PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2014
Profesores: P.Álvarez - A.Cataldo
A.Lüer - J.Vera

Pauta Interrogación 1

Duración: 2 horas 15 minutos.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras y de celulares de cualquier tipo.*

Pregunta 1 (15 puntos)

(a) (**3 puntos**) Indique si el siguiente problema de optimización tiene o no soluciones. Justifique con precisión su respuesta.

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{1}{x_j} + 2x_j \right\} \\ s.a. & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Respuesta: Primero hay que notar que el problema tiene n variables, en general y sólo x_1 y x_2 están acotadas por abajo en 0. En el caso que $n = 2$, definitivamente sí tiene soluciones, ya que se puede argumentar con el teorema de la hipótesis H. Basta considerar uno de los sumandos. Sea:

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2x$$

Es fácil ver que $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$. La situación del límite cuando x tiende a 0 (donde la función no está definida) la podemos manejar fácilmente poniendo $x \geq \epsilon$, donde $\epsilon > 0$ pero chico, y con eso tenemos continuidad total.

Por otro lado, para $n > 2$, se genera un problema cuando x_j está libre ya que en ese caso $f(x)$ ni siquiera es continua. En todo caso, cuando $x \to -\infty$ se ve claramente que $f(x) \to -\infty$. Se deduce de esto que el problema no es acotado en ese caso.

Se espera idealmente que los alumnos analicen el problema como está descrito arriba. Si sólo abordaron el caso de 2 variables se otorgarán 1,5 puntos.

(b) (**4 puntos**) Argumente en forma justificada que el conjunto definido por el siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{array}{rcl} \sum_{j=1}^{n} (x_j)^4 & \leq & 1 \\ e^{(\sum_{j=1}^{n} x_j)} & \leq & 1 \end{array}$$

es convexo.

Respuesta: La primera función es convexa ya que es suma de funciones convexas (podemos dar por hecho que x^4 lo es. La segunda también es convexa ya que es composición de funciones convexas, con e^x además creciente. Los conjuntos de nivel de funciones convexas son convexos, y la intersección de convexos también. Luego, todo el conjunto es convexo.

(c) (**4 puntos**) Utilizando argumentos de convexidad (de funciones) demuestre la siguiente desigualdad:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

donde se tiene que los $a_1, \ldots, a_n$ son reales estrictamente positivos.

Respuesta: Se tiene que:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{1/n} = \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{1}{n}\ln(a_i)} = e^{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\ln(a_i)}$$

esta última igualdad pues se tiene una combinación convexa con $\lambda_i = \frac{1}{n}$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Ahora, aprovechando que la función ln() es cóncava tenemos:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} = e^{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\ln(a_i)} \leq e^{\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} a_i\right)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} a_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

con lo que se probó que:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

(d) (**3 puntos**) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & c^T x \\ \text{s.a.} & Ax \leq b \end{array}$$

Cuyo dominio $D = \{x : Ax \leq b\}$ es no acotado. Suponga que $h = (-1, 3)$ es el único vector no nulo tal que $Ah \leq 0$. También se sabe que D posee al menos un vértice (punto extremo). ¿Qué condición debe cumplir el vector c para que el problema **tenga solución óptima**?

(Indicación: h con la propiedad indicada es lo que se llama un "rayo de escape", es decir, si $x \in D$, entonces $x + th \in D$, para todo $t \geq 0$.)

Respuesta: El resultado de no acotamiento dice que si existe $h \neq 0$ tal que $Ah \leq 0$ y $c^T h > 0$, entonces el problema es no acotado (ojo, estamos maximizando). Si existe un único h con $Ah \leq 0$, entonces para que el problema NO sea no acotado, debe tenerse que $c^T h \leq 0$. Luego, si $c = (c_1, c_2)$, debe cumplir $3c_2 \leq c_1$.

Pregunta 2 (15 puntos)

Considere el siguiente problema lineal,

$$\mathcal{P}) \quad \begin{array}{rl} \max & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(a) (**3 puntos**) Grafique el conjunto de soluciones factibles.

(b) (**3 puntos**) Obtenga, en base al gráfico, el valor óptimo y las coordenadas de la solución óptima.

(c) (**3 puntos**) Determine el intervalo en el que puede variar el coeficiente de la variable x_1 en la función objetivo para que la solución óptima no cambie.

(d) (**3 puntos**) Escriba $\mathcal{P}$ en forma estándar.

(e) (**3 puntos**) Determine (con la forma estándar) la base asociada a la solución óptima obtenida anteriormente. Indique con claridad cuáles son las variables básicas y cuáles las no básicas asociadas a esta base.

Pauta

(a) La Figura 1 presenta el poliedro factible del problema en negro (las fronteras) y verde (el interior), los vértices en rojo y algunas curvas de nivel en azul.

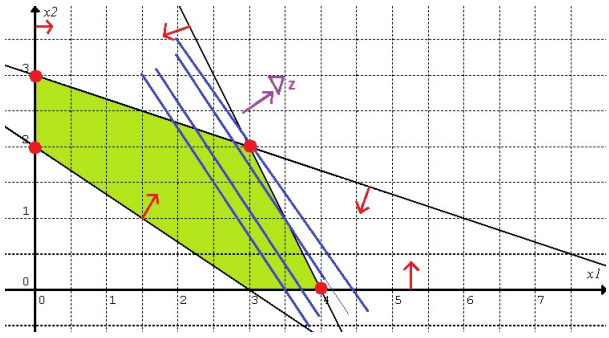


Figura 1: Solución gráfica del problema 2.

(b) Considerando las curvas de nivel y la forma del poliedro, se observa que el vértice de coordenadas $(3, 2)$ es óptimo, con valor objetivo $z^* = 13$.

(c) Para la función objetivo $z = a_1x_1 + a_2x_2$, la pendiente de sus curvas de nivel es $m = -\frac{a_1}{a_2}$. Para que la solución óptima no cambie, una condición límite es que las curvas de nivel tengan una pendiente menor que la frontera de la restricción 2 ($x_1 + 3x_2 = 9$), y mayor que la frontera de la restricción 3 ($2x_1 + x_2 = 8$), es decir,

$$-\frac{2}{1} \leq -\frac{a_1}{a_2} \leq -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{a_1}{a_2} \leq 2$$

Es decir, el cuociente de los coeficientes del objetivo tiene que estar entre $\frac{1}{3}$ y 2.

Como se quiere calcular la sensibilidad del coeficiente de x_1 (a_1), basta con dejar fijo el coeficiente de x_2 ($a_2 = 2$) en la expresión anterior. Es decir,

$$\frac{2}{3} \leq a_1 \leq 4$$

(d) El problema en forma estándar es el siguiente.

$$\begin{array}{rlrrrrrl} & \min & -3x_1 & -2x_2 & & & & \\ & \text{s.a.} & 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & & & = 6 \\ \mathcal{P}_E) & & x_1 & +3x_2 & & +x_4 & & = 9 \\ & & 2x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = 8 \\ & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

Donde x_3 es la variable de exceso de la primera restricción. Por otra parte x_4 y x_5 son las variables de holgura de la segunda y tercera restricciones, respectivamente.

(e) Reemplazando las coordenadas de la solución óptima $(3, 2)$ en la forma estándar se obtienen las coordenadas $(3, 2, 6, 0, 0)$. La solución tiene $n - m = 5 - 3 = 2$ ceros, por lo que no es degenerada. El conjunto de variables básicas lo forman aquellas con coordenadas no nulas, es decir, $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, x_3\}$. De paso se sabe que $\mathcal{R} = \{x_4, x_5\}$.

Pregunta 3 (15 puntos)

(a) (**8 puntos**) Respecto al artículo de Epstein et als, sobre la aplicación en JUNAEB, responda:

(i) (**3 puntos**) En el artículo se indica que se evalúo la "robustez" de las soluciones obtenidas. Indique a qué exactamente se refieren los autores con ese concepto de "robustez".

Respuesta: Se refieren a que las soluciones no cambien mucho en aspectos de costos bajo distintos escenarios. Esto es importante para identificar soluciones que sirven igual, incluso si hay cambios en algunos supuestos respecto a los escenarios.

(ii) (**3 puntos**) Muy brevemente, indique por qué se originan cerca de 700 escenarios que deben ser evaluados por los autores.

Respuesta: La JUNAEB debe considerar una gran cantidad de distintas opciones de alimentación, con distintos niveles de demanda. Las ofertas se especifican con estas características y el modelo de asignación debe ser resuelto para cada una de esas combinaciones. Esto origina los 704 escenarios.

(iii) (**2 puntos**) En el artículo se formula una restricción que relaciona las variables Z_k con las Y_{kr}:

$$Z_k \leq \sum_{r \in R} Y_{kr}, \ \forall k \in K,$$

pero esta restricción por sí sola no establece la relación que debe haber entre ambas. ¿Cuál es la otra restricción que los autores describen en el documento para establecer esta relación? Explique con claridad.

Respuesta: La restricción que falta es:

$$\sum_{r \in R} Y_{kr} \leq |R| Z_k$$

Las dos juntas hacen que Z_k sea igual a 1 si y sólo si se acepta al menos una de las ofertas de la forma k en alguna región.

(b) (**7 puntos**) Una compañía de inversiones tiene la opción de invertir un capital total K, en diversos fondos mutuos disponibles en el mercado y tiene que decidir cuánto invertir en cada uno de ellos. Vamos a denotar con el índice $j = 1, \ldots, n$ los fondos disponibles. Si se invierte en el fondo j se obtendrá α_j pesos ($\alpha_j > 1$) por cada peso invertido. Sin embargo, existen ciertos costos administrativos y comisiones fijas que implican que si se invierte en el fondo j, debe pagarse una cantidad fija g_j, independientemente de la cantidad invertida. Además, por razones impuestas por la autoridad reguladora, se han establecido algunas restricciones a la inversión, las cuales afectan a algunos de los fondos. La empresa ha analizado el problema y ha formulado el siguiente modelo de optimización (donde F es un número menor que K):

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j - \sum_{j=1}^{n} g_j y_j & & \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j \leq K & & (1)\\
& x_j \leq K y_j \qquad j = 1, \ldots, n & & (2)\\
& \sum_{j \in J_1} y_j \leq 1 & & (3)\\
& \sum_{j \in J_2} y_j \leq zK & & (4)\\
& \sum_{j \in J_3} x_j \leq F + (1-z)K & & (5)\\
& x_j \geq 0,\ y_j \in \{0,1\},\ z \in \{0,1\} \qquad j = 1, \ldots, n & & (6)
\end{aligned}
$$

Explique en palabras, y basándose en el contexto del problema, el significado y uso de cada una de las variables, de las restricciones (1) a (5) de este modelo, y de la función objetivo. Considere que en el modelo, los conjuntos J_1, J_2 y J_3 son conjuntos de índices que identifican a algunos de los fondos mutuos, es decir, $J_k \subset \{1, \ldots, n\}, k = 1, 2, 3$.

Respuesta: Las variables x_j corresponden a la cantidad a invertir en cada fondo. y_j es la indicadora de si se invierte o no en el fondo j. La variable z es una binaria auxiliar en las restricciones 4 y 5, como se explica continuación.

La restricción (1) limita el capital a invertir.

(2) es la restricción de carga fija que hace funcionar y_j.

(3) dice que a lo más un fondo de los indicados en el conjunto J_1 puede usarse.

(4) y (5) establecen que si se usa algún fondo indicado por el conjunto J_2, entonces la cantidad invertida en fondos del conjunto J_3 no puede exceder F. Notar que la restricción (4) tiene una "M" grande igual a K, lo cual es razonable (se esperaría que K fuera muy grande), pero el mismo efecto podría haberse logrado con una restricción como $\sum_{j \in J_2} y_j \leq nz$ o $\sum_{j \in J_2} x_j \leq Kz$, pero no necesitaba estar escrita de ninguna de esas otras formas.

Pregunta 4 (15 puntos)

Una estación de radio realiza transmisiones durante H horas al día. Para el día de hoy cuenta con N programas y debe seleccionar cuáles emitir durante todas esas horas (considere que la radio no puede dejar de transmitir en ningún momento de las H horas). Específicamente, el programa i tiene una duración de d_i horas (que es un número entero), $i = 1, \ldots, N$.

La audiencia potencial de cada hora ha sido estimada y es igual a a_h personas, $h = 1, \ldots, H$. También se ha estimado que fracción de la potencial audiencia escucharía el programa i en la hora

h, siendo este valor b_{ih}, con $0 \leq b_{ih} \leq 1$. Un programa que es emitido, debe transmitirse en forma continua y sólo una vez en el día.

Por ejemplo, si hay un total de 7 programas cuyas duraciones son $d_1 = 10, d_2 = 5, d_3 = 5, d_4 = 12, d_5 = 6, d_7 = 6$, una posible programación que dura 22 horas consiste en transmitir el programa 1 seguido del 4, pero otra posible asignación transmite el programa 2 seguido del 3 del 5 y del 7. Como se observa, ambas asignaciones cubren las 22 horas pero pueden diferir en términos de la audiencia que captan según los valores b_{ih} de cada programa.

La estación le ha encargado a usted elaborar la programación del día de modo de cumplir con las especificaciones anteriores y llegar a la mayor audiencia posible. Para ello, formule un modelo de optimización lineal entero que permita hacer eso.

Pauta

El modelo asociado es:

Variables

x_{ih}: variable binaria que vale 1 si el programa i, con $i = 1, \ldots, N$, comienza a emitirse al inicio del período h, con $h = 1, \ldots, H$, y que vale 0 en otro caso.

y_{ih}: variable binaria que vale 1 si el programa i, con $i = 1, \ldots, N$, está emitiéndose al inicio del período h, con $h = 1, \ldots, H$, y que vale 0 en otro caso.

Función objetivo Maximizar la potencial audiencia de la emisora:

$$\text{máx} \sum_{h=1}^{H} a_i \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} b_{ih} y_{ih}$$

Restricciones

R1) En todas las horas se debe estar emitiendo exactamente un programa.

$$\sum_{i=1}^{N} y_{ih} = 1 \qquad \text{para } h = 1, \ldots, H.$$

R2) Los programas pueden emitirse a lo más una vez al día.

$$\sum_{h=1}^{H} x_{ih} \leq 1 \qquad \text{para } i = 1, \ldots, N.$$

R3) Continuidad del programa según su duración y emisión (condición 1).

$$d_i x_{ih} \leq \sum_{k=h}^{h+d_i-1} y_{ik} \qquad \text{para } i = 1, \ldots, N; h = 1, \ldots, H - d_i + 1.$$

R4) Continuidad del programa según su duración y emisión (condición 2).

$$y_{ih} = \sum_{k=h-d_i}^{h} x_{ik} \qquad \text{para } i = 1, \ldots, N; h = d_i + 1, \ldots, H.$$

R5) Naturaleza de las variables

$$x_{ih} \in \{0,1\}, \text{ para } i = 1,\ldots,N; h = 1,\ldots,H.$$
$$y_{ih} \in \{0,1\}, \text{ para } i = 1,\ldots,N; h = 1,\ldots,H.$$