PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2015
Profesores: G.Angulo - A.Cataldo - R.Cuadrado
S.Encina - D.Pozo - J.Vera

Interrogación 2

Duración: 2 horas y 15 minutos.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***

Pregunta 1 (15 puntos)

(a) (**2 puntos**) Indique, en forma justificada, si el siguiente problema tiene solución o no.

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{i=1}^{n} (e^{x_i} + e^{-x_i}) \\ s.a \quad & x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Solución: La función objetivo es continua y tal que su valor tiende a ∞ si $\|x\|$ tiende a infinito. Luego el problema tiene solución.

(b) (**6 puntos**) Considere el problema

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \\ s.a \quad & x \in D \subseteq \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

donde a, b y c son escalares reales no nulos. En cada uno de los siguientes casos, indique si el problema tiene solución óptima o no.

(I) $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 1,\ -1 \leq x_2 \leq 1\}$.
Solución: Como el dominio D es compacto (cerrado y acotado) y la función objetivo es continua, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, el problema tiene solución.

(II) $D = \mathbb{R}^2$ y se tiene que $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \geq 0$ para todo $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
Solución: Claramente el valor óptimo del problema es mayor o igual a 0. Como la solución $(0, 0)$ alcanza ese valor, el problema tiene solución.

(III) $D = \mathbb{R}^2$ y existe $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $ay_1^2 + 2by_1y_2 + cy_2^2 < 0$.
Solución: Las soluciones de la forma λy son factibles y su valor objetivo tiende a $-\infty$ si $|\lambda|$ tiende a infinito. Luego el problema es no acotado y no tiene solución.

(c) (**3 puntos**) Verdadero o falso. Justifique, ya sea demostrando que es verdadero o dando un contraejemplo.

(I) La diferencia de funciones convexas es una función convexa.
Solución: Falso. Por ejemplo, $0 - x^2$ es la diferencia de dos funciones convexas, pero el resultado no es una función convexa.

(II) Un problema convexo puede tener una cantidad infinita de soluciones óptimas.
Solución: Verdadero. Por ejemplo, mín$\{x_1 : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+\}$ es un problema convexo y toda solución de la forma $(0, x_2)$ es óptima.

(III) Dado el conjunto S convexo y el conjunto $S_1 \subseteq S$, entonces, $S_2 = S \cap S_1$ es convexo.
Solución: Falso. Como $S_1 \subseteq S$, entonces $S_2 = S \cap S_1 = S_1$. Luego si S_1 no es convexo, la afirmación es falsa. Por ejemplo $S = [0, 1]$ y $S_1 = \{0, 1\}$.

(d) (**4 puntos**) Se define la función $f(x) = 1/x$ con $x > 0$.

(I) Muestre que la función $f(x)$ es convexa.
Solución: Dados $x, y > 0$ y $0 < \lambda < 1$, queremos mostrar que $f(\lambda x + (1-\lambda y)) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$, es decir, queremos ver que se cumple

$$\frac{1}{\lambda x + (1-\lambda)y} \leq \lambda \frac{1}{x} + (1-\lambda)\frac{1}{y}.$$

Como $x, y > 0$, esto es equivalente a mostrar que

$$xy \leq (\lambda y + (1-\lambda)x)(\lambda x + (1-\lambda)y),$$

o equivalentemente,

$$xy \leq \lambda(1-\lambda)(x^2 + y^2) + xy(\lambda^2 + (1-\lambda)^2).$$

Para verificar que esta última expresión se cumple, basta con notar que $x^2 + y^2 \geq 2xy$, y por lo tanto

$$\lambda(1-\lambda)(x^2+y^2) + xy(\lambda^2 + (1-\lambda)^2) \geq 2\lambda(1-\lambda)xy + xy(\lambda^2 + (1-\lambda)^2) = xy.$$

(II) Usando la parte anterior, explique por qué el conjunto $C = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2_+ : x \cdot z \geq 1\}$ es convexo.
Solución: Notar que $C = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2_+ : z \geq f(x)\}$ con $f(x) = 1/x$, es decir, C es el epígrafo de f. Como f es convexa, concluimos que C es convexo.

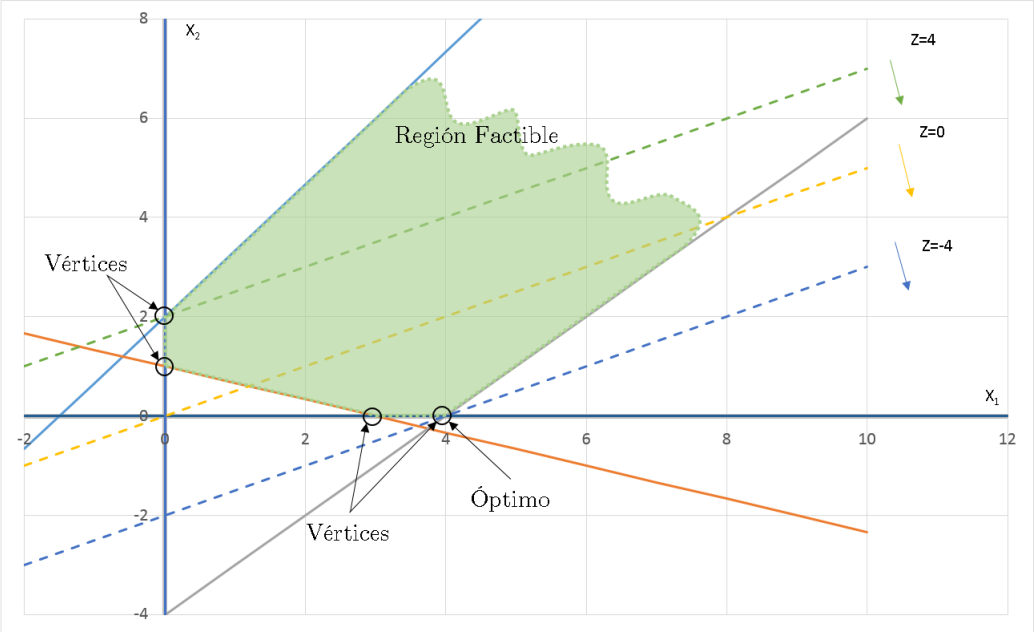
Pregunta 2 (15 puntos)

Se tiene el siguiente modelo de optimización:

$$P) \quad \begin{array}{rrll} & \text{mín} & -x_1 + 2x_2 & \\ & s.a. & -4x_1 + 3x_2 \leq 6 & (1) \\ & & x_1 + 3x_2 \geq 3 & (2) \\ & & x_1 - x_2 \leq 4 & (3) \\ & & x_1, x_2 \geq 0. & \end{array}$$

(a) (**8 puntos**) Desarrolle lo siguiente en el contexto del método gráfico:

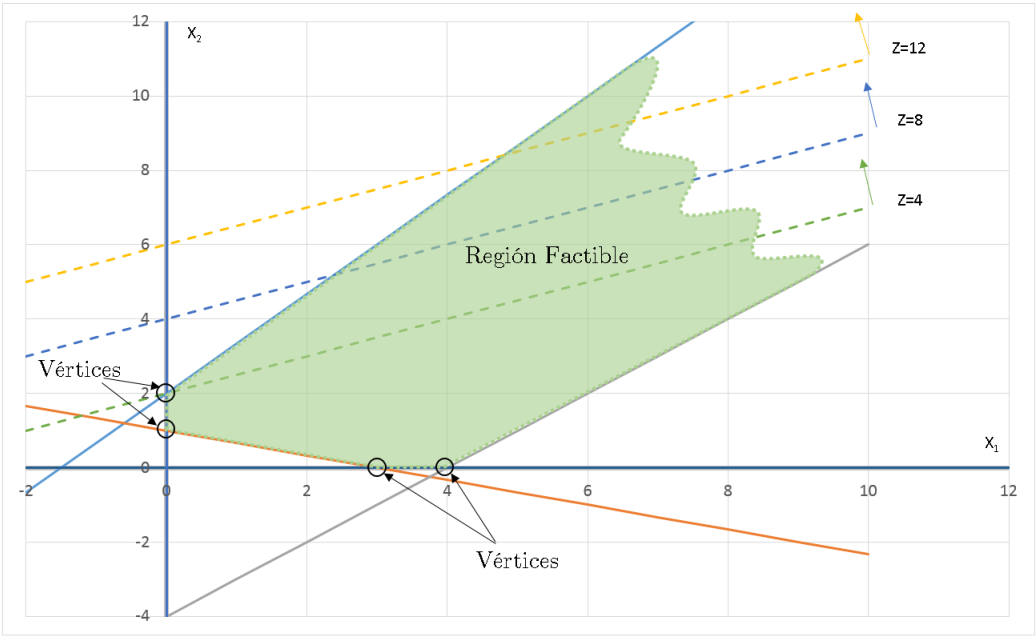
(i) (**3 punto**) Resuelva el problema planteado utilizando el método gráfico. En su gráfico, indique claramente la región factible y sus vértices. Además, identifique la solución óptima y su valor, y cuáles son las restricciones activas en el óptimo.
Solución: Al resolver mediante el método gráfico obtenemos lo siguiente:



Obtenemos los vértices (4,0), (3,0), (0,1) y (0,2); siendo (4,0) el óptimo del problema P) con un valor de $z = -4$ y donde está activa la restricción (3) y la asociada a la naturaleza de la variable x_2. Esto a pesar de que la región factible es no acotada.

(ii) (**2 puntos**) Si la función objetivo del problema P) fuera ahora de maximización, ¿cuál es la solución óptima? Caracterice claramente en forma gráfica la respuesta (Haga un gráfico adicional para este caso, para que no se mezcle con el de la parte (i)).

Solución:



Al realizar el cambio indicado, la región factible y los vértices no cambian, sino que solo en «como mejora la función objetivo» y con este cambio en el nuevo gráfico podemos observar que estamos frente a un problema no acotado y por ende no existe solución óptima.

(iii) (**2 punto**) Indique el rango en que puede modificarse el escalar que acompaña a la variable x_2 en la función objetivo de manera que la solución obtenida en (i) no cambie.

Solución: Para que cambie la solución obtenida en (i), debería la función objetivo al

menos igualar una de las pendientes de las restricciones activas y como solo cambiamos el escalar asociado a la variable x_2, solo sería posible igualar la pendiente de la restricción (3). Por lo que el rango en que no cambia la solución es $]1, \infty[$ para dicho escalar.

(v) (**1 punto**) Indique el rango en que puede modificarse el escalar del lado derecho de la restricción (1) de manera que la solución obtenida en (i) no cambie.
Solución: Para que la restricción (1) defina el óptimo, esta debe ser una restricción activa y para que cambiando el escalar del lado derecho suceda esto; reemplazamos el óptimo en la frontera que define la restricción y dejamos el escalar como incognita:

$$-4 \times 4 + 3 \times 0 = b \Rightarrow b = -16$$

Luego si decrece más este escalar, el óptimo cambiaría, por lo que el rango en que no cambia la solución es $]-\infty, -16]$ para dicho escalar.

(b) (**7 puntos**) Siempre respecto al problema P) de arriba: Simplex:

(i) (**2 puntos**) Escriba en forma estándar del problema P).
Solución: La forma estándar del problema P) sería:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & -x_1 + 2x_2 \\ s.a. & -4x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + 3x_2 - x_4 = 3 \\ & x_1 - x_2 + x_5 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

(ii) (**2 puntos**) Indique claramente la base y la solución básica factible asociada a cada punto extremo encontrado en (i) de la parte (a).
Solución: Para encontrar lo requerido, basta con reemplazar los vértices en las restricciones en la forma estándar y ver las variables mayores a cero para obtener la base asociada; con lo cual se obtenía lo siguiente:

$$\begin{array}{c} x_a = \{4, 0, 22, 1, 0\} \Rightarrow B_a : \{1, 3, 4\} \\ x_b = \{3, 0, 18, 0, 1\} \Rightarrow B_b : \{1, 3, 5\} \\ x_c = \{0, 1, 2, 0, 5\} \Rightarrow B_c : \{2, 3, 5\} \\ x_d = \{0, 2, 0, 3, 7\} \Rightarrow B_d : \{2, 4, 5\} \end{array}$$

(iii) (**1 punto**) Indique dos soluciones básicas que no sean factibles.
Solución: Para esto, bastaba con encontrar dos intersecciones de restricciones del problema original que no fueran parte de la región factible y estos puntos reemplazarlos en las restricciones en la forma estándar, donde los más sencillos de encontrar eran:

$$\begin{array}{c} x_e = \{0, -4, 18, 9, 0\} \\ x_f = \{-\frac{3}{2}, 0, 0, -\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\} \end{array}$$

(iv) (**2 puntos**) Escriba en forma estándar el problema de Fase I asociado al problema original, pero usando el menor número posible de variables artificiales posible.
Solución: La forma estándar del problema de Fase I asociado al problema original, pero usando el menor número posible de variables artificiales posible es:

$$\begin{array}{lr} \text{mín} & y_1 \\ s.a. & -4x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + 3x_2 - x_4 + y_1 = 3 \\ & x_1 - x_2 + x_5 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1 \geq 0 \end{array}$$

Pregunta 3 (15 puntos)

(a) (**6 puntos**) Considere el siguiente problema de Optimización Lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ s.a. & x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ & 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 300 \\ & x_j \geq 0, j = 1, \ldots 4. \end{array}$$

Considere la solución formada por las variables básicas x_3 y x_4. Determine los valores de la solución, el valor de la función objetivo y calcule los costos reducidos para determinar si la solución es óptima. En caso de no serlo, haga **una** iteración del algoritmo Simplex y determine si su nueva solución es óptima o no. Debe hacer su desarrollo usando el Simplex en forma algebraica, no puede usar el Tableau.

Solución: La base inicial es $\{3, 4\}$. Tenemos entonces:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

y se tiene que:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

La solución es:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Además tenemos que

$$c_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \; c_R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora los costos reducidos. Tenemos que:

$$\pi^T = c_B^T B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$$

así que los costos reducidos son:

$$\begin{array}{rcl} \bar{c}_R^T & = & c_R^T - \pi^T R \\ & = & \begin{pmatrix} \bar{c}_3 & \bar{c}_4 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

los que indican claramente que esa solución no es óptima.

Vamos a seleccionar la variable x_1 para entrar a la base. Para calcular cuál variable básica sale de la base, necesitamos calcular $\bar{R}_1$. Tenemos:

$$\bar{R}_1 = B^{-1}R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ahora determinamos la variable que sale calculando:

$$\bar{\delta} = \text{mín} \left\{ \frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{11}}, \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{21}} \right\} = \text{mín} \left\{ \frac{100}{1}, \frac{100}{2} \right\} = 50,$$

que se alcanza en el segundo lugar, asociado a la variables básica x_4, la que sale de la base. La nueva base es $\{1, 3\}$. Para esta base, tenemos:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

y se tiene que:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La solución es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Además tenemos que

$$c_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \ , \ c_R = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora los costos reducidos. Tenemos que:

$$\pi^T = c_B^T B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$$

así que los costos reducidos son:

$$\begin{aligned} \bar{c}_R^T &= c_R^T - \pi^T R \\ &= \begin{pmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

los que indican claramente que esta solución sí es óptima.

(b) (**5 puntos**) Considere el siguiente problema de Optimización Lineal, en el que α es un cierto escalar:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a. & x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ & \alpha x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ & x_j \geq 0, j = 1, \ldots 4. \end{array}$$

Suponga que en estos momentos está ejecutando el algoritmo Simplex y se encuentra en la solución dada por las variables básicas $\{x_2, x_3\}$ y se apronta a hacer la siguiente iteración. Determine el rango de valores para α que hace que x_1 sea la variable que entrará a la base y que hará que en esta siguiente iteración, el problema será detectado como no acotado. Debe hacer su desarrollo usando el Simplex en forma algebraica, no puede usar el Tableau.

Solución: Nos dicen que estamos en una iteración con las variabels $\{2, 3\}$. Luego, tenemos:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

y se tiene que:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular los costos reducidos de esta solución. Para esto notemos que:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que

$$\pi^T = c_B^T B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \bar{c}_R^T &= c_R^T - \pi^T R \\ &= \begin{pmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\alpha & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De acá se sigue que para que pueda entrar a la base, debe tenerse $\alpha < 3$. Pero además, debe ocurrir que se detecte no acotamiento, así que tenemos que analizar la columna $\bar{R}_1$. Tenemos:

$$\bar{R}_1 = B^{-1} R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha \\ -1 + \frac{1}{2}\alpha \end{pmatrix}$$

El problema será detectado como no acotado si los elementos de esa columna $\bar{R}_1$ son ≤ 0. Esto implica que $\alpha \leq 0$ y $-1 + \frac{1}{2}\alpha \leq 0$, que implica que $\alpha \leq 2$. Luego, para que se cumplan todas las condiciones basta que $\alpha < 0$.

(c) (**4 puntos**) Considere un problema de Optimización Lineal que originalmente es de la forma

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ s.a. & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

donde A es una matriz de m por n, $m > n$, $b \geq 0$. Se sabe que este problema tiene solución óptima única y en la cual las n variables x son estrictamente positivas. El problema es llevado a la forma estándar:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ s.a. & Ax + Iy = b \\ & (x, y) \geq 0 \end{array}$$

donde ahora las m variables $y_1, \ldots, y_m$ son variables de holgura e I es la matriz identidad de $m \times m$.

Suponga que el algoritmo Simplex es iniciado con la base formada por las variables de holgura. Muestre que se requieren al menos n iteraciones del Algoritmo Simplex para poder llegar a la solución óptima.

Solución: Si la solución óptima es única y tal que $x^* > 0$, eso quiere decir que la base óptima está formada por las n variables x más $m - n$ variables de holgura. La base inicial son las m variables de holgura. Esto significa que el Simplex tendrá que sacar las otras $m - (m - n) = n$ variables de holgura de la base. Como cada pivote cambia una variable, se necesitarán al menos n pivotes para llegar a la base óptima.

Pregunta 4 (15 puntos + 5 de bono)

a) (**15 puntos**)

Jaime se ha puesto como meta planificar lo que será conocido como la celebración perfecta del 18, para lo que contará con T días disponibles de fiesta. Jaime irá a un lugar de cabañas cerca de unas fondas, e invitará a un montón de amigos y amigas.

El lugar al que irán cuenta con J fondas e I cabañas, donde cada una de las cabañas posee una capacidad máxima de ocupación (determinada por el número de camas) conocida e igual

a C_i camas. Dado que las cabañas tienen una capacidad máxima de ocupación, Jaime tiene que decidir qué amigos invitará a esta celebración. Es por ello que ha listado en el conjunto K a todos los amigos que serán considerados como posibles invitados. Ahora bien, los amigos(as) que se encuentran pololeando asistirán a esta celebración sólo si se les invita con su respectiva pareja. La información respecto a qué amigos se encuentran pololeando se describe con el parámetro $P_{kk'}$, que es igual a 1 si el amigo k se encuentra pololeando con k', y 0 si no. Suponga que las parejas son también amigos de Jaime. Jaime estima que cada amigo que asista a la celebración le aportará F_k unidades de bienestar. Evidentemente, Jaime no invitará a más personas que las que permita la capacidad de las cabañas, y supondremos que se usa una cama por persona.

Además de la capacidad máxima de ocupación de la cabaña, Jaime tiene en consideración la distancia física a la que queden de las fondas. De acuerdo a lo conversado con sus amigos, Jaime llegó a la conclusión de que, por cada metro que tengan que caminar desde la cabaña a alguna fonda, él perderá E unidades de bienestar. La distancia a la que la cabaña i se encuentra de la fonda j es D_{ij} metros.

Existe un costo asociado al arriendo de cada cabaña y la forma en que se cobra es explicada por el dueño del lugar: "Las cabañas pueden arrendarse la cantidad de días que ustedes quieran, pero deben ser arrendadas por días consecutivos. Por ejemplo, pueden arrendar los días 1, 2 y 3, lo que cuesta una cantidad total ya determinada, o puede ser los días 3 y 4, lo cual tiene otro costo total predeterminado, etc. Sin embargo, no permitiré que me arrienden días no consecutivos, por ejemplo que me arrienden los días 1, 3 y 4". Supondremos entonces que para cada cabaña y cada alternativa de combinaciones válidas de días de arriendo, se conoce el valor por la estancia completa que se debería pagar.

Asuma que a Jaime se le arrendará solamente una cabaña durante las fiestas, que cada día que esté arrendada la cabaña irá con sus amigos a alguna fonda, que el costo de la cabaña corre exclusivamente por cuenta de él y que cuenta con un presupuesto máximo de P pesos para gastar en estas fiestas.

(i) (**12 puntos**) Considerando todo lo anterior, plantee un modelo de programación lineal mixta que le permita a Jaime maximizar las unidades de bienestar que percibirá durante la celebración de estas fiestas. Indique los supuestos adicionales que ha considerado en el modelamiento.

Solución:

Sets:

i: Set $1, \ldots, I$ de cabañas disponibles.
j: Set $1, \ldots, J$ de fondas existentes.
k: Set K de amigos.
t: Set $1, \ldots, T$ de días disponibles dentro de la semana.
v: Set V de patrones de días posibles para arrendar.

Sub-conjuntos:

$Dias_v$: Subconjunto de días t que conforman el patrón v.

Parámetros:

F_k: Unidades de agrado que el amigo k asista a la celebración.
$P_{kk'}$: 1 si el amigo k esta pololeando con k', 0 en caso contrario.
D_{ij}: Unidades de distancia desde la cabaña i a la fonda j.
E: Unidades de desagrado generados por metro de distancia entre cabaña y fonda.
C_i: Cantidad de camas que la cabaña i dispone.

R_{iv}: Costo total de arriendar la cabaña i con el patrón v.

P: Presupuesto máximo.

Variables:

X_{iv}: 1 si la cabaña i se arrienda con patrón de arriendo v, 0 en caso contrario.

O_{it}: 1 si la cabaña i es arrendada durante el día t, 0 en caso contrario.

Y_{ijt}: 1 si desde la cabaña i se toma la decisión de ir a la fonda j en el día t, 0 en caso contrario.

W_k: 1 si se invita al amigo k a asistir a la celebración, 0 en caso contrario.

Modelo El modelo a optimizar es el siguiente.

Función Objetivo:

$$\text{máx} \sum_k F_k \cdot W_k - \sum_{ijt} 2E \cdot D_{ij} \cdot Y_{ijt}$$

s.a

$$\sum_k W_k \leq C_i + |K|(1 - \sum_v X_{iv}) \qquad \forall i \tag{1}$$

$$\sum_{iv} X_{iv} = 1 \tag{2}$$

$$O_{it} = \sum_{v:t \in Dias_v} X_{iv} \qquad \forall i,t \tag{3}$$

$$Y_{ijt} \leq O_{it} \qquad \forall i,j,t \tag{4}$$

$$\sum_{ij} Y_{ijt} = \sum_i O_{it} \qquad \forall t \tag{5}$$

$$\sum_{iv} R_{iv} \cdot X_{iv} \leq P \tag{6}$$

$$W_k = W_{k'} \qquad \forall k,k' : \quad P_{k,k'} = 1 \tag{7}$$

$$X_{iv}, O_{it}, Y_{ijt}, W_k \in \{0,1\} \tag{8}$$

Restriciones:

1: No superar la capacidad máxima de camas de la cabaña arrendada.

2: Solo se puede arrendar 1 sola cabaña en todo el horizonte de tiempo.

3: Para poder utilizar la cabaña debo tenerla arrendada.

4: Para poder ir desde la cabaña a la fonda, debo tener arrendada la cabaña.

5: Todos los días que tengo arrendada la cabaña, debo ir a una fonda y solo una.

6: Restricción de presupuesto.

7: Amigos con parejas van juntos.

8: Naturaleza de las variables.

Observación: Recordar que usualmente los problemas pueden ser modelados de múltiples formas y no sólo como está descrito en la presente solución.

(ii) (**3 puntos**) Carolina le ha planteado lo siguiente: "Las fondas son entretenidas, pero encuentro más entretenido una fonda nueva que repetirse una fonda que ya hemos visitado". En ese sentido Jaime ha estimado que visitar una fonda por primera vez le genera N unidades de agrado y visitas adicionales a la misma fonda le generan $2N$ unidades de desagrado por ocasión. Modifique el problema anterior de modo que se puedan considerar estos cambios.

Solución: Se deben incluir los siguientes cambios:

Variables:

α_j: 1 si se asiste alguna vez a la fonda j, 0 en otro caso.

β_j: Cantidad de veces adicionales que se repite la visita a la fonda j.

Función Objetivo:

$$\text{máx} \sum_k F_k \cdot W_k - \sum_{ijt} 2E \cdot D_{ij} \cdot Y_{ijt} + \sum_j (N \cdot \alpha_j - 2 \cdot N \cdot \beta_j)$$

Restricciones

$$\alpha_j \leq \sum_{it} Y_{ijt} \quad \forall j \tag{9}$$

$$\sum_{it} Y_{ijt} \leq 1 + \beta_j \quad \forall j \tag{10}$$

$$\alpha_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \tag{11}$$

$$\beta_j \geq 0 \quad \forall j \tag{12}$$

Restriciones:

9: Activación de asistencia alguna vez a la fonda.

10: Contador de repeticiones de asistencia a la misma fonda.

11: Naturaleza de la variable.

Observación: Recordar que usualmente los problemas pueden ser modelados de múltiples formas y no sólo como está descrito en la presente solución.

b) (**Bonus 5 puntos**) Respecto a la charla del profesor Vladimir Marianov, responda las siguientes preguntas:

(i) (**3 puntos**) ¿Cuál es el modelo propuesto para la localización de baños en la Escuela? Brevemente, describa parámetros, variables, restricciones y función objetivo del modelo.

Respuesta: El modelo corresponde a

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \textstyle\sum_{j \in J} x_j \\ & \textstyle\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq 1 \quad \forall i \in I \\ & x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J, \end{aligned}$$

donde $j \in J$ denota potenciales ubicaciones de baños, $i \in I$ denota clusters de usuarios, y a_{ij} es un parámetro binario indicando si el sitio j está "cerca" del cluster i, por ejemplo, a menos de 100 metros. Las variables x_j indican si se instala o no un baño en el sitio j, mientras que la restricción obliga a elegir, para cada cluster, al menos un baño que esté cerca. El objetivo es instalar el menor número de baños.

(ii) (**2 puntos**) ¿Cuál fue el principal beneficio que se explicitó respecto al proyecto de localización y cierre de escuelas rurales?

Respuesta: Con el proyecto se concluyó que era posible disminuir el número de escuelas en operación sin comprometer la cobertura y disminuyendo la distancia recorrida por los estudiantes. Si bien no fue implementado, los resultados del modelo sirvieron como directrices para evaluar qué escuelas debían recibir apoyo para mantenerse operativas tras el terremoto de 2010.