Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
Ayudante: Ignacio Monardes (iamonardes@uc.cl)
Profesores: Mathias Klapp, Margarita Castro, Gonzalo Pérez, Esteban Salgado

ICS1113 - Optimización
2do semestre del 2023

Tarea 3 ICS1113

Reglas de la tarea:

- La tarea se puede realizar de a pares o de forma individual (las parejas pueden ser de diferentes secciones). En caso de ser de a pares se debe inscribir con su pareja en los grupos de Canvas. En caso de hacerse de a pares y no inscribirse en Canvas conllevará a descuento.
- La tarea parte el día 21/11/2023 a las 00:00 horas y se entrega el día 01/12/2023 a las 23:59 horas.
- Existirá la opción de usar un cupón de atraso solamente una vez entre las tres tareas, dando la posibilidad de entregar hasta 24 horas después de finalizada la entrega. Para poder acceder a este cupón se deben inscribir con el nombre de los integrantes de la tarea en un Google Forms que será habilitado en su debido tiempo y que cierra junto a la fecha oficial de la entrega. En caso de ser de a pares ambos deben tener un cupón disponible y se usará uno por cada uno y tendrán 24 horas extra (no 48).
- Las tareas atrasadas sin cupón no serán corregidas, así que recuerden entregarlas a tiempo.
- Esta tarea se puede hacer de a pares o de manera individual. El desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada par en caso de hacerse de a pares. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo y preparación individual de la interrogación a la que está asociada la tarea. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta escalar a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso.
- Por entregar en LaTeX se darán 3 décimas para la tarea entregada. Estas no son transferibles a otras actividades. **Para subirlo tendrá que enviar un archivo .pdf y un archivo .zip por separado**. El archivo .zip debe corresponder al código de LaTeX. En caso de no entregar en LaTeX basta con subir un archivo .pdf que contenga las respuestas. En ambos casos los .pdf tienen que contener los nombres de los integrantes. El no cumplir con el formato conllevará descuentos por formato.
- El archivo .pdf entregable se puede realizar a mano, tableta o por LaTeX.
- La nota de la tarea queda a lo más con nota 7 en caso de exceder la nota máxima.
- Se abrirá un foro en Canvas donde se responderán las dudas que puedan surgir del enunciado.

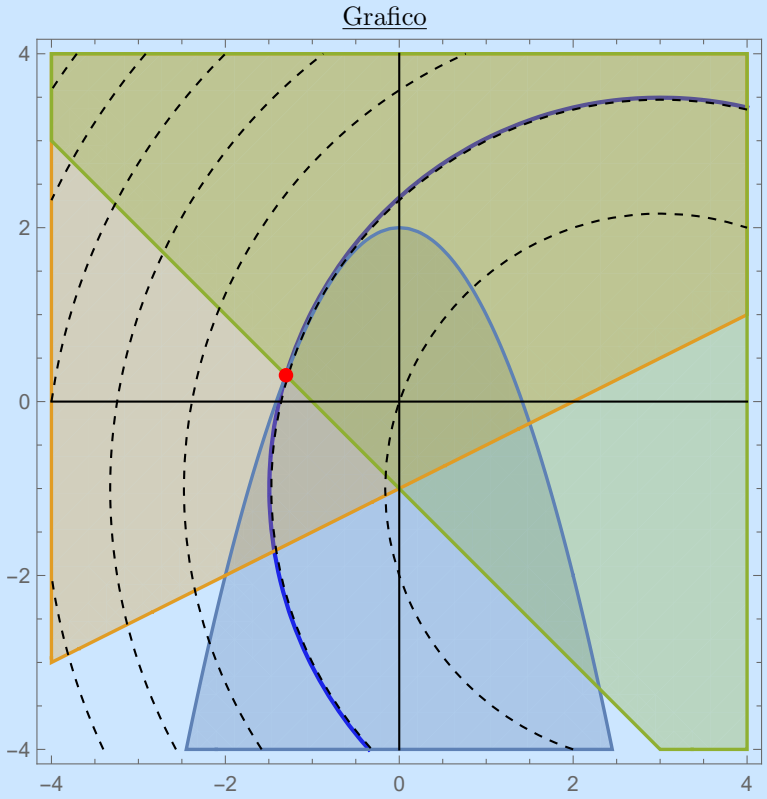
Pregunta 1 **[20 Puntos]**

Considere el siguiente problema de optimización no lineal:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & (x-3)^2 + (y+1)^2 \\ \text{s.a.} \quad & -x^2 - y \geq -2 \\ & x - 2y \leq 2 \\ & x + y \geq -1 \end{aligned}$$

(a) [5 Puntos] Encuentre gráficamente su solución y valor óptimo. Dibuje las curvas de nivel de la función objetivo de tal forma que detallen que su solución es óptima.

Solution: **Corrección:** 3 puntos por el gráfico



Corrección: 2 puntos por el vértice

El punto indicado en rojo es:

$$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\sqrt{13}) \\ \frac{1}{2}(-3+\sqrt{13}) \end{bmatrix}$$

(b) [10 Puntos] Muestre que la solución encontrada cumple las condiciones KKT.

Solution:

Corrección: 2 puntos por reformular

Primero, reformularemos el problema:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -(x-3)^2-(y+1)^2 \\ s.a. \quad & x^2+y-2 \leq 0 \\ & x-2y-2 \leq 0 \\ & -x-y-1 \leq 0 \end{aligned}$$

Corrección: 3 puntos por el Lagrangeano
Escribimos el Lagrangeano asociado:

$$L(x,y,\lambda) = -(x-3)^2-(y+1)+\lambda_1(x^2+y-2)+\lambda_2(x-2y-2)+\lambda_3(-x-y-1)$$

Corrección: 5 puntos: 1 por cada uno de los siguietnes items.
Luego, debemos escribir las restricciones de KKT asociadas:

- $$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \leq 0$$

  Esto se cumple de manera trivial ya que es equivalente a que el punto este dentro del dominio.

- $$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i = 0$$

  Esto nos obliga a que $\lambda_2 = 0$ ya que la segunda restricción no está activa. Las restricciones 1 y 3 están en igualdad por lo que $\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = 0$ y se cumple lo pedido.

- $$\frac{\partial L}{\partial x} = -2(-3+x) + +2\lambda_1 x - \lambda_3 = 0$$

  Podemos despejar a λ_1 respecto a λ_3 y evaluamos en la solución obtenida anteriormente, obteniendo:

  $$\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{13}-\lambda_3}{-1+\sqrt{13}}$$

- $$\frac{\partial L}{\partial y} = -2(1+y)+\lambda_1-\lambda_3 = 0$$

  Nuevamente despejamos λ_1 respecto a λ_3:

  $$\lambda_1 = -1+\sqrt{13}+\lambda_3$$

  E igualando con el resultado anterior:

  $$\lambda_3 = 3-\frac{9}{\sqrt{13}}$$

  Y reevaluando en λ_1:

  $$\lambda_1 = 2+\frac{4}{\sqrt{13}}$$

- $$\lambda_i \geq 0 \;\; i = 1,\ldots,3$$

  Notamos que esto se cumple.

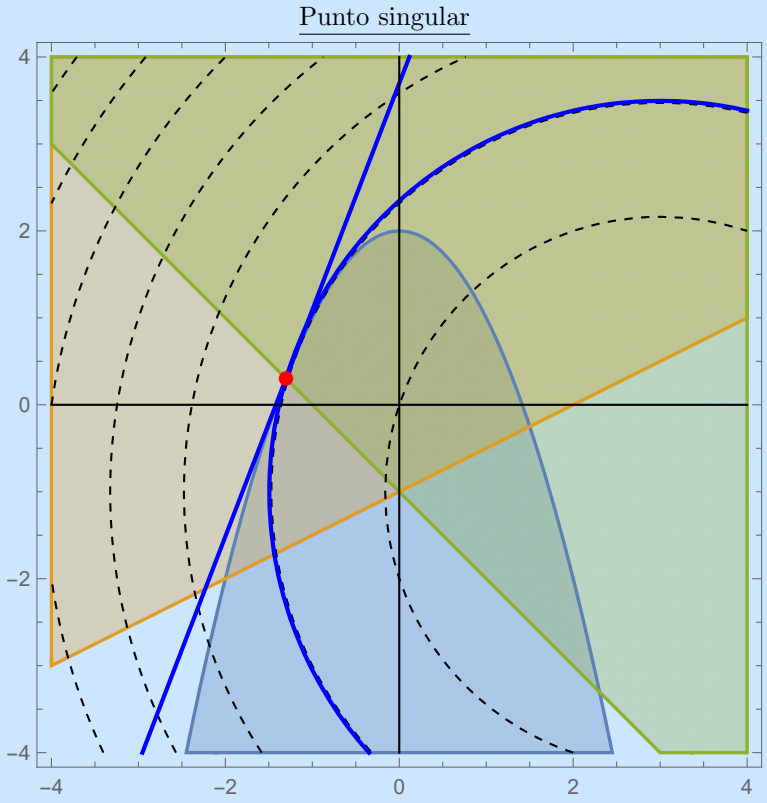
Finalmente, se cumple las condiciones de KKT.

(c) [5 Puntos] Suponga que se agrega la restricción $12x-(1+\sqrt{13})y \geq \beta$ al problema anterior. Encuentre para qué valor de β su solución anterior se convierte en un punto singular. Muestre que es singular.

Solution:

Corrección: 1 punto por el valor de β.

Para que sea singular queremos que la restricción añadida sea linealmente dependiente de las otras restricciones. Podemos notar que si elegimos $\beta = 1 - 5\sqrt{13}$ tenemos que la restricción pasa por el punto que queremos.



Corrección: 3 puntos: 1.5 cada gradiente

Ahora nos falta demostrar que es linealmente dependiente. Para esto analizaremos los gradientes de la restricción añadida (h_4) y la restricción cuadrática (h_1).

$$\nabla h_1(x,y) = \begin{bmatrix} -2x \\ -1 \end{bmatrix}$$

lo evaluamos en el óptimo:

$$\nabla h_1(x^*,y^*) = \begin{bmatrix} -1+\sqrt{13} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Realizamos el mismo procedmiento para h_4.

$$\nabla h_4(x,y) = \begin{bmatrix} 12 \\ -1-\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

Corrección: 1 punto por demostrar que son LD.

Podemos notar que:

$$h_4(x^*,y^*) = (1+\sqrt{13}) \cdot h_1(x^*,y^*)$$

Por lo que las restricciones son Linealmente dependientes y por ende el punto es singular.

Pregunta 2 **[24 Puntos]**

(a) [16 Puntos] Resuelva el siguiente problema de optimización entera mixta aplicando el algoritmo Branch & Bound (B&B) y seleccionando el nodo a resolver por regla BFS. Indique la solución obtenida y el valor objetivo. Dibuje el árbol B&B resultante especificando en cada nodo su valor óptimo relajado, su solución obtenida y si su solución es entera o si es es infactible. Además, en cada ramificación del árbol indique la restricción añadida al problema. Al ramificar en un problema una variable x_k con valor fraccionario x_k^0 , considere que el primer problema hijo agrega la restricción $x_k \leq \lfloor x_k^0 \rfloor$ y que el segundo problema hijo agrega $x_k \geq \lfloor x_k^0 \rfloor + 1$.

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 5x_1 + 4x_2 \\ s.a. \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\ & x_1, x_4 \in \mathbb{Z}_+ \\ & x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

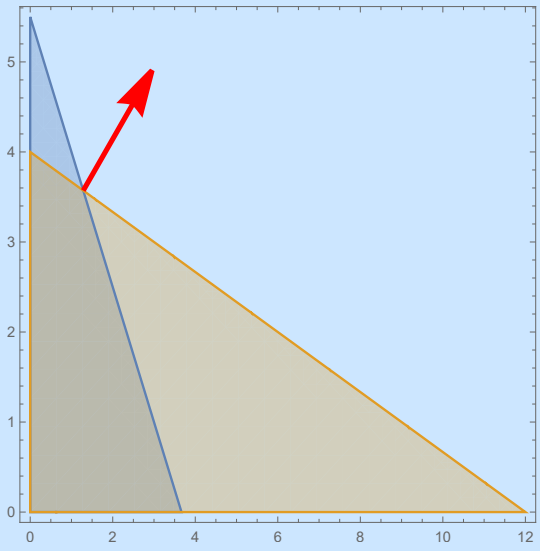
Nota: Se espera desarrollo para resolver cada ramificación del problema.

Solution: Podemos notar que el problema relajado es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 5x_1 + 4x_2 \\ s.a. \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Corrección: 14 puntos: 2 puntos por cada nodo del árbol y por el desarrollo del nodo.

- P_0:



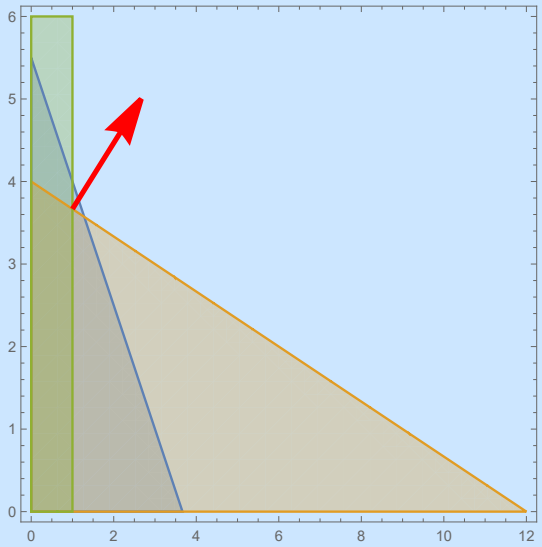
Luego, su solución es:

$$x = (9/7, 25/7, 0, 0)$$

$$z = 20{,}714$$

Tenemos que ramificar ahora mediante restricciones $x_1 \leq 1$ y $x_1 \geq 2$.

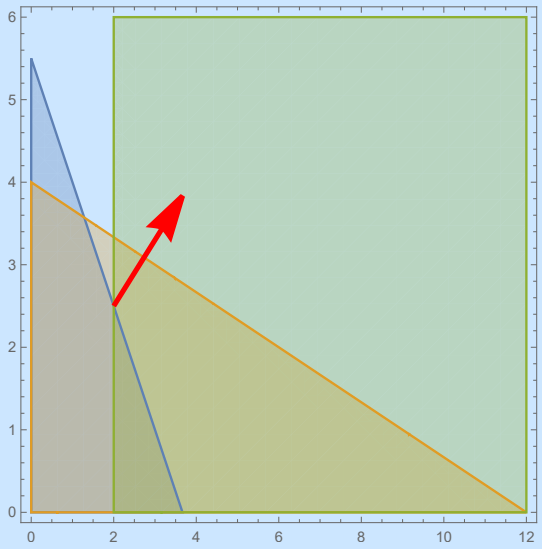
- P_1 Ramificamos mediante $x_1 \leq 1$ y obtenemos:



$$x = (1, 11/3, 0{,}6, 0)$$
$$z = 19{,}6666$$

Notamos que es una solución entera.

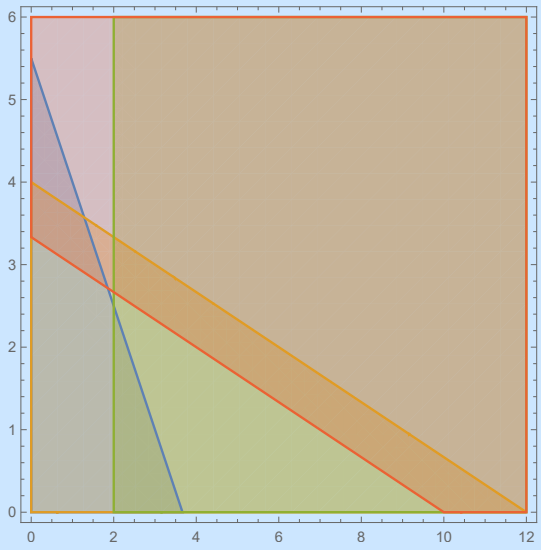
- P_2 Ramificamos mediante $x_1 \geq 2$ y obtenemos:



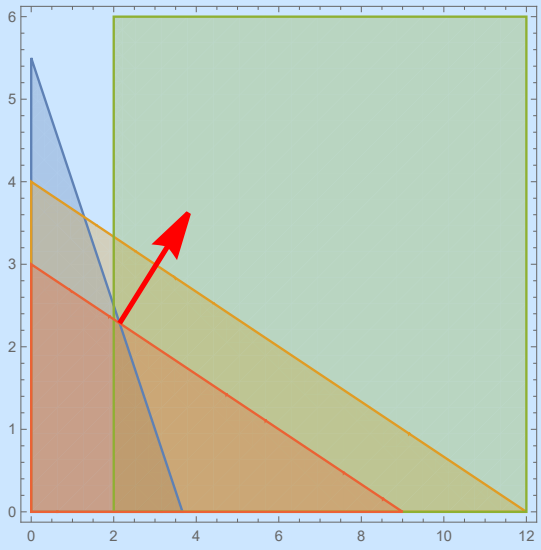
$$x = (2, 5/2, 0, 5/2)$$
$$z = 20$$

Tenemos que seguir ramificando por $x_4 \leq 2$ y $x_4 \geq 3$

- P_3 Ramificamos $x_4 \leq 2$ y obtenemos que el problema es infactible.



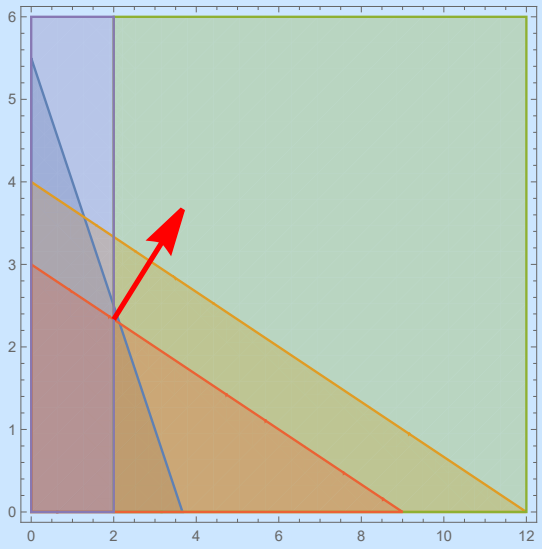
- P_4 Ramificamos $x_4 \geq 3$ y tenemos el siguiente resultado:



$$x = (15/7, 16/7, 0, 3)$$
$$z = 19{,}85714286$$

Tenemos que seguir ramificando por $x_1 \leq 2$ y $x_1 \geq 3$.

- P_5 Ramificamos $x_1 \leq 2$ y obtenemos:

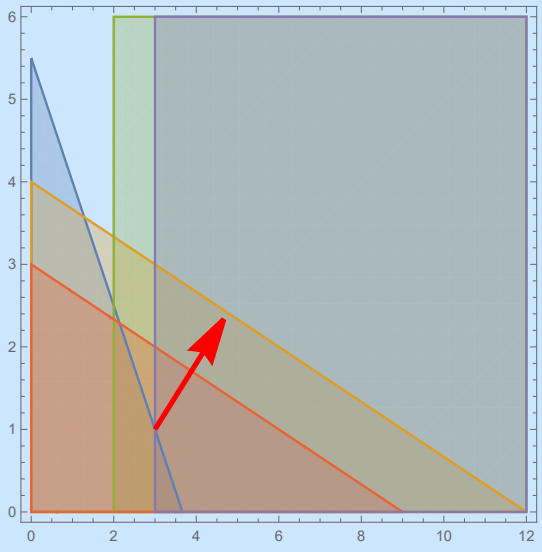


$$x = (2, 7/3, 1/3, 3)$$

$$z = 19{,}3$$

Tenemos una solución entera peor al incumbente y nos detenemos.

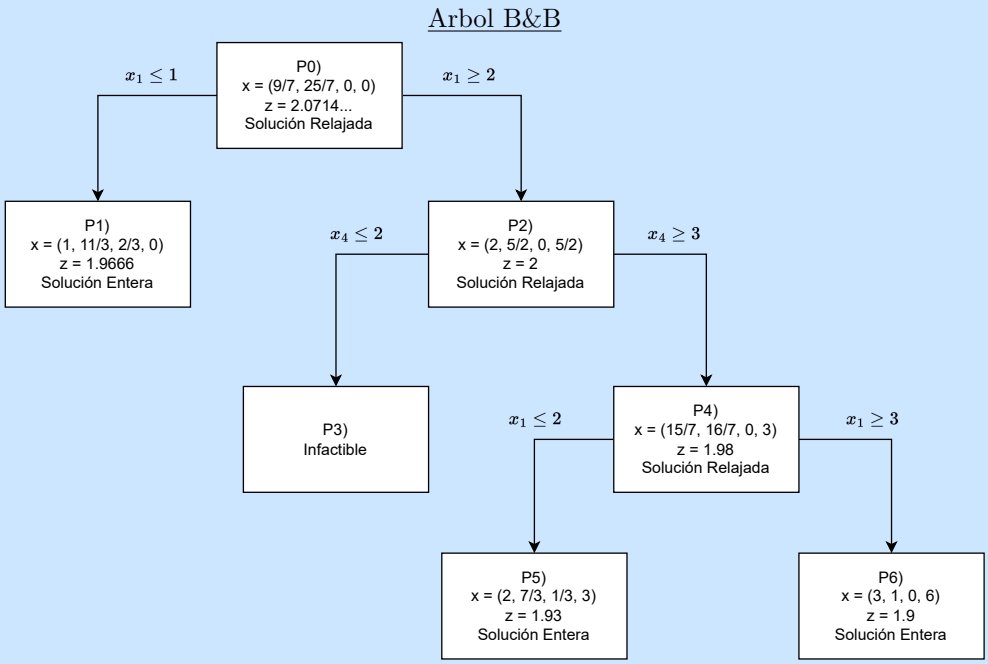
- P_6 Ramificamos $x_1 \geq 3$ y obtenemos:



$$x = (3, 1, 0, 6)$$

$z = 19$

Tenemos solución entera peor al incumbente y se detiene.



Corrección: 1 punto por la solución óptima y 1 punto por el valor óptimo

Finalmente, la solución del problema es: $x = (1,\ 11/3,\ 2/3,\ 0)$ con valor objetivo 19,66666

(b) [3 Puntos] Asuma que estaba corriendo un código para resolver el problema con B&B y se detiene justo después de resolver el quinto subproblema en orden DFS. Determine el incumbente, la cota superior probada hasta el momento y el *gap* de optimalidad.

Solution: **Corrección:** 3 puntos: 1 punto por cada item pedido (incumbente, mejor valor fraccionario y gap.)

El quinto subproblema en este caso es el P_4) por lo que el incumbente es el valor del P_1) con un valor de $z = 19{,}666$ el mejor valor fraccionario es el valor actual con P_4) con $z = 19{,}85714286$.

Finalmente el GAP para maximización es $\frac{valor fraccionario}{incumbente} - 1$ por lo que queda $0{,}9685572\,\%$.

(c) [5 Puntos] Ahora, resuelva el problema inyectando secuencialmente cortes de Gomory en el problema relajado hasta lograr una solución óptima entera.

Solution: Acá se puede dar a entender que se pide el problema entero general o el problema mixto anterior. Ambas respuestas serán consideradas correctas.

Corrección: Esta pregunta tiene muchas opciones válidas y posiblemente correctas, en caso de tener soluciones diferentes se asignaran puntajes correspondientes a la correctitud del problema.

Notación: Definimos como B los elementos de la base y como N los elementos que no están en la base. Definimos también $\bar{R} = A_B^{-1} A_N$ donde A_B y A_N son las columnas de los elementos básicos y no básicos respectivamente. También definimos $\bar{b} = A_B^{-1} b$.

Un corte de Gomory se define de la siguiente manera:

$$\sum_{j \in N} (\bar{R}_{k,j} - \lfloor \bar{R}_{k,j} \rfloor)(x_N)_j \geq (\bar{b}_k - \lfloor \bar{b}_k \rfloor)$$

donde b_k es un elemento de la base que es fraccionario y tiene la restricción de ser entero.

Solución del problema mixto: Para este problema se considerarán las primeras dos iteraciones que generan 3 cortes de gomory ya que es más extenso el desarrollo.

Corrección: 1 punto cada restricción añadida. 0.5 cada base y 0.5 puntos cada no base.

Para nuestro problema tendremos que:

$$B = \{x_1, x_2\}, \quad N = \{x_3, x_4\}$$

$$A_B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 3/7 & -2/7 \\ -1/7 & 3/7 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 9/7 \\ 25/7 \end{bmatrix}$$

Luego, el corte es:

$$\begin{aligned} (3/7 - 0)x_3 + (-2/7 - (-1))x_4 &\geq (9/7 - 1) \\ 3x_3 + 5x_4 &\geq 2 \end{aligned}$$

El nuevo subproblema es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 5x_1 + 4x_2 \\ s.a. \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\ & 3x_3 + 5x_4 - h_3 = 2 \\ & x, h \geq 0 \end{aligned}$$

Tiene base $B = \{x_1, x_2, x_4\}$ y $N = \{x_3, h_3\}$:

$$A_B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \; A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 3/5 & -2/35 \\ -2/5 & 3/35 \\ 3/5 & -1/5 \end{bmatrix}, \; \bar{b} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 17/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

Notamos que tanto x_1 como x_4 deben ser enteros por lo que añadimos las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} (3/5 - 0)x_3 + (-2/35 - (-1))h_3 &\geq 7/5 - 1 \\ 21x_3 + 33h_3 &\geq 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3/5 - 0)x_3 + (-1/5 - (-1))h_3 &\geq 2/5 - 0 \\ 3x_3 + 4h_3 &\geq 2 \end{aligned}$$

Finalmente, el problema se reduce a:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 5x_1 + 4x_2 \\ s.a. \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\ & 3x_3 + 5x_4 - h_3 = 2 \\ & 21x_3 + 33h_3 - h_4 = 14 \\ & 3x_3 + 4h_3 - h_5 = 2 \\ & x, h \geq 0 \end{aligned}$$

Solución problema entero:

Corrección: 1 punto cada corte. 0.5 puntos cada base y 0.5 puntos cada no base.

Corrección: En caso de tener una solución diferente y correcta dar puntaje completo.

- Iremos resolviendo inyectando continuamente cortes: Para nuestro problema tendremos que:

$$B = \{x_1, x_2\}, \quad N = \{x_3, x_4\}$$

$$A_B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 3/7 & -2/7 \\ -1/7 & 3/7 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 9/7 \\ 25/7 \end{bmatrix}$$

Luego, el corte es:

$$\begin{aligned} (3/7 - 0)x_3 + (-2/7 - (-1))x_4 &\geq (9/7 - 1) \\ 3x_3 + 5x_4 &\geq 2 \end{aligned}$$

Usamos el hecho de que $x_3 = 11 - 2x_2 - 3x_1$ y de que $x_4 = 12 - 3x_2 - x_1$ y el corte generado se transforma a:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 13$$

- Luego, el problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 5x_1 + 4x_2 \\ s.a. \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\ & 2x_1 + 3x_2 + h_3 = 13 \\ & x, h \geq 0 \end{aligned}$$

La base es $B = \{x_1, x_2, x_4\}$ y la no base es $N = \{x_3, h_3\}$

$$R = \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ -2/5 & 3/5 \\ 3/5 & -7/5 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 17/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

Añadimos el siguiente corte:

$$\begin{aligned} (3/5 - 0)x_3 + (-7/5 + 2)h_3 &\geq 2/5 - 0 \\ 3x_3 + 3h_3 &\geq 2 \end{aligned}$$

Reemplazamos $x_3 = 11 - 2x_2 - 3x_1$ y $h_3 = 13 - 3x_2 - 2x_1$. Obteniendo $3x_2 + 3x_1 \leq 14$

- Tenemos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 5x_1 + 4x_2 \\ s.a. \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\ & 2x_1 + 3x_2 + h_3 = 13 \\ & 3x_1 + 3x_2 + h_4 = 14 \\ & x, h \geq 0 \end{aligned}$$

Tenemos $B = \{x_1, x_2, x_4, h_1\}$ y $N = \{x_3, h_2\}$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 \\ -1 & 1 \\ 2 & -7/3 \\ 1 & -5/3 \end{bmatrix}$$

Luego, el corte es:

$$\begin{aligned} (1-1)x_1 + (-2/3+1)h_2 &\geq 5/3 - 1 \\ 1/3h_2 &\geq 2/3 \\ h_2 &\geq 2 \end{aligned}$$

Notamos que al inyectar este corte al problema se obtiene:

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Por lo que la solución es entera.

Pregunta 3 **[16 Puntos]**

Para cada una de las siguientes afirmaciones, determine si es verdadera o falsa. Justifique cada caso de forma adecuada.

(a) Si el problema mín$\{f(x) : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}_+\}$ es factible y acotado, entonces el óptimo se encuentra en un vértice de la envoltura convexa del dominio.

Solution: Falso: Se puede usar una función no lineal que no lo cumpla.
Un contrajemeplo es el siguiente problema:

$$\text{mín}\{(x-3)^2 + (y-3)^2 : -x \leq 0, -y \leq 0, x \leq 5, y \leq 5\}$$

Claramente el óptimo se encuentra en $x = 3,\ y = 3$ que no es un vértice de la envoltura convexa.
Corrección: 3 puntos

(b) Sea P) el problema mín$\{f(x) : Ax \leq b\}$ factible y acotado. Si la función objetivo $f(x)$ es una función estrictamente cóncava, entonces el valor óptimo de P) se alcanza en uno de los vértices del dominio.

Solution: Verdadero: Por contradicción asumamos que x^* es la solución óptima y que no es un vértice.
Como x^* es óptimo tenemos que:

$$f(x^*) \leq f(y) \ \ \forall y : Ay \leq b$$

Y como x^* no es un vértice, entonces es una combinación lineal de dos puntos del poliedro y^1, y^2:

$$x^* = \alpha_1 y^1 + \alpha_2 y^2$$

Donde $\alpha_i \in (0,1)$ y $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.
Luego, usando la concavidad estricta tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(x^*) &= f(\alpha_1 y^1 + \alpha_2 y^2) \\ &> \alpha_1 f(y^1) + \alpha_2 f(y^2) \\ &\geq \alpha_1 \,\text{mín}\{f(y^1), f(y^2)\} + \alpha_2 \,\text{mín}\{f(y^1), f(y^2)\} \\ \text{(usando } \alpha_1 + \alpha_2 = 1) &= \text{mín}\{f(y^1), f(y^2)\} \end{aligned}$$

y por ende $f(x^*) > \text{mín}\{f(y^1), f(y^2)\}$ por lo que $f(x^*)$ no es óptimo y se genera la contradicción.
Corrección: 5 puntos

(c) Sea P) un problema de minimización no lineal con restricciones de desigualdad y sea x^* su solución. Si una restricción es inactiva en el óptimo, entonces el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción tendrá valor de 0, y si está en igualdad, el coeficiente de Lagrange tomará un valor distinto de 0.

Solution: Falso: Si una restricción se cumple en igualdad entonces el coeficiente de Lagrange asociado puede tener el valor de 0 en el caso degenerado.
Corrección: 2 puntos

(d) Si un dominio es no acotado entonces la envoltura convexa del dominio es no acotado.

Solution: Falso: Podemos usar de contraejemplo el siguiente dominio.

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : 1/3 \leq x \leq 2/3\}$$

Notamos que el dominio del problema es no acotado ya que y es no acotado. Sin embargo, su envoltura convexa no contiene ningún punto ya que x nunca puede ser entero.

Corrección: 3 puntos

(e) En un problema de optimización con restricciones de desigualdad, si una solución es singular entonces no pueden cumplirse las restricciones de KKT.

Solution: Falso: Se puede tener puntos singulares tales que cumplan las condiciones de KKT como el punto singular del problema 1.c.

Corrección: 3 puntos