Parte 1 (30 pts).

a) Considere el siguiente problema de Programación Lineal, del cual se muestra también su dual, donde A es la matriz de restricciones de *n* variables y *m* restricciones:

$$P) \quad \begin{aligned} &Min && c^T x \\ &s.a. && Ax = b \\ & && x_i \geq 0 \quad i = 1,...,n \end{aligned} \qquad D) \quad \begin{aligned} &Max && b^T y \\ &s.a. && A^T y \leq c \end{aligned}$$

i. **(10 pts)** Escriba las condiciones KKT para el problema P).

ii. **(5 pts)** Muestre que si λ es el vector de los multiplicadores de Lagrange del problema, entonces $-\lambda$ es una solución factible para el problema dual. Más aún, muestre que son solución óptima del problema dual.

iii. **(5pts)** Demuestre que las condiciones KKT implican costos reducidos del problema primal no negativos.

Respuesta:

i) El lagrangeano del problema es

$$L(x,\lambda) = c^T x + \lambda^T (Ax - b)$$

Como el problema tiene restricciones de no negatividad las condiciones de KKT establecen que

$$\frac{\partial}{\partial x} L(x,\lambda) = c^T + \lambda^T A \geq 0$$
$$\left(c^T + \lambda^T A\right) x = 0$$
$$\frac{dL}{d\lambda} = Ax - b = 0$$
$$x_i \geq 0 \qquad \forall i = 1,..,n$$

Puntaje: 4 puntos por el lagrangeano y 6 por las restricciones.

ii) Definamos $y = -\lambda$. De las condiciones KKT podemos ver de inmediato que

$$c^T \geq -\lambda^T A = y^T A \quad \Leftrightarrow \quad A^T y \leq c$$

Es decir, y es solución factible del dual. Por otro lado, a partir de las condiciones de holgura complementaria vemos de inmediato que

$$c^T x = -\lambda^T Ax$$
$$\Leftrightarrow c^T x = y^T Ax = y^T b$$

Es decir, la función objetivo del dual, evaluada en *y*, es igual al valor óptimo del primal. Luego, el vector *y* es solución óptima del dual.

Puntaje: 5 puntos ya sea por la deducción con palabras o por la deducción analítica.

iii) De las condiciones KKT del problema primal, para las variables x, tenemos las condiciones:

$$(c^T + \lambda^T A)x = 0$$
$$c^T + \lambda^T A \geq 0$$

Si consideramos que hay "m" variables básicas mayores que cero (asociadas a las m restricciones), despejando λ, obetenemos:

$$C_B{}^T + \lambda^T B = 0$$
$$\lambda^T = -c_B{}^T B^{-1}$$

Luego podemos reemplazar en la segunda ecuación:

$$c^T + \lambda^T A \geq 0$$
$$[c_B\ c_D]^T - {c_B}^T B^{-1}[B : D] \geq 0$$
$$[c_B\ c_D]^T - {c_B}^T [I : B^{-1}D] \geq 0$$

Entonces, resolviendo:

$$r_D = {c_D}^T - {c_B}^T B^{-1} D \geq 0$$

Lo que implica que los costos reducidos asociados a variables básicas son nulos, y que los asociados a variables no básicas son no nulos.

Puntaje: 5 puntos por la deducción.

b) (10 pts) Deduzca las condiciones KKT para el siguiente problema sin añadir variables de holgura:

$$P) \quad \begin{array}{lll} Min & f(x) & \\ s.a. & g_j(x) \leq b_j & j = 1,...,r \\ & |g_j(x)| \leq b_j & j = r+1,...,m \\ & x_i \leq 0 & i = 1,...,l \\ & x_i \text{ libre de signo} & i = l+1,...,n \end{array}$$

Respuesta:

Se construye el problema equivalente:

$$P) \quad \begin{array}{lll} Min & f(x) & \\ & g_j(x) \leq b_j & j = 1,...,r \\ s.a. & g_j(x) \leq b_j & j = r+1,...,m \\ & -g_j(x) \leq b_j & j = r+1,...,m \\ & x_i \leq 0 & i = 1,...,l \\ & x_i \text{ libre de signo} & i = l+1,...,n \end{array}$$

La condición $x_j \leq 0\ \forall j = 1,..,l$ se puede considerar como $x_j = -x_j'$ donde tanto $x_j' \geq 0$

Entonces se construye el lagrangeano:

$$L(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(x) - b_j) + \sum_{j=r+1}^{m} \mu_j (-g_j(x) - b_j)$$

Derivando las condiciones KKT.

Para las variables x restringidas:

$$\frac{dL}{dx_j'} = \frac{df(x')}{dx_j'} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{dg_j(x')}{dx_j'} + \sum_{j=r+1}^{m} \mu_j \frac{-dg_j(x')}{dx_j'} \geq 0 \qquad \forall j = 1,..,l$$

$$x_j' \frac{dL}{dx_j'} = x_j' \left(\frac{df(x')}{dx_j'} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{dg_j(x')}{dx_j'} + \sum_{j=r+1}^{m} \mu_j \frac{-dg_j(x')}{dx_j'} \right) = 0 \qquad \forall j = 1,..,l$$

Lo que es equivalente a:

$$\frac{dL}{dx_j} = \frac{df(x)}{dx_j} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{dg_j(x)}{dx_j} + \sum_{j=r+1}^{m} \mu_j \frac{-dg_j(x)}{dx_j} \leq 0 \qquad \forall j = 1,..,l$$

$$x_j \frac{dL}{dx_j} = x_j \left(\frac{df(x)}{dx_j} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{dg_j(x)}{dx_j} + \sum_{j=r+1}^{m} \mu_j \frac{-dg_j(x)}{dx_j} \right) = 0 \qquad \forall j = 1,..,l$$

Para las variables x irrestrictas:

$$\frac{dL}{dx_j} = \frac{df(x)}{dx_j} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{dg_j(x)}{dx_j} + \sum_{j=r+1}^{m} \mu_j \frac{-dg_j(x)}{dx_j} = 0 \qquad \forall j = l+1,..,n$$

Para las restricciones:

$$\lambda_j \frac{dL}{d\lambda_j} = \lambda_j \left(g_j(x) - b_j \right) = 0 \qquad \forall j = 1,..,r$$
$$\frac{dL}{d\lambda_j} = \left(g_j(x) - b_j \right) \leq 0 \qquad \forall j = 1,..,r$$
$$\mu_j \frac{dL}{d\mu_j} = \mu_j \left(-g_j(x) - b_j \right) = 0 \qquad \forall j = r+1,..,m$$
$$\frac{dL}{d\mu_j} = \left(-g_j(x) - b_j \right) \leq 0 \qquad \forall j = r+1,..,m$$

Restricciones de conjunto:

$$\mu_j, \lambda_j \geq 0 \qquad \forall j = 1,..,m$$
$$x_i \leq 0 \qquad i = 1,...,l$$
$$x_i \text{ libre de signo} \qquad i = l+1,...,n$$

En resumen, las condiciones KKT serían:

$$\frac{df(x)}{dx_j} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{dg_j(x)}{dx_j} + \sum_{j=r+1}^{m} \mu_j \frac{-dg_j(x)}{dx_j} \leq 0 \qquad \forall j = 1,..,l$$
$$x_j \left(\frac{df(x)}{dx_j} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{dg_j(x)}{dx_j} + \sum_{j=r+1}^{m} \mu_j \frac{-dg_j(x)}{dx_j} \right) = 0 \qquad \forall j = 1,..,l$$
$$\frac{df(x)}{dx_j} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{dg_j(x)}{dx_j} + \sum_{j=r+1}^{m} \mu_j \frac{-dg_j(x)}{dx_j} = 0 \qquad \forall j = l+1,..,n$$
$$\lambda_j \left(g_j(x) - b_j \right) = 0 \qquad \forall j = 1,..,m$$
$$\left(g_j(x) - b_j \right) \leq 0 \qquad \forall j = 1,..,m$$
$$\mu_j \left(-g_j(x) - b_j \right) = 0 \qquad \forall j = r+1,..,m$$
$$\left(-g_j(x) - b_j \right) \leq 0 \qquad \forall j = r+1,..,m$$

$$\mu_j, \lambda_j \geq 0 \qquad \forall j = 1,..,m$$
$$x_i \leq 0 \qquad i = 1,...,l$$
$$x_i \text{ libre de signo} \qquad i = l+1,...,n$$

Puntaje: 4 puntos por el problema equivalente, 2 por el lagrangeano y 4 por las restricciones (o sus equivalentes).

Parte 2 (15 pts).

Responda brevemente las siguientes preguntas:

i) (3 pts) Comente respecto a cómo se compara la velocidad de convergencia del método del gradiente con la del método de Newton. Explique con precisión por qué las diferencias, si las hubiere.

Respuesta:
En cuanto al número de iteraciones, el método de **Newton es más rápido porque su convergencia es cuadrática**, comparada con la del método del gradiente cuya convergencia es lineal.

En cuanto al cálculo necesario en cada iteración, **Newton es más caro por iteración**, pues se debe calcular el Hessiano de la función objetivo y su inversa.

Luego en el global del tiempo, por lo general Newton converge en menos tiempo, pero a ciencia cierta es indeterminado cuál método converge primero.

1 punto por mencionar una de las diferencias entre ambos métodos.
2 puntos por mencionar ambas.
3 puntos por mencionar diferencias y llegar una conclusión válida.

ii) (3 pts) ¿De qué depende el número de iteraciones en el método del gradiente hasta converger a un mínimo local? Considere los dos argumentos explicados en clase.

Respuesta:
Por un lado se depende fuertemente del gradiente de la función objetivo en el **punto de partida**. Mientras este gradiente apunte más cerca del mínimo local, menos iteraciones se necesitarán.

Por otro lado la **curvatura de las curvas de nivel** juegan un rol fundamental. Mientras más se parezcan a una circunferencia, en la que el gradiente siempre apunta al mínimo local, más rápida será la convergencia.

1 punto por decir una sola característica.
2 puntos por nombras dos características pero le faltaron palabras claves (como por ejemplo que depende del gradiente en el punto de partida, etc).
3 puntos por mencionar ambas características y con todas las palabras claves necesarias.

iii) (**3 pts)** Considere un problema de optimización con restricciones. Si una restricción es activa en la solución óptima, entonces por la restricción de complementariedad de holgura el correspondiente multiplicador de Lagrange será mayor que cero. ¿Es verdad o no? Explique.

Respuesta:
Falso el multiplicador y la holgura (ó exceso) pueden ser ambos cero, en un caso "degenerado" (punto sobre determinado).

2 puntos por decir que pueden ser cero.
3 puntos por decir que pueden ser cero y dar un ejemplo de eso.

iv) (3 pts) "En un problema de Programación Lineal, todos los vértices dentro del dominio satisfacen las condiciones KKT" ¿Es verdad o no? Justifique con claridad.

Respuesta:
Falso, eso sólo es verdad en aquellos vértices que corresponden a soluciones óptimas del problema. En el resto de los vértices, alguno de los multiplicadores de Lagrange será negativos.

Todo el puntaje por decir que sólo se cumplen las condiciones KKT en las soluciones óptimas. No se pondrá puntaje sólo por decir que es falso.

v) (3 pts) Si en un problema irrestricto existe un punto tal que el gradiente de la función objetivo evaluado en ese punto es nulo, entonces necesariamente ese punto es mínimo ó máximo local. ¿Es verdad o no? Justifique con claridad.

Falso, puede ser un punto silla.

Todo el puntaje por decir que es falso ya que puede corresponder a otro tipo de punto (por ejemplo un punto silla).
No se dará puntaje sólo por decir que es falso.
Se dará puntaje a quienes den argumentos de que si el punto es mínimo o máximo deben cumplirse ciertas condiciones.

Parte 3 (25 pts).
Considere el siguiente problema de optimización no lineal con restricciones:

$$Min: \left(x_1 - 10\right)^2 + 2x_2^2 - x_3$$
$$s.a.$$
$$\left(x_2 - 4\right)^2 + x_3 = 2$$
$$x_1 + x_2 = 10$$

i) **(10 pts)** Encuentre los puntos extremos que cumplen las condiciones necesarias de primer orden.
ii) **(4 pts)** Analice la regularidad del dominio. ¿Existen puntos singulares?
iii) **(4 pts)** Caracterice los candidatos al óptimo, es decir, enunciar si corresponden a un mínimo local, con las condiciones suficientes de segundo orden.
iv) **(3 pts)** Estudiando los candidatos obtenidos y considerando lo conversado en clases acerca de optimalidad global, obtenga la solución óptima.
v) **(4 pts)** ¿En cuál de las dos restricciones prefiere aumentar el lado derecho en 0,1 unidades? Explique dando una aproximación sin volver a resolver el problema.

Pauta Pregunta 3.

i) Tenemos que el Lagrangeano es:

$$L = [(x_1 - 10)^2 + 2x_2^2 - x_3] + \lambda_1((x_2 - 4)^2 + x_3 - 2) + \lambda_2(x_1 + x_2 - 10)$$

Entonces las condiciones necesarias de primer orden son:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 10) + \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 + 2\lambda_1(x_2 - 4) + \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = -1 + \lambda_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = (x_2 - 4)^2 + x_3 - 2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_1 + x_2 - 10 = 0$$

Resolviendo el sistema se obtiene un punto extremo:

$$x^* = (9{,}1, -7)$$
$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 2$$

ii) Para analizar regularidad del dominio, debemos observar el Jabobiano de las restricciones:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 2(x_2 - 4) & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

De la matriz se observa que es de rango máximo para cualquier valor de x_2, por lo tanto el dominio es regular, y no existen puntos singulares.

iii) La condición suficiente de segundo orden es que el Hessiano del Lagrangeano sea positivo definido, en este caso:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4+2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Delta_1 = 2 \geq 0$$
$$\Delta_2 = 2(4+2\ \ ) \geq 0$$
$$\Delta_3 = 0$$

Por lo tanto, H es semi definida positiva, condición necesaria, pero no suficiente. Por lo tanto se proyecta el Hessiano en la dirección de las restricciones, esto es:

$$\Delta h_1 = 2({x_2}^* - 4)\Delta x_2 + \Delta x_3 = 0$$
$$\Delta h_2 = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 0$$

El punto será mínimo local si:

$$\Delta \vec{x}^T H^* \Delta \vec{x} \geq 0$$

De la definición anterior obtenemos que:

$$\Delta x_1 = -\Delta x_2$$
$$\Delta x_3 = 6\Delta x_2$$

$$\Delta \vec{x}^T H^* \Delta \vec{x} = [-\Delta x_2 \quad \Delta x_2 \quad 6\Delta x_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Delta x_2 \\ \Delta x_2 \\ 6\Delta x_2 \end{bmatrix} = 8{\Delta x_2}^2 \geq 0$$

Por lo tanto $x^* = (9{,}1, -7)$ es un mínimo local.

iv) Demostramos primero la existencia de solución:

El dominio es cerrado, la función objetivo es continua y el punto $x\ \ = (10{,}0, -14)$ es parte del dominio (No vacío). Además, debemos demostrar que la función no diverge hacia el infinito negativo en los bordes:

Para ello reemplazamos las restricciones en la FO:

$$x_3 = 2 - (x_2 - 4)^2$$
$$x_1 = 10 - x_2$$
$$F.0 = \ \ 3x_2^2 - 2 + (x_2 - 4)^2$$

La cual diverge al infinito positivo con x_2 tendiendo hacia cualquier borde.

Como demostramos que existe solución, no hay puntos singulares y el Lagrangeano detectó sólo un punto mínimo local, éste debe ser la solución óptima global:

$$x^* = (9{,}1, -7)$$

v) Utilizando el significado de los multiplicadores de Lagrange, tenemos que

$$\Delta f(X^*) \approx -\Delta b_j \lambda_j^*$$

Para la primera restricción: $\Delta f \approx -0{,}1 * \lambda_1 = -0{,}1 * 1 = -0{,}1$
Para la segunda restricción: $\Delta f \approx -0{,}1 * \lambda_2 = -0{,}1 * 2 = -0{,}2$

Como para la segunda restricción el valor de la F.O disminuye en mayor cantidad, y estamos minimizando, conviene aumentar el lado derecha de ésta restricción, pues así mejoraría el valor óptimo en aproximadamente 0,2 unidades.

Distribución de puntaje:

i) Por escribir correctamente el Lagrangeano, 2 puntos
Por escribir correctamente las condiciones necesarias de primer orden, 4 puntos
Por encontrar el punto que cumple estas condiciones, 4 puntos

ii) Por escribir el Jacobiano, 2 puntos.
Por concluir que no existen puntos singulares, 2 puntos

iii) Por escribir correctamente el Hessiano con sus subdeterminantes, 1 punto
Por escribir correctamente la proyección del Hessiano, 1 punto.
Por calcular el valor de $\Delta\vec{x}^T H^* \Delta\vec{x} \geq 0$, 1 punto
Por concluir que el punto es mínimo local, 1 punto.

Nota: hasta esta parte, no se ha concluido que el punto encontrado es el óptimo, por lo que es importante destacar que se ha encontrado un mínimo **local.**

iv) Por demostrar completamente la existencia de solución, 2 puntos
Por concluir que el punto es mínimo global, 1 punto.

Nota:

- La conclusión de que el mínimo es global debe hacerse sólo después de que se ha demostrado la existencia de solución. No es correcto concluir que, como no existen puntos singulares y Lagrange detectó sólo un punto, éste es el óptimo.
- No es correcto utilizar convexidad para demostrar que el punto es el óptimo. La primera restricción no es convexa debido a que cualquier igualdad no lineal es un conjunto no convexo, pues una combinación convexa de puntos puede quedar fuera del dominio. Por lo tanto el problema no es convexo.

v) Por escribir $\Delta f(X^*) \approx -\Delta b_j \lambda_j^*$, 1 punto.
Por encontrar el cambio en la F.O por cada restricción, 2 puntos.
Por concluir que conviene aumentar la segunda restricción, 1 punto.

Parte 4 (30 pts).

a) Considere el siguiente problema unidimensional acotado:

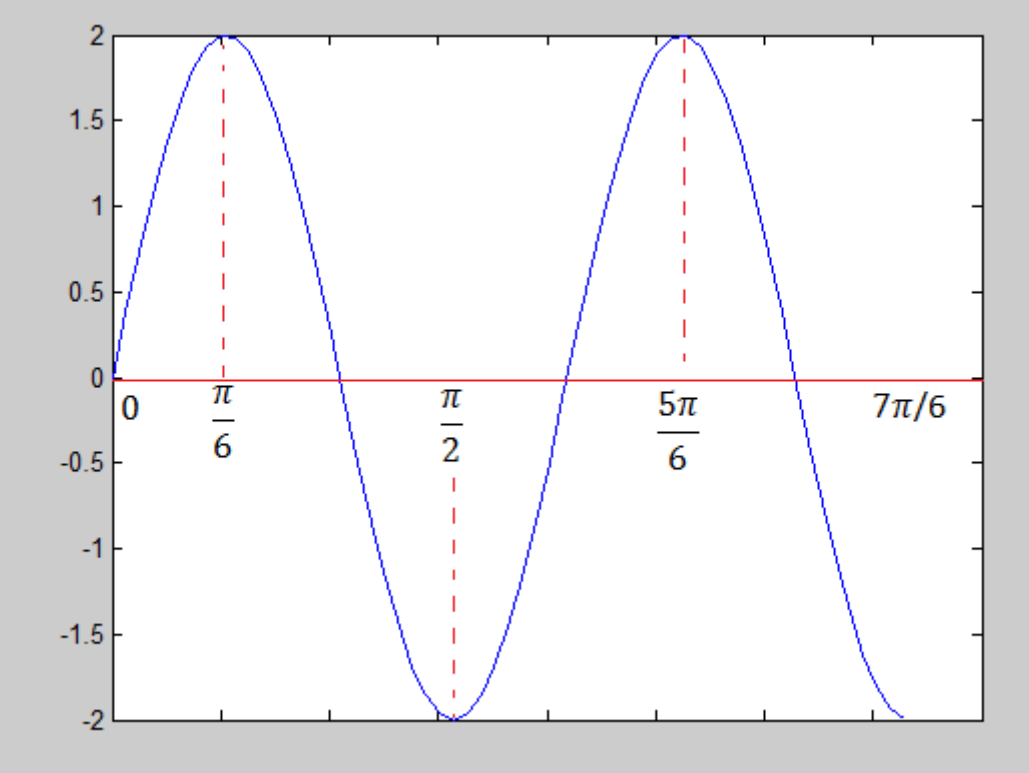
$$Min: 2sen(3x)$$

$$s.a.$$

$$0 \le x \le \frac{7\pi}{6}$$

i) **(5 pts)** Encuentre todos los puntos críticos, es decir los puntos que cumplan las condiciones necesarias de primer orden.
ii) **(5 pts)** Caracterice a los mínimos locales a través de las condiciones suficientes de segundo orden.
iii) **(5 pts)** Obtenga todas las soluciones óptimas.

a) Gráficamente tenemos:



Por lo que los puntos críticos son $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right]$

Teoricamente para encontrar los puntos que cumplen las condiciones necesarias calculamos las condiciones para problemas unidimensionales acotados (equivalentes a KKT)

$$\frac{df}{dx} = 6\cos(3x) = 0 \quad si\ 0 < x < 7\pi/6$$

$$\frac{df}{dx} = 6\cos(3x) \ge 0 \quad si \quad x = 0$$

$$\frac{df}{dx} = 6\cos(3x) \le 0 \quad si \quad x = 7\pi/6$$

Los puntos interiores que satisfacen las condiciones anteriores son :

$$x = \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right] (3\ puntos)$$

Los puntos de borde que cumplen estas condiciones son:

$$x = \left[0;\frac{7\pi}{6}\right] (2\ puntos)$$

Nota: es válido entontrar los puntos teóricamente y gráficamente

b)

1. $x = 0$: Es un punto borde izquierdo con primera derivada positiva: $6\cos(0) = 6 \geq 0$ → ES SUFICIENTE PARA DECIR QUE ES MÍNIMO LOCAL. (1punto)
2. $x = \pi/6$: Es un punto interior con primera derivada nula y segunda derivada negativa: $-18\,\text{sen}(3 * \pi/6) = -18 < 0$ → ES SUFICIENTE PARA DECIR QUE ES MÁXIMO LOCAL. SE DESCARTA EL PUNTO.(1 punto)
3. $x = \pi/2$: Es un punto interior con primera derivada nula y segunda derivada positiva: $-18\,\text{sen}(3 * \pi/2) = 18 > 0$ → ES SUFICIENTE PARA DECIR QUE ES MÍNIMO LOCAL.(1 punto)
4. $x = 5\pi/6$: Es un punto interior con primera derivada nula y segunda derivada negativa: $-18\,\text{sen}(3 * 5\pi/6) = -18 < 0$ → ES SUFICIENTE PARA DECIR QUE ES MÁXIMO LOCAL. SE DESCARTA EL PUNTO. (1 punto)
5. $x = \pi/2$: Es un punto borde derecho con primera derivada nula y segunda derivada positiva: $-18\,\text{sen}(3 * 7\pi/6) = 18 > 0$ → ES SUFICIENTE PARA DECIR QUE ES MÍNIMO LOCAL.(1 punto)

c) Como existe solución, uno de los candidatos no descartados debe ser el óptimo. Probando se llega a la conclusión de que las dos soluciones óptimas son:

$$= \left[\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}\right] \ (2{,}5\ puntos\ c/u)$$

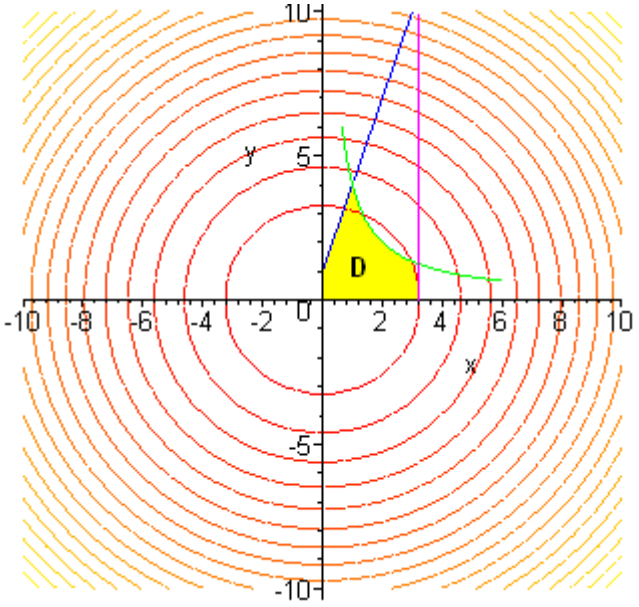
b) Considere el siguiente problema:

$$Max: x^2 + y^2$$
$$s.a.$$
$$xy \leq 4$$
$$-3x + y \leq 1$$
$$x \leq 3$$
$$x, y \geq 0$$

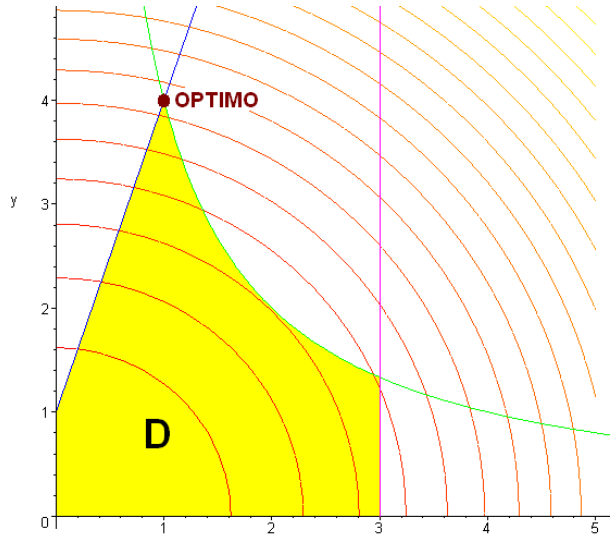
i) **(5 pts)** Resuelva gráficamente y encuentre la solución óptima.
ii) **(5 pts)** Apoyándose en el gráfico, encuentre todos los puntos que satisfacen KKT.
iii) **(5 pts)** Explique porque hay más de un punto que satisface KKT si el óptimo es único. Señale cuando se puede dar, que al cumplir KKT, se tenga suficiencia para decir que el punto es óptimo.

b)

a) Graficamente :



ZOOM



(Gráfico: 2 puntos por las restricciones + 1 punto por identificar el dominio)

El óptimo está en la intersección entre la restricción 1 y 2, resolviendo

$\left.\begin{matrix} -3x + y \leq 1 \\ xy \leq 4 \end{matrix}\right] \rightarrow x = 1, y = 4$ ´ (2 puntos)

b) Condiciones KKT

$L = -x^2 - y^2 + \mu_1(xy - 4) + \mu_2(-3x + y - 1) + \mu_3(x - 3)$

(1) $\frac{dL}{dx} = -2x + \mu_1 y - 3\mu_2 + \mu_3 \geq 0$

(2) $\frac{dL}{dx} x = (-2x + \mu_1 y - 3\mu_2 + \mu_3)x = 0$

(3) $\frac{dL}{dy} = -2y + \mu_1 x + \mu_2 \geq 0$

(4) $\frac{dL}{dy} y = (-2y + \mu_1 x + \mu_2)y = 0$

(5) $\frac{dL}{d\mu_1} = xy - 4 \leq 0$

(6) $\frac{dL}{d\mu_1} \mu_1 = (xy - 4)\mu_1 = 0$

(7) $\frac{dL}{d\mu_2} = -3x + y - 1 \leq 0$

(8) $\frac{dL}{d\mu_2} = (-3x + y - 1)\mu_2 \leq 0$

(9) $\frac{dL}{d\mu_3} = x - 3 \leq 0$

(10) $\frac{dL}{d\mu_3} = (x - 3)\mu_3 = 0$

(11) $x, y \geq 0$

(12) $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0$

Gráficamente los puntos candidatos son

- Aquellos que el gradiente es perpendicular a las curvas de nivel (o combinación lineal positiva de ellos)→ [2,2] (1 punto)
- Los vértices → [1,4], [0,1], [0,0], [3,0], [3,4/3] (4 puntos)

Nota: no era necesario comprobar teóricamente

Comprobando teóricamente:

[2,2]

De (6) →$\mu_1 \neq 0$

De (7), (8) (9) y (10) →$\mu_3 = 0, \mu_2 = 0$

De (2) y (4) → $-2 * 2 + \mu_1 * 2 = 0 \rightarrow \mu_1 = 2$

$-2 * 2 + \mu_1 * 2 = 0 \rightarrow \mu_1 = 2$

Al no haber inconsistencia entre el valor de μ_1, y que este fuera mayor a 0 → se cumplen las condiciones de KKT.

[1,4]

De (6) y (8) →$\mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0$

De (9) y (10) →$\mu_3 = 0$

De (2) y (4) → $-2 * 1 + \mu_1 * 4 - 3\mu_2 = 0$

$-2 * 4 + \mu_1 * 1 + \mu_2 = 0$

Resolviendo $\mu_1 = \frac{26}{7}, \mu_2 = \frac{30}{7}$, como los 2 son mayores que se cumplen las condiciones de KKT.

[0,1]

De (6) y (10) → $\mu_1 = \mu_3 = 0$

De (8) → $\mu_2 \neq 0$

De (4) → $-2 * 1 - \mu_2 = 0$

$\mu_2 = -2$ →← con (11), es decir no cumple KKT

[0,0]

De (6), (8) y (10) →$\mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0, \mu_3 \neq 0$

De (1) $\mu_3 \geq 3\mu_2$

De (3) $\mu_2 \geq 0$

Por lo tanto $\mu_1, \mu_2\ \mu_3 \geq 0$, por lo que se cumplen las condiciones de KKT

[3,0]

De (6) y (8) →$\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$

De (10) → $\mu_3 \neq 0$

De (2) → $-2 * 3 + 0 - 0 + \mu_3 = 0$

$\mu_3 = 6$

En (3) $= -2 * 0 + 0 * x + 0 \geq 0$, por lo que se cumplen las condiciones de KKT

[3,4/3]

De (6) y (10) →$\mu_1 \neq 0, \mu_3 \neq 0$

De (7) y (8) →$\mu_2 = 0$

De (2) y (4) → $-2 * 3 + \mu_1 * \frac{4}{3} + \mu_3 = 0$

$$-2 * \frac{4}{3} + \mu_1 * 3 = 0$$

Resolviendo $\mu_1 = \frac{8}{9}, \mu_3 = \frac{130}{27}$, como los 2 son mayores que se cumplen las condiciones de KKT.

c) Existe más de un punto que satisface las condiciones de KKT, ya que el cumplimiento de las condiciones no garantiza que la solución sea óptima (todo mínimo local, e incluso algunos máximos locales, las satisfacen). (2,5 puntos)
Para que sea condición suficiente de optimalidad, se necesita que la función objetivo sea convexa al igual que el dominio. Es decir, el problema debe ser convexo en *todo* el dominio.(2,5 puntos)