PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2013
Profesores: P.Álvarez - P.Carrillo - A.Cataldo
R.Giesen - A.Lüer - J.Vera

Pauta Interrogación 1

Duración: 2 horas y 30 minutos.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras y de celulares de cualquier tipo.*

Pregunta 1 (10 puntos)

a) (**3 puntos**) Considere la siguiente función en n variables, con $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = -\sum_{i=1}^{m} \log(b_i - \alpha_i^T x)$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, m$, $b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$.

i) ¿Cuál es el dominio en el cual esta función está bien definida?

ii) Argumente, a partir de propiedades elementales, que la función f es convexa (puede asumir, entre otras cosas, que sabemos que $\log(x)$ es cóncava).

Respuesta:

i) El dominio es:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : b_i - \alpha_i^T x > 0, i = 1, \ldots, m\}$$

ii) Notemos primero que la función $b_i - \alpha_i^T x$ es lineal, $\log(x)$ es cóncava (eso lo podemos dar por sabido), luego $\log(b_i - \alpha_i^T x)$ es cóncava y $-\log(b_i - \alpha_i^T x)$ es convexa (es el negativo de una función cóncava). Ahora, f es suma de funciones convexas y, por los resultados estudiados en el curso, eso es convexo.

b) (**2 puntos**) Considere un problema de Optimización de la forma:

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & f(x) \\ s.a. & g_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m \end{array}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$. Suponga que f es una función convexa.

Considerando la información anterior, comente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, y justifique adecuadamente su respuesta: "Si las funciones g_i no son convexas, entonces el problema P) no puede ser convexo".

Respuesta: El teorema visto en clases no excluye la posibilidad de que una función g no convexa sea tal que el conjunto de nivel $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq \alpha\}$ sea convexo. Por ejemplo, puede ser una función cuyo gráfico sea como la función $\log(x)$ en $x > 0$. (Yo no definí el concepto de cuasi-convexidad, la idea es que se les ocurra que puede pasar de todos modos con algunas funciones).

c) (**2 puntos**) Considere el problema

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & f(x) \\ s.a. & x \in D \end{array}$$

donde $D \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto acotado pero no necesariamente cerrado. De un ejemplo de problema de estas características, donde la función f es continua en D, pero que no tiene solución óptima. Puede hacer esto, si quiere, con un dibujo a mano alzada, pero que sea claro.

RESPUESTA: Un ejemplo de esto es $\tan(x)$ en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. El intervalo es un conjunto acotado, pero es abierto y la función es continua en ese intervalo. Sin embargo, no alcanza sus extremos.

d) (**3 puntos**) Responda brevemente las siguientes preguntas.

i) Muestre que $|x-1| \leq 1$ se puede representar usando restricciones lineales.

ii) ¿Se puede representar $|x-1| \geq 1$ usando sólo restricciones lineales? Justifique su respuesta.

iii) Si $|x-1| \geq 1$ pudiese representarse en términos de restricciones lineales, entonces ¿Sería posible transformar un problema de programación lineal con variables binarias a un problema lineal equivalente sin variables binarias? Justifique su respuesta.

RESPUESTA:

i) La equivalencia se obtiene como:

$$\begin{array}{rcl} x-1 \leq 1 & \Leftrightarrow & x \leq 2 \\ -(x-1) \leq 1 & \Leftrightarrow & x \geq 0 \end{array}$$

ii) No, ya que esto equivale a $x \geq 2$ o $x \leq 0$. Para representarlo requeriríamos una variable binaria.

iii) Sí, ya que en ese caso podríamos usar la misma transformación para representar los dos posibles valores de la variable.

Pregunta 2 (15 puntos)

a) (**4 puntos**) Considere la siguiente función:

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} + \alpha x_2^2.$$

donde $\alpha \in \mathbb{Z}$ (entero, incluyendo negativos). Determine el rango de valores de α para los cuales el problema

$$\min_{(x_1,x_2)} f(x_1, x_2)$$

tiene solución óptima. Justifique con precisión por qué es así.

RESPUESTA: Acá hay que evitar que x_1^{α} de valores negativos al evaluarse en $x_1 < 0$, y además podemos elegir $\alpha > 0$. Esto se logra con α de la forma $\alpha = 2k, k = 0, 1, \ldots$. En efecto, si es así, tenemos que para (x_1, x_2) con valores suficientemente grandes, en valor absoluto, tanto el término x_1^{α} como αx_2^2, toman valores arbitrariamente grandes. Esto es lo mismo que decir que $f(x_1, x_2) \to \infty$ cuando $||x_1, x_2|| \to \infty$, y por el teorema de la "hipótesis H", se tiene que el problema alcanza un mínimo.

b) (**4 puntos**) Suponga que en un cierto modelo de optimización, la variable binaria x_i^t se define con valor 1 si se asiste a un espectáculo artístico i, con $i = 1, \ldots, I$, durante el día t, $t = 1, \ldots, T$, y con valor 0 en cualquier otro caso, interprete las siguientes restricciones:

i) $\sum_{i \in C(t)} x_i^t \leq N \ \ \forall t = 1, \ldots, T$, donde $C(t)$ es el conjunto de todos los eventos artísticos (de entre los I) que se realizan durante el día t.

ii) $\sum_{i \in C(t)} x_i^t - \sum_{i \in C(m)} x_i^m \geq 0 \ \ \forall t = 1, \ldots, T;\ m = t+1, \ldots, T$.

iii) $x_i^t + \dfrac{\sum_{m=t}^{t+3} \sum_{j=1}^{I} R_{ij} x_j^m}{Q} \leq 1 \ \ \forall i = 1, \ldots, I;\ t = 1, \ldots, T-3$, donde R_{ij} es un *parámetro* que toma valor 1 cuando los espectáculos i y j poseen algún tipo de incompatibilidad temporal, y toma valor 0 en cualquier otro caso; y Q es un entero no negativo mayor que $I \cdot T$, donde esto último corresponde al número total de espectáculos durante el horizonte temporal.

Respuesta:

i) La restricción impone que no se puede asistir a más de N eventos artísticos cada uno de los T días.

ii) La restricción impone que la cantidad de eventos artísticos a la que se asiste durante un día, debe ser siempre mayor o igual a la cantidad total de eventos artísticos a la que se asistirá durante cada uno de los días siguientes a ese día.

iii) La restricción impone que si se asiste al evento artístico i durante el día t, no se podrá asistir a ninguno de los eventos artísticos incompatibles a ese evento durante éste y los próximos 3 días.

c) (**3 puntos**) Sean $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $i = 1, \ldots, n$ funciones derivables. Considere el siguiente problema de minimización:

$$(P) \quad \begin{array}{l} \text{Min} \ \ \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \\ \text{s.a:} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \ \ \forall i = 1, \ldots, n \end{array}$$

Justifique que el problema (P) admite solución óptima.

Respuesta: Como cada una de las funciones f_i es derivable, entonces cada una de ellas es continua (de hecho, el conjunto de funciones derivables está contenido en el conjunto de funciones continuas). Sabemos que la suma de funciones continuas, entrega una función continua. Luego, el objetivo del problema (P) es una función continua.

Es fácil verificar que el dominio de (P) no es vacío. Basta con encontrar un punto que satisfaga todas las restricciones del problema, por ejemplo, el punto $x_1 = 1$ y $x_i = 0$ para todo $i = 2, \ldots, n$ es un punto factible. Se observa que el espacio es cerrado pues está conformado por restricciones de desigualdad no estricta. Finalmente, es claro que el espacio es acotado, pues se ve que $0 \leq x_i \leq 1$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Entonces, (P) cumplen las condiciones solicitadas por Bolzano para asegurar la existencia de soluciones óptimas.

d) (**4 puntos**) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función continua que satisface:

$$f(x) \leq \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} f(y)dy, \;\; x \in \mathbb{R},\, t > 0.$$

donde se sabe que el máximo es alcanzado en alguno de los extremos del intervalo de integración, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t > 0$. Basándose en esto, pruebe que f es convexa.

RESPUESTA: Digamos que los extremos del intervalo son $a = x - t$ y $b = x + t$. Construyamos la siguiente función que también cumple con la desigualdad anterior:

$$L(x) = \frac{(x-a)f(b) - (x-b)f(a)}{b-a} \leq \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} f(y)dy, \;\; x \in \mathbb{R},\, t > 0.$$

que como se observa es lineal, por lo tanto, convexa.

Ahora, consideremos $G(x) = f(x) - L(x)$, luego, por linealidad de la integral y puesto que tanto f como L verifican la desigualdad, entonces G también la verifica. Luego, G alcanza un máximo en a o b (por enunciado sabemos esto). Pero $G(a) = G(b) = 0$. Luego, se tiene que:

$$G(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq L(x) \;\; \forall\, x \in [a, b]$$

luego, para cualquier $\lambda \in [0, 1]$, tomando $(1 - \lambda)a + \lambda b \in [a, b]$, se tiene que f es convexa.

Pregunta 3 (10 puntos)

Una empresa naviera se dedica al transporte de carga, y para ello cuenta con una flota de S barcos, todos iguales. Cada uno de los barcos posee 3 tipos de compartimientos: A, B y C. Las capacidades de carga de cada compartimiento son de b_i toneladas ($i = A, B, C$).

Por razones técnicas, los compartimientos de cada barco (independientemente por barco) deben ser utilizados en el mismo porcentaje de su capacidad, en términos del peso contenido en cada uno de ellos. A la empresa naviera se le ofrece transportar N cargamentos, donde el peso total del cargamento j es de p_j toneladas, $j = 1, \ldots, N$, y genera una utilidad de q_j US$/tonelada, $j = 1, \ldots, N$. El transporte de un cargamento puede ser fraccionado en diferentes barcos, y no es necesario transportar la totalidad de la carga de cada uno de ellos.

Basándose en la información anterior, construya un modelo de optimización que ayude a la naviera a decidir cómo transportar los cargamentos.

Solución:

◇ Variables:

- x_{ij}^t: toneladas del cargamento i, con $i = 1, \ldots, N$, que son transportadas en el compartimiento j, con $j \in \{A, B, C\}$, del barco s, con $s = 1, \ldots, S$.

◇ Función objetivo:

$$\text{máx} \sum_{s=1}^{S} \sum_{j \in \{A,B,C\}} \sum_{i=1}^{N} q_j x_{ij}^s$$

◇ Restricciones

- Respetar capacidad de carga de cada compartimiento-barco.

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij}^{s} \leq b_i, \ \forall s = 1, \ldots, S; j \in \{A, B, C\}.$$

- No se debe transportar más carga de la que posee cada cargamento.

$$\sum_{s=1}^{S} \sum_{j \in \{A,B,C\}} x_{ij}^{s} \leq p_j, \ \forall i = 1, \ldots, N.$$

- Restricción técnica sobre carga de compartimientos.

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} x_{ij}^{s}}{\sum_{i=1}^{N} x_{ik}^{s}} = \frac{b_j}{b_k}, \ \forall s = 1, \ldots, S; j \in \{A, B, C\}; k \in \{A, B, C\} : j \neq k.$$

que linealmente queda:

$$b_k \sum_{i=1}^{N} x_{ij}^{s} = b_j \sum_{i=1}^{N} x_{ik}^{s}, \ \forall s = 1, \ldots, S; j \in \{A, B, C\}; k \in \{A, B, C\} : j \neq k.$$

- Naturaleza de las variables.

$$x_{ij}^{s} \geq 0, \ \forall s = 1, \ldots, S; i =, \ldots, N; j \in \{A, B, C\}.$$

Pregunta 4 (10 puntos)

En una empresa petrolera, el transporte de crudo (petróleo) desde los pozos petrolíferos hasta las refinerías debe realizarse, en ocasiones, compartiendo el medio de transporte. Este transporte se hace mediante oleoductos. La convención en la industria es que el volumen de crudo se mida en barriles.

En esta oportunidad, se desea transportar crudo desde tres pozos; A y B (que al transportar a la refinería, mezclan sus crudos en un mismo oleoducto) y C (que transporta a la refinería por un oleoducto independiente), donde finalmente todo se mezcla para dar origen a dos productos comerciales X e Y, que se venden en el mercado a 9 y 15 dólares por barril (barril también es la unidad de medida del petróleo). Los costos totales (incluidos los de transporte) desde A, B y C a la refinería son de 6, 16 y 10 dólares, por barril, respectivamente. Uno de los problemas que se debe manejar es que el petróleo contiene azufre, y la ley establece límites a las cantidades que puede haber en los productos finales. Específicamente, el producto X no puede contener más de 2,5 % de azufre y el producto Y no puede contener más de 1,5 % de azufre. Por otro lado, la proporción de azufre en cada uno de los petróleos que vienen de A, B y C es de 3 %, 1 % y 2 %, respectivamente. Adicionalmente a esto, se sabe que las demandas por los productos finales son X e Y son de 100 y 200 millones de barriles, respectivamente, y eso es lo que debe producir la refinería.

Por razones comerciales, las compras de crudo desde los pozos debe ser de a barriles completos, es decir, no se puede comprar medio barril. Considere que no existen limitantes de capacidad en el transporte de crudo desde los pozos a las refinerías.

Establezca un modelo de optimización (eventualmente no-lineal) que permita abastecer la refinería de tal forma de maximizar el "flujo de caja" (diferencia entre los ingresos y costos).

Solución:

◇ Variables:

- X_A: Barriles provenientes del pozo A.
- X_B: Barriles provenientes del pozo B.
- X_C: Barriles provenientes del pozo B.
- X_{ABX}: Mezclas con destino a producir X, mezclando barriles del pozo A y B.
- X_{ABY}: Mezclas con destino a producir Y, mezclando barriles del pozo A y B.
- X_{CX}: Barriles provenientes del pozo C para producir X.
- X_{CY}: Barriles provenientes del pozo C para producir Y.

◇ Función objetivo:

$$\text{máx } 9(X_{ABX} + X_{CX}) + 15(X_{ABY} + X_{CY}) - 6(X_A + 16X_B + 10X_C))$$

◇ Restricciones

- Conservación de masas (flujos).

$$X_A + X_B = X_{ABX} + X_{ABY}$$
$$X_C = X_{CX} + X_{CY}$$

- Restricción sobre el azufre.

$$0{,}03X_AX_{ABX} + 0{,}01X_BX_{ABX} + 0{,}02X_AX_{CX} + 0{,}02XBX_{CX} \leq 0{,}025(X_{ABX} + X_{CX}) \cdot (X_A + X_B)$$
$$0{,}03X_AX_{ABY} + 0{,}01X_BX_{ABY} + 0{,}02X_AX_{CY} + 0{,}02XBX_{CY} \leq 0{,}025(X_{ABY} + X_{CY}) \cdot (X_A + X_B)$$

- Satisfacción de demanda.

$$X_{ABX} + X_{CX} = 100.000.000$$
$$X_{ABY} + X_{CY} = 200.000.000$$

- Naturaleza de las variables.

$$X_A, X_B, X_C \in \mathbb{N}$$
$$X_{ABX}, X_{ABY}, X_{CX}, X_{CY} \geq 0$$

Pregunta 5 (15 puntos)

Una extensión de los problemas de planificación de la producción considera descuentos por volumen. Suponga que una empresa produce un conjunto J de productos a partir de otro conjunto I de materias primas, para un conjunto K de clientes.

Los ingresos de la empresa provienen de la venta de los productos a sus clientes. La demanda del cliente $k \in K$ por el producto $j \in J$ en el periodo $t = 1, \ldots, T$ pertenece al intervalo $[d^t_{jk}, e^t_{jk}]$, donde d^t_{jk} representa la demanda mínima a satisfacer, y e^t_{jk} la demanda máxima del cliente cuando se produce algún tipo de descuento en el precio del producto. La política de precios de la empresa es cobrarle a sus clientes $a_j - \left(\frac{b_j}{q}\right)^{\beta_j}$ unidades monetarias por cada unidad vendida del producto $j \in J$, donde a_j, b_j y β_j son parámetros conocidos y q es la cantidad vendida al cliente ese periodo.

Por otra parte, la empresa incurre, para cada producto terminado $j \in J$, y en cada periodo $t \in 1, \ldots, T$, en un costo de mantención de inventario, que denotamos h_j^t, y en un costo de producción, que denotamos c_j^t.

Se dispone de m_i unidades de la materia prima $i \in I$ al comienzo de cada periodo, y su consumo depende del volumen a producir de cada producto. Se conocen las funciones $g_{ij}(p)$, las cuales establecen cuántas unidades de la materia prima $i \in I$ se consumen debido a la fabricación de una unidad del producto $j \in J$, si la producción en el periodo en consideración es de p unidades.

Establezca un modelo no lineal que determine el plan conjunto de producción y ventas de la empresa en el horizonte de planificación que maximice su utilidad total.

Solución:

◇ Variables:

- X_j^t: unidades producidas del producto $j \in J$ el periodo $t = 1, \ldots, T$.
- I_j^t: inventario del producto $j \in J$ al término del periodo $t = 1, \ldots, T$.
- Y_{jk}^t: unidades vendidas del producto $j \in J$ al cliente $k \in K$ el periodo $t = 1, \ldots, T$.

◇ Función objetivo:

$$\text{máx} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{t=1}^{T} \left(a_j - \left(\frac{b_j}{Y_{jk}^t} \right)^{\beta_j} \right) Y_{jk}^t - \sum_{j \in J} \sum_{t=1}^{T} h_j^t I_j^t - \sum_{j \in J} \sum_{t=1}^{T} c_j^t X_j^t$$

◇ Restricciones

- Balance de inventarios.

$$I_j^t = I_j^{t-1} + X_j^t - \sum_{k \in K} Y_{jk}^t, \ \forall j \in J, \ \forall t = 1, \ldots, T.$$

  Donde los I_j^0 son parámetros del modelo.

- Disponibilidad de materias primas.

$$\sum_{j \in J} g_{ij} \left(X_j^t \right) \leq m_i, \ \forall i \in I, \ \forall t = 1, \ldots, T.$$

- Satisfacción de demanda.

$$d_{jk}^t \leq Y_{jk}^t \leq e_{jk}^t, \ \forall j \in J, \ \forall k \in K, \ \forall t = 1, \ldots, T.$$

- Naturaleza de las variables.

$$X_j^t \geq 0, \ \forall j \in J, \ \forall t = 1, \ldots, T.$$
$$Y_{jk}^t \geq 0, \ \forall j \in J, \ \forall k \in K, \ \forall t = 1, \ldots, T.$$