f. ¿Qué rango de valores puede tomar el lado derecho de la segunda restricción para que la base óptima no cambie?

g. Se agrega una nueva variable x_7 que deja el problema como sigue:

$$\begin{array}{lrcr} \text{mín} & x_1 - x_2 + c_7 x_7 & & \\ \text{s.a.} & 3x_1 - x_2 + 2x_7 & \leq & -3 \\ & x_1 + 4x_2 - x_7 & \leq & 12 \\ & x_1 - x_2 & \leq & -2 \\ & 4x_1 + x_2 + 3x_7 & \geq & -12 \\ & x_2 & \geq & 0 \\ & x_1 & \leq & 0 \\ & x_7 & \geq & 0 \end{array}$$

¿Entre que rango de valores puede estar c_7 para que cambie la solución óptima del problema?

Anexo

A continuación, se presentan ejemplos de cómo realizar los tres tipos de operaciones fila de una manera que quizás les salga más intuitiva:
Dada una matriz M, se pueden hacer operaciones fila sobre ella, en las que las filas de la matriz se pueden sumar (o restar) entre ellas. Es una técnica bastante utilizada para resolver sistemas de ecuaciones. A continuación se presentan ejemplos sobre los tres tipos de operaciones fila:

- Multiplicar la fila i de una matriz A por $\beta \in \mathbb{R}$.
  Si se quiere multiplicar, por ejemplo, la fila 2 de la siguiente matriz A por 2, se puede realizar la operación fila (que está asociada la multiplicación por una a una matriz F) y se forma la matriz A'

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \beta = 2$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$FA = A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

  Donde la fila 2 de A' es la fila 2 de A multiplicada por 2: $(4 \cdot 2), (5 \cdot 2), (6 \cdot 2)$.

- Sumarle $\beta \in \mathbb{R}$ veces la fila i a la fila j.
  Si se quiere sumar, por ejemplo, 2 veces la fila 1 a la fila 2 de la siguiente matriz A, se puede realizar la operación fila (que está asociada la multiplicación por una a una matriz que se omite para simplificar la explicación) y se forma la matriz A':

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \beta = 2$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$FA = A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

  Donde la fila 2 de A' es la suma de la fila 2 más dos veces la fila 1 de A: $(4+1 \cdot 2), (5+2 \cdot 2), (6+3 \cdot 2)$

- Intercambiar la fila i por la fila j.
  Si se quiere intercambiar, por ejemplo, la fila 2 con la fila 1 de la siguiente matriz A, se puede realizar la operación fila (que está asociada la multiplicación por una a una matriz que se omite para simplificar la explicación) y se forma la matriz A':

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$FA = A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

  Donde la fila 2 de A' es la fila 1 de A y la fila 1 de A' es la fila 2 de A

Solución

a. El gráfico es el siguiente:

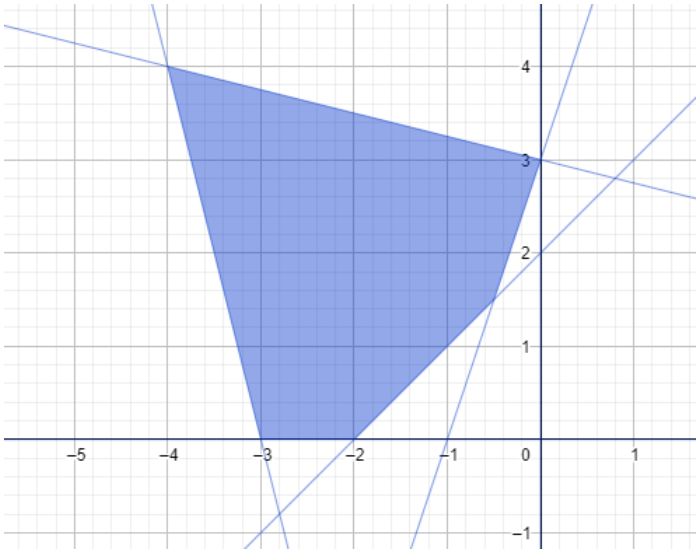


Figura 1: Dominio del problema

b. La forma estándar del problema es la siguiente, donde $x_1^{'} = -x_1$:

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & -x_1^{'} - x_2 & & \\ s.a. & 3x_1^{'} + x_2 - x_3 & = & 3 \\ & -x_1^{'} + 4x_2 + x_4 & = & 12 \\ & x_1^{'} + x_2 - x_5 & = & 2 \\ & 4x_1^{'} - x_2 + x_6 & = & 12 \\ & x_1^{'}, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

c. Como en el enunciado se nos dice que el punto inicial es (-2,0), en el problema en forma estándar sería el punto (2,0,3,14,0,4). Con esto calculamos la base:

$$A_B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa:

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora vemos los criterios de factibilidad y optimalidad:

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{b} = A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overline{A_N} = A_B^{-1} A_N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 5 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\overline{c_R} = c_N - c_B \overline{A_N} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 5 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por lo que el punto es factible pero no óptimo. Entra la variable con el costo reducido más negativo, en este caso x_5. Aplicamos el criterio de salida: Buscamos el índice no básico i tal que $i = \underset{\ell \in N \,:\, \bar{a}_{\ell j} > 0}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\bar{b}_\ell}{\bar{a}_{\ell j}} \right\}$.

$$\text{mín}_{\geq 0} \{ \tfrac{2}{-1}, \tfrac{3}{-3}, \tfrac{14}{-1}, \tfrac{4}{4} \} = \tfrac{4}{4}$$

Por lo que sale la variable x_6. Calculamos A_B^{-1}:

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Revisamos factibilidad y optimalidad:

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{b} = A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overline{A_N} = A_B^{-1} A_N = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{15}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\overline{c_R} = c_N - c_B \overline{A_N} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{15}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Es factible el punto pero no es óptimo. Entra x_2. Aplicamos criterio de salida:

$$\text{mín}_{\geq 0}\{\tfrac{3}{\frac{-1}{4}}, \tfrac{6}{\frac{-7}{4}}, \tfrac{\frac{15}{4}}{\frac{15}{4}}, \tfrac{1}{\frac{-5}{4}}\} = \tfrac{\frac{15}{4}}{\frac{15}{4}}$$

Es decir, sale x_4. Calculamos A_B^{-1}:

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{15} & 0 & \frac{4}{15} \\ -1 & \frac{7}{15} & 0 & \frac{13}{15} \\ 0 & \frac{4}{15} & 0 & \frac{1}{15} \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Revisamos factibilidad y optimalidad:

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad A_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{b} = A_B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \overline{A_N} = A_B^{-1}A_N = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{13}{15} \\ \frac{4}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\overline{c_R} = c_N - c_B\overline{A_N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{15}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

El punto es factible y es óptimo, ya que, sus costos reducidos son ≥ 0. Así, la solución óptima está dada por (4, 4, 13, 0, 6, 0) que, en el problema original, es el punto (-4,4). El valor óptimo es -8.

d. Como en el enunciado se nos dice que el punto inicial es (-2,0), en el problema en forma estándar sería el punto (2,0,3,14,0,4). Con esto calculamos la base:

$$A_B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa normalmente (todavía no tenemos A_B^{-1} como para empezar a usar el método

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora vemos los criterios de factibilidad y optimalidad:

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{b} = A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overline{A_N} = A_B^{-1} A_N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 5 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\overline{c_R} = c_N - c_B \overline{A_N} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 5 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por lo que el punto es factible pero no óptimo. Entra la variable con el costo reducido más negativo, en este caso x_5. Aplicamos el criterio de salida: Buscamos el índice no básico i tal que $i = \underset{\ell \in N \,:\, \bar{a}_{\ell j} > 0}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\bar{b}_\ell}{\bar{a}_{\ell j}} \right\}$.

$$\text{mín}_{\geq 0} \{ \tfrac{2}{-1}, \tfrac{3}{-3}, \tfrac{14}{-1}, \tfrac{4}{4} \} = \tfrac{4}{4}$$

Por lo que sale la variable x_6. Calculamos A_B^{-1} utilizando el método explicado en un principio:

$$\overline{A_{N_2}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad [A_B^{-1} | \overline{A_{N_2}}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Debemos transformar la última columna en el vector $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esto se puede lograr realizando las siguientes operaciones fila:

- Dividir la fila 4 por 4
- Sumar una vez la fila 4 a la fila 1
- Sumar 3 veces la fila 4 a la fila 2
- Sumar una vez la fila 4 a la fila 3

Así, nos queda que:

$$[A_B^{-1}|e_4] = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right)$$

Ahora seguimos normalmente con el método Simplex y revisamos factibilidad y optimalidad:

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{b} = A_B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overline{A_N} = A_B^{-1}A_N = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{15}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\overline{c_R} = c_N - c_B\overline{A_N} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{15}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Es factible el punto pero no es óptimo. Entra x_2. Aplicamos criterio de salida:

$$\text{mín}_{\geq 0}\{\tfrac{3}{\frac{-1}{4}}, \tfrac{6}{\frac{-7}{4}}, \tfrac{15}{\frac{15}{4}}, \tfrac{1}{\frac{-5}{4}}\} = \tfrac{15}{\frac{15}{4}}$$

Es decir, sale x_4. Calculamos la inversa de la nueva base usando el método explicado en un principio:

$$\overline{A_{N_1}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ \frac{15}{4} \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \quad [A_B^{-1}|\overline{A_{N_1}}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{15}{4} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \end{array}\right)$$

Debemos transformar la última columna en el vector $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Esto se puede lograr realizando las siguientes operaciones fila:

- Multiplicar todas las filas por 4 (para sacar el denominador y que sea más cómodo trabajar)
- Dividir la fila 3 por 15
- Sumarle la fila 3 una vez a la fila 1

- Sumarle la fila 3 7 veces a la fila 2
- Sumarle la fila 3 5 veces a la fila 4
- Dividir las filas 1, 2 y 4 por 4 (para revertir el primer paso)

Así, nos queda que:

$$[A_B^{-1}|e_4] = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \frac{1}{15} & 0 & \frac{4}{15} & 0 \\ -1 & \frac{7}{15} & 0 & \frac{13}{15} & 0 \\ 0 & \frac{4}{15} & 0 & \frac{1}{15} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right)$$

Ahora seguimos normalmente con el método Simplex y revisamos factibilidad y optimalidad:

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad A_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{b} = A_B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \overline{A_N} = A_B^{-1}A_N = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{13}{15} \\ \frac{4}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\overline{c_R} = c_N - c_B\overline{A_N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{15}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

El punto es factible y es óptimo, ya que, sus costos reducidos son ≥ 0. Así, la solución óptima está dada por (4, 4, 13, 0, 6, 0) que, en el problema original, es el punto (-4,4). El valor óptimo es -8.
El movimiento en el gráfico es el siguiente:

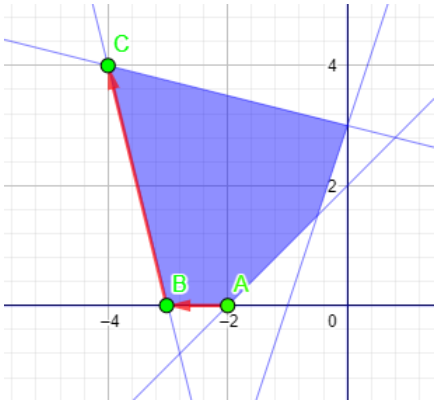


Figura 2: Movimiento a través del gráfico

e. En el punto (0,3) existe degenerancia, ya que, las variables en ese punto toman los valores (0, 3, 0, 0, 1, 15). De esta manera, la base está formada por las tres variables mayores a 0, más una de las variables nulas, por lo que existen tres bases distintas para este mismo punto.

f. Los cambios en b no cambian la base óptima, a no ser que vuelvan al punto infactible, por lo que hay que revisar la factibilidad:

$$\overline{b} = A_B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{15} & 0 & \frac{4}{15} \\ -1 & \frac{7}{15} & 0 & \frac{13}{15} \\ 0 & \frac{4}{15} & 0 & \frac{1}{15} \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{15}\alpha + \tfrac{48}{15} &\geq 0 \\ -3 + \tfrac{7}{15}\alpha + \tfrac{156}{15} &\geq 0 \\ \tfrac{4}{15}\alpha + \tfrac{12}{15} &\geq 0 \\ \tfrac{1}{3}\alpha - 2 + 4 &\geq 0 \end{aligned}$$

De donde se concluye que $\alpha \geq -3$

g. Hay que revisar la optimalidad del problema, para lo que calculamos el costo reducido de la nueva variable, que deberá ser negativo para que no estemos en el óptimo:

$$\overline{c_R} = c_N - c_B\overline{A_{N_{x_7}}} = \begin{pmatrix} c_7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{15} & 0 & \frac{4}{15} \\ -1 & \frac{7}{15} & 0 & \frac{13}{15} \\ 0 & \frac{4}{15} & 0 & \frac{1}{15} \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \leq 0$$

$$\begin{aligned} c_7 - \tfrac{4}{3} &\leq 0 \\ c_7 &\leq \tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

Es decir, si c_7 es menor a $\frac{4}{3}$, la solución óptima cambiaría. Si es igual a $\frac{4}{3}$ habrían múltiples soluciones.

Problema 4

La empresa de comida rápida *Mi Mexico* debe decidir cuantos burritos producir en cada uno de sus tres locales. La ganancia esperada por burrito vendido es \$9 en Temuco, \$6 en Santiago y \$5 en Antofagasta. Dependiendo del local, cada burrito a preparar requiere de una cierta cantidad de verduras y carne. Las cantidades necesarias de carne y verdura para hacer un burrito en cada local se detalla en la siguiente tabla. En esta tabla también se detalla la cantidad que dispone la empresa de verduras y carne (materia prima).

Producto	Temuco	Santiago	Antofagasta	Cantidades disponible
Carne	2	3	1	4
Verduras	5	4	3	11

1. Formule un modelo de programación lineal continuo que permita establecer la cantidad de burritos a producir cada local que maximiza las ganancias totales. Asuma que se pueden vender fracciones de burritos.

2. Resuelva el problema utilizando el algoritmo simplex. Utilice como punto de partida el vértice (2,0,0).

3. Suponga que puede cambiar la cantidad de carne o de verduras disponibles tanto como quiera (solo se puede cambiar uno de los dos), siempre y cuando la solución óptima del inciso anterior siga siendo factible y óptima. ¿Qué cantidad preferiría aumentar y en cuánto? ¿En cuánto cambia el valor de la función objetivo?

4. ¿En qué local no se están produciendo burritos? Encuentre el precio mínimo al que sería conveniente producir burritos en ese local.

5. Se está pensando en abrir un nuevo local en Valparaíso. El precio de venta de burritos será de \$4. Cada burrito en este local necesita 1 unidad de carne y $5 - 3\alpha$ unidades verduras. ¿Para que rango de valores de α es beneficioso abrir el nuevo local?

Solución

1. Sea x_1 la cantidad de burritos producidas en Temuco, x_2 las producidas en Santiago y x_3 las que se producen en Antofagasta. El modelo es:

$$\begin{array}{lrcl} \text{máx} & 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 & & \\ s.a. & 2x_1 + 3x_2 + x_3 & \leq & 4 \\ & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 & \leq & 11 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

2. La forma estándar del modelo es:

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & -9x_1 - 6x_2 - 5x_3 & & \\ s.a. & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & = & 4 \\ & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_5 & = & 11 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

donde x_4 y x_5 son variables de holgura. En el vértice inicial, estamos en el punto $x = (2, 0, 0, 0, 1)$. Por lo tanto, la base B asociada y su inversa B^{-1} son:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-5}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Además, la matriz $\overline{R}$, que tiene asociadas las variables no básicas x_2, x_3, x_4 es:

$$\overline{R} = B^{-1}R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-5}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} \end{pmatrix}$$

Como $\overline{b} \geq 0$, el punto inicial es factible. Ahora vemos el criterio de optimalidad, para lo que calcularemos los costos reducidos de las variables no básicas:

$$\overline{c} = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Así, la solución no es óptima y se debe iterar. El costo reducido más negativo es $\frac{-1}{2}$, correspondiente a la variable x_1, por lo que será la que ingrese a la base. Aplicando el criterio de salida:

$$\text{mín}_{\overline{a_{ij}}>0}\{\tfrac{1}{\frac{1}{2}}, \tfrac{2}{\frac{1}{2}} = 4\}$$

x_5 sale de la base. La nueva base está compuesta por x_1 y x_3. Comprobamos el criterio de factibilidad. La nueva base B es:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Así:

$$\overline{b} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por lo que el punto es factible. Revisamos el criterio de optimalidad:

$$\overline{c} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 41 & 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

Por lo que estamos en el óptimo, en el punto $x = (1, 0, 2)$, con valor óptimo de 19 en el problema original.

3. Primero, se debe analizar en cuánto se puede aumentar la cantidad de cada ingrediente para que siga siendo factible la solución óptima encontrada en el inciso anterior. Analizamos primero en cuanto se puede aumentar la carne:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4+\delta_1 \\ 11 \end{pmatrix} \geq 0$$

De donde queda que:

$$\begin{array}{rl} 12 + 3\delta_1 - 11 & \geq 0 \\ -20 - 5\delta_1 + 22 & \geq 0 \end{array}$$

Resolviendo se llega a que $\frac{-1}{3} \leq \delta_1 \leq \frac{2}{5}$, es decir, podríamos aumentar la cantidad de carne en $\frac{2}{5}$ como máximo. Analizamos los nuevos valores que tomarían las variables en el óptimo:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{22}{5} \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con esto, la función objetivo toma un valor de 19,8.

Analizamos ahora el caso en que se sube la cantidad de verduras:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 11+\delta_2 \end{pmatrix} \geq 0$$

De donde queda que:

$$\begin{array}{rl} 12 - 11 - \delta_2 & \geq 0 \\ -20 + 22 + 2\delta_2 & \geq 0 \end{array}$$

Resolviendo se llega a que $-1 \leq \delta_1 \leq 1$, es decir, podríamos aumentar la cantidad de verduras en 1 como máximo. Analizamos los nuevos valores que tomarían las variables en el óptimo:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Con esto, la función objetivo toma un valor de 20, o sea que la función objetivo. Así, comparando los valores de la función objetivo, conviene aumentar la cantidad de verduras en 1, con lo que la función objetivo aumenta su valor en 1.

4. No se venden burritos en Santiago. El precio al que se deben vender debe ser, como mínimo, su costo actual más su costo reducido, es decir, $c_2^{new} \geq c_2 + \overline{c_2} = 6 + 4 \geq 10$. Con cualquier valor mayor a 10, se comienzan a producir burritos en Santiago (con $c_2 = 10$ aún no se producen, pero puede entrar a la base).

5. Evaluamos el costo reducido de la nueva columna, que es no básica:

$$\overline{c_6} = -4 - \begin{pmatrix} -9 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 - 3\alpha \end{pmatrix} = -7 + 3\alpha$$

Para incluir a la nueva variable en la base, el costo reducido debe ser negativo. De esta forma, para $\alpha > 1$ conviene abrir el local en Valparíso.