PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2012
Profesores: J. Vera, C. Prieto, M. Klapp
J.C. Muñoz, A. Cataldo

Examen

Duración: 3 horas y 15 minutos.

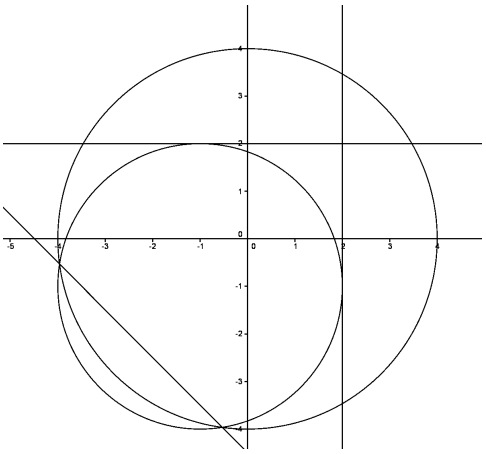
Se debe contestar cada pregunta en cuadernillos separados, y en cada uno de ellos debe colocar su nombre y número de lista asignado. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras y de celulares de cualquier tipo.*

Pregunta 1 (15 puntos)

a) (**3 puntos**) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{ll} \max & f(x_1, x_2) \\ s.a: & x_1^2 + x_2^2 \leq 16 \\ & (x_1+1)^2 + (x_2+1)^2 \geq 9 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + 2x_2 \geq -9 \end{array}$$

Empleando la siguiente figura, que muestra las restricciones del problema:



i) (**1 punto**) Identifique (destacando en el gráfico) el conjunto de soluciones factibles.

ii) (**1 punto**) Encuentre la solución óptima del problema si $f(x_1, x_2) = (x_1+2)^2 + (x_2+2)^2$

iii) (**1 punto**) Identifique los puntos singulares del problema. Justifique con precisión.

Respuesta:

i) En la figura 1 se muestra ennegrecida la región factible:

ii) La solución óptima es el punto $(x_1, x_2) = (2, 2)$.

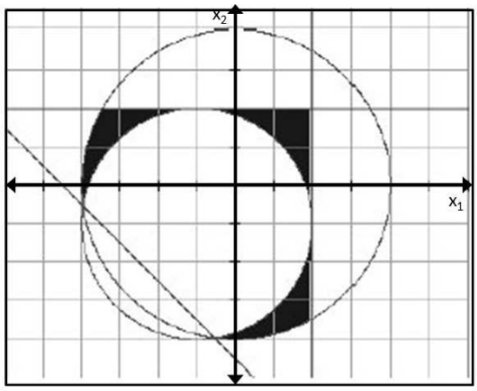


Figura 1: Figura pregunta 1, parte a)

iii) Para la región factible del problema los puntos singulares corresponden a $(-1, 2)$ y $(2, 1)$. En esos puntos los gradientes de las restricciones (2) y (3), y (2) y (4) son linealmente dependientes.

b) (**3 puntos**) Considere la solución óptima a un problema de programación lineal para el cual usted conoce la variable dual asociada a una de las restricciones. Usted necesita estimar el valor óptimo del problema si el nivel de recurso asociado a dicha restricción cambia a un valor dado. Explique bajo que situaciones la variable dual con que usted cuenta le es útil, y en ese caso cómo la usaría.

RESPUESTA: El costo dual es de interés pues si se cambia el lado derecho de la restricción en delta, en que delta está dentro de un determinado rango, el valor óptimo cambiará en exactamente el valor dual multiplicado por el valor de delta. Ahora, es importante reconocer que esto sólo será cierto si delta está dentro del rango que en algunos casos podría ser incluso un rango de ancho nulo. Una vez que se sale de ese rango, el impacto marginal de un cambio en el nivel de recursos cambiará en forma discreta a otro valor.

c) (**3 puntos**) Explique qué estructura forman los arcos con flujo estrictamente positivo de una solución degenerada en un problema de flujo en redes a mínimo costo.

RESPUESTA: Los arcos con flujo estrictamente positivo son un subconjunto de los arcos asociados a las variables básicas. Así, dado que las variables básicas forman un árbol de envergadura máxima, en el caso de una solución degenerada, los arcos con flujo estrictamente positivo formarán una estructura equivalente a un árbol de envergadura máxima al que se le han quitado algunos arcos con lo que pierde la conectividad total entre cualquier par de nodos de la red.

d) (**3 puntos**) Considere el siguiente problema de minimización:

$$f(x_1, x_2) = 4(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$$

Si consideramos el punto $(0, 0)$ como punto de partida o inicial, ¿el método de Newton convergerá más rápido, más lento o la misma tasa que el método del Gradiente? ¿Por qué?

RESPUESTA: El método de Newton converge más rápido. El método de Newton converge en una iteración por tratarse de un problema cuadrático. El método de Gradiente convergerá más lento dadas las curvas de nivel elípticas y el punto inicial.

e) (**3 puntos**) Considere el siguiente problema, en donde A es una matriz de $m \times n$:

$$\begin{array}{lrcl} (P)\ \min & c^T x & & \\ \text{s.a:} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

y sea x^* una solución óptima.

Suponga que $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_p^* > 0$ y $x_j^* = 0$ para $j = p+1, \ldots, n$.

Demuestre que el siguiente sistema, donde d es una dirección a determinar, no tiene solución.

$$\begin{array}{lrcl} (S) & Ad & = & 0 \\ & c^T d & < & 0 \\ & d_{p+1}, \ldots, d_n & \geq & 0 \end{array}$$

Respuesta: Supongamos que (S) tiene solución d. Sea $x(t) = x^* + td$, luego:

$$Ax(t) = Ax^* + tAd \Rightarrow Ax(t) = Ax^* = b$$

además $x(t) = (x_1^* + td_1, \ldots, x_p^* + td_p, td_{p+1}, \ldots, td_n) \geq 0$ para t suficientemente pequeño. Luego $x(t)$ es P-factible con $t \in [0, \bar{t})$ donde $\bar{t} = \text{mín}\left\{\frac{x_i}{p_i} : p_i < 0\right\}$.

Sea $t \in (0, \bar{t})$ cualquiera, luego:

$$c^T x(t) = c^T x^* + tc^T d < c^T x^*$$

lo que implica que x^* no es solución de P. Lo que es una contradicción, luego (S) no tiene solución.

Bono (4 puntos) Puede responder la siguiente pregunta para obtener una bonificación extra máxima de 4 puntos.

Considere el siguiente problema lineal:

$$\begin{array}{lrcl} \min & c^T x & & \\ \text{s.a:} & a_i^T x & \leq & b_i\ \forall i = 1, \ldots, m. \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

con c y $a_i\, \forall i = 1, \ldots, m$ vectores en R^n y b_i escalares $\forall i = 1, \ldots, m$. Una restricción se dice redundante si ésta se puede eliminar del problema y la región factible no cambia. Escriba un problema auxiliar que permita determinar usando el algoritmo Simplex si la j-ésima restricción del problema original es redundante.

Respuesta: Para ello se construye el siguiente problema auxiliar:

$$\begin{array}{lrcl} \min & q = b_j - a_j^T x & & \\ \text{s.a:} & a_i^T x & \leq & b_i\ \forall i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m. \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Si el problema auxiliar es infactible, entonces el problema original también lo es, y por lo tanto la restricción es redundante. Si el problema auxiliar es factible y acotado con $q^* \geq 0$ también se tiene que la restricción es redundante.

En cualquier otro caso, y entonces cuando el problema auxiliar es no acotado o $q^* < 0$, se tiene que la restricción j no es redundante.

Pregunta 2 (15 puntos)

Parte A (7 puntos)

Considere el siguiente problema lineal:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \max & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & \\ s.a: & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 12 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 8 \\ & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 6 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

El tableau asociado a la solución óptima de este problema en formato estándar corresponde a:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	-1	0	1	0	-1	6
1	-1	0	0	1	-1	c
0	3/2	1	0	-1/2	1	2
a	3/2	0	0	b	1	d

a) **(2 puntos)** Identifique los valores que deben tener las constantes a, b, c y d. Entregue las soluciones óptimas de los problemas primal y dual.

b) **(3 puntos)** Si pudiese aumentar sólo uno de los recursos (lado derecho de las restricciones) tanto como quiera sin cambiar la base óptima. ¿Qué recurso preferiría aumentar y en cuánto? ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por este aumento de recurso?

c) **(2 puntos)** ¿Cuál es el beneficio mínimo que debe tener el producto 2 para que convenga producirlo?

Solución

a) $a = 0, b = 1/2, c = 2, d = -10$. La solución óptima del primal es $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 2$, mientras que la solución óptima del dual es $y_1 = 0, y_2 = 1/2, y_3 = 1$.

b) Para responder esto primero debemos saber en cuánto podemos incrementar los recursos sin modificar la base óptima. Modificando el recurso 2 tenemos:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ b_2 \\ 6 \end{pmatrix} \geq 0$$

Luego $6 \leq b_2 \leq 12$. De manera similar para el recurso 3:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ b_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

Luego $4 \leq b_3 \leq 8$. Por lo tanto el recurso 2 puede aumentar a lo más en 4 unidades lo que tendrá un efecto $\Delta z = y_2 * \Delta b_2 = 1/2 \times 4 = 2$. Por otro lado el recurso 3 puede aumentar a lo más en 2 unidades lo que tendrá un efecto $\Delta z = y_3 * \Delta b_3 = 1 \times 2 = 2$. Por lo tanto preferimos incrementar cualquiera de los dos recursos (hasta el máximo sin cambiar de base) y aumentar el valor de la función objetivo en \$2.

c) Dado que x_2 es una variable no-básica para que sea atractivo producir el producto 2 el beneficio c_2 debe ser mayor a $c_2^{orig} + \bar{c}_2 = 1 + 3/2 = 5/2$. Se llega a la misma conclusión mediante:

$$\bar{c}_2 = c_2 - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \geq 0$$

Parte B (4 puntos)

Considere el siguiente problema:

$$\begin{array}{lrl} \max & 3x_1 + 4x_2 & \\ s.a. & 3x_1 - x_2 & \leq 12 \\ & 3x_1 + 11x_2 & \leq 66 \\ & x_1, x_2 & \in \mathbb{Z}_0^+ \end{array}$$

a) **(2 puntos)** Resuelva el problema gráficamente mediante curvas de nivel. Identifique el dominio factible, las restricciones activas e inactivas en el punto óptimo y dibuje al menos dos curvas de nivel.

b) **(2 puntos)** Gráfique el mínimo número de cortes necesarios para que la solución óptima del problema relajado, con los cortes adicionales, coincida con la solución óptima del problema entero.

Solución

a) Dominio factible está dado por el conjunto no acotado de puntos discretos caracterizados por estrellas en el siguiente gráfico (Fig. 2):

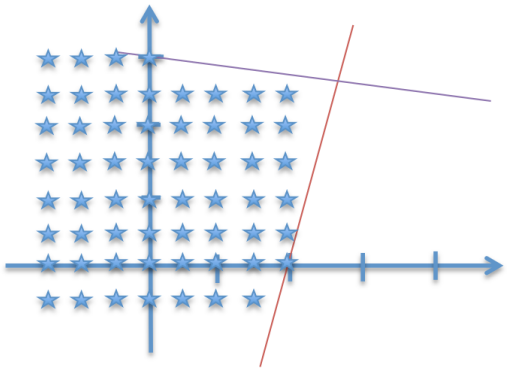


Figura 2: Figura pregunta 2, parte B, a)

El siguiente gráfico (Fig. 3) incluye tres curvas de nivel e identifica la solución óptima como el punto $(5, 4)$. De este gráfico es claro que ninguna de las restricciones está activa en el punto óptimo.

b) El mínimo número de cortes necesarios para que la solución óptima del problema relajado, con los cortes adicionales, coincida con la solución óptima del problema entero es dos. Los cortes serían los especificados en la figura 4:

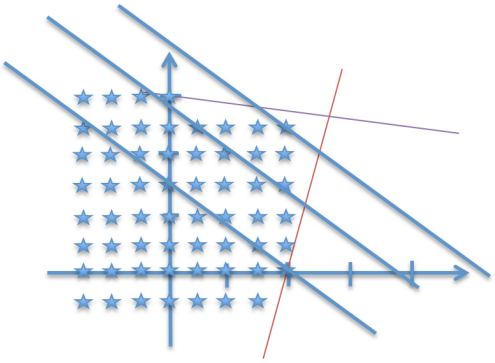


Figura 3: Figura pregunta 2, parte B, a)

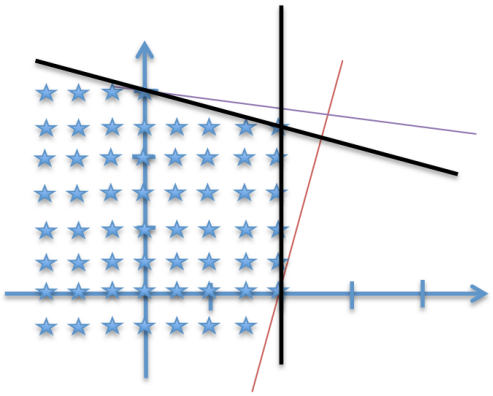


Figura 4: Figura pregunta 2, parte B, b)

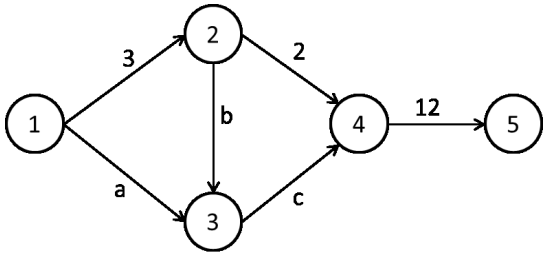
Parte C (4 puntos)

Usted es el encargado de transportar diariamente personas a través de una red desde el nodo 1 al nodo 5. En el día de hoy ha transportado a 7 personas, y desea determinar la cantidad máxima de personas que podría haber transportado. Para ello, cuenta con información respecto a algunos cortes (cuellos de botella) de la red. Esta información se detalla en la siguiente tabla:

Nodos Origen	Nodos Destino	Valor del Corte
$1-2-3-4$	5	12
$1-2-4$	$3-5$	23
$1-3$	$2-4-5$	12
$1-2$	$3-4-5$	13
$1-4$	$2-3-5$	22

a) Basándose solamente en la información entregada hasta este momento, indique cuál es la mejor cota inferior y la mejor cota superior al flujo máximo que puede ser transportado diariamente a través de esta red.

b) Considere que la red está representada por el grafo que se muestra a continuación, donde se muestra sobre cada arco la capacidad máxima de flujo que puede transportarse por día por ese arco.



Basándose en la información entregada en tabla y el grafo de la red, determine los valores de los parámetros a, b y c.

c) Determine el flujo máximo que puede pasar a través de la red. Justifique su respuesta.

d) Si tuviera dinero para ampliar en una unidad de capacidad algún arco de la red, ¿cuál escogería? ¿Qué característica particular tendría la nueva solución? Justifique sus respuestas.

Solución

a) El flujo factible da una cota inferior igual a 7 personas (que corresponde a la única solución factible que se conoce). El mínimo de los valores de corte entregados en la tabla da una cota superior igual a 12 personas (esto dado que el problema de flujo máximo tiene como dual un problema de corte mínimo asociado).

b) Los cortes permiten determinar los valores de $a = 7$, $b = 4$ y $c = 9$.

c) Visualmente se puede apreciar que el máximo flujo es de 10 personas por día. Esto se justifica porque el cuello de botella (corte) está dado por la salida de flujo desde el nodo 1, y que está límitada por suma de la capacidad de los arcos $(1, 2)$ y $(1, 3)$.

d) En ese caso se debe aumentar la capacidad en alguno de los arcos que se saturarán primero, y que son los arcos $(1, 2)$ y $(1, 3)$. En ese caso, aumentar una unidad de capacidad cualquiera de estos dos arcos llevará a que el flujo máximo aumente a 11 personas por día. Con esto, existirían dos cuellos de botella (cortes), el de los arcos $(1, 2)$ y $(1, 3)$, y el de arcos $(2, 4)$ y $(3, 4)$.

Pregunta 3 (15 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización no lineal en dos variables:

$$P) \quad \begin{array}{ll} \min & (x-6)^2 + (y-6)^2 \\ s.a. & x^2 + y^2 \leq 25 \\ & x + 3y \leq 15 \\ & x \leq 3 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

a) **(3 puntos)** Argumente, sobre la base de los resultados fundamentales de existencia de soluciones, que este problema tiene soluciones óptimas.

b) **(3 puntos)** Muestre que este es un problema convexo.

c) **(5 puntos)** Considere el punto $(x, y) = (3, 4)$. Determine si acaso se cumplen o no las condiciones KKT en ese punto. ¿Tiene este punto alguna propiedad especial? Justifique con precisión.

d) **(4 puntos)** En la solución óptima de este problema, ¿es posible estimar mediante los multiplicadores de Lagrange el cambio en el valor óptimo cuando cambia el lado derecho de alguna de las restricciones activas? Explique con precisión.

Solución

La siguiente solución está desarrollada sin hacer uso del gráfico de la región factible. Desde luego, hacer el gráfico puede ayudar y está bien.

a) Aquí notamos que el dominio es acotado, de hecho la primera restricción ya define de inmediato un conjunto acotado. Además es cerrado (por los $\leq$ de las restricciones). Por otro lado, la función objetivo es obviamente continua. Luego, por el Teorema de BW, una función continua en un conjunto cerrado y acotado alcanza sus máximos y mínimos, así que el problema tiene solución.

b) La función objetivo es convexa, ya que es suma de funciones cuadráticas. También cada una de las restricciones son convexas, y como los dominios están definidos como $\leq$ (y en el caso de las lineales da lo mismo), se definen conjuntos convexos y el dominio es, entonces, un conjunto convexo. Luego, el problema es convexo.

c) Analizamos ahora el punto $(3, 4)$. Primero explicitaremos los gradientes de las funciones involucradas. Denotaremos por f la función objetivo y por g_1, g_2 y g_3 las restricciones (podríamos incluso considerar $g_4 = -y$ como la última restricción o manejarla implicítamente en las condiciones KKT, da lo mismo). Entonces:

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2(x-6) \\ 2(y-6) \end{bmatrix}, \ \nabla g_1(x,y) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}, \ \nabla g_2(x,y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\nabla g_3(x,y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

En el punto $(3, 4)$ las restricciones activas son la 1, 2 y 3. Tenemos, en particular,

$$\nabla f(3,4) = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}, \ \nabla g_1(3,4) = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Para verificar que se cumplan las condiciones KKT tenemos que verificar fundamentalmente la condición de que

$$\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0$$

para valores $\lambda_i \geq 0$ y tales que $\lambda_i = 0$ para las restricciones no activas. Notemos aquí que la restricción de $y \geq 0$ no es activa en el punto, por esa razón el gradiente del lagrangeano es $= 0$ y no es necesario exigir la complementariedad entre el punto solución y el gradiente del lagrangeano, se da de inmediato. Luego, tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Una solución de este sistema es $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$ y, por lo tanto, se cumplen las condiciones KKT. Notemos también que el sistema tiene más de una solución, esto es relevante para la seguiente pregunta.

Este punto es solución global del problema. La razón es que el problema es convexo y satisface la condición de regularidad de Slater-Uzawa: es muy fácil ver que el interior de la región factible es no vacío, es decir, hay un punto que cumple estrictamente todas las restricciones (tomemos $(0, \epsilon)$, con $\epsilon > 0$ y pequeño). Esto hace las condiciones KKT necesarias y suficientes para un problema convexo en el cual cualquier punto que satisface KKT es solución global.

d) No es posible, tal cual, ya que los multiplicadores de Lagrange no son únicos, debido a que el punto solución está sobredeterminado.

Pregunta 4 (15 puntos)

El gerente de un supermercado de la cadena *Dumbo* está preocupado por el nivel de servicio entregado a los clientes en las cajas del local. Los turnos de los cajeros se han asignado *al ojo* y sin relación directa con las necesidades de atención. En algunos momentos del día existe más personal que el necesario para atender a los clientes, mientras que en otros momentos del día se generan colas debido a la escasez de cajeros. Producto de esto último se generan pérdidas en venta por clientes que se van a la competencia.

Como experto en modelación matemática, el gerente lo ha contratado para que le recomiende cómo asignar a los N cajeros del supermercado para las siguientes cuatro semanas. Considere que el día en el supermercado se ha dividido en tres turnos posibles: Mañana, Intermedio y Tarde. Suponga que la cantidad necesaria de cajeros durante el turno t en el día d es $D_{d,t} \in \mathbb{Z}_+$ y que por cada persona que falte para cumplir esta demanda se generará una pérdida de venta dada por $\$PV_{d,t}$. La ley laboral señala que cada trabajador puede realizar como máximo un turno al día y debe tener un día libre por semana.

Adicionalmente el presidente del sindicato le ha solicitado gentilmente que cumpla una lista de peticiones sindicales. Si usted no cumple con sus exigencias, los trabajadores podrían ir a huelga, por lo que no puede dejar de considerarlas. La lista es la siguiente:

1. Para asegurar el descanso entre turnos de los trabajadores, nadie que tenga un turno de tarde puede ser asignado al día siguiente en un turno de mañana.
2. Es sabido que los turnos de mañana son los preferidos. Con el fin de crear *justicia*, ningún trabajador puede tener asignado más del doble de turnos de mañana que otro.

Plantee el modelo de Programación Lineal Entera que permita recomendar diaramente los turnos de los cajeros de *Dumbo* durante los próximos 28 días a mínima pérdida de venta. Es decir, el modelo debe ayudarlo a definir en qué días y en qué turno trabajará cada cajero en el horizonte de planificación.

Solución

Se definen las siguientes variables.

Variables

$$x_{i,d,t}: \begin{cases} 1 & \text{si se asigna al cajero } i \ (i = 1, \ldots, N) \text{ durante el día } d \ (d = 1, \ldots, 28) \\ & \text{en el turno } t, \text{ con } t = (1\text{=mañana, } 2 = \text{intermedio, } 3\text{= tarde}) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$y_{d,t}$: déficit de personal durante el día d en el turno t

Función objetivo La función objetivo consiste en minimizar la pérdida de venta:

$$\text{mín} \quad \sum_{d=1}^{28} \sum_{t=1}^{3} y_{d,t} \cdot PV_{d,t}$$

Restricciones

R1) Cumplimiento de demanda

$$y_{d,t} + \sum_{i=1}^{N} x_{i,d,t} = D_{d,t} \quad \forall\, d = 1, \ldots, 28, t = 1, \ldots, 3.$$

R2) Un turno diario

$$\sum_{t=1}^{3} x_{i,d,t} \leq 1 \quad \forall\, i = 1, \ldots, N, d = 1, \ldots, 28.$$

R3) Un día libre a la semana

$$\sum_{d=7(s-1)+1}^{7s} \sum_{t=1}^{3} x_{i,d,t} \leq 6 \quad \forall\, i = 1, \ldots, N, s = 1, \ldots, 4.$$

R4) Condición sindical 1: No tener mañanas después de tardes

$$x_{i,d,1} + x_{i,d-1,3} \leq 1 \quad \forall\, i = 1, \ldots, N, d = 2, \ldots, 28, .$$

R5) Condición sindical 1: Turnos de mañana

$$\sum_{d=1}^{28} x_{i_1,d,1} \leq 2 \sum_{d=1}^{28} x_{i_2,d,1} \quad \forall\, i_1 = 1, \ldots, N, i_2 = 1, \ldots, N, i_1 \neq i_2.$$

R6) Naturaleza de las variables.

$x_{i,d,t} \in \{0, 1\}$, para todo $i = 1, \ldots, N$, $d = 1, \ldots, 28$ y $t = 1, \ldots, 3$.
$y_{d,t} \geq 0$, para todo $d = 1, \ldots, 28$, y $t = 1, \ldots, 3$.