PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2021 - 1
Profesores: G. Angulo - R. Cuadrado
J. González - S. Vásquez
F. Verástegui

Examen

Duración: 150 minutos.

INSTRUCCIONES:

- ◇ *La prueba contiene 60 puntos.*
- ◇ *La prueba es sin apuntes y sin equipos electrónicos. Dichos equipos deben estar siempre apagados.*

Pregunta 1 (10 puntos)

Considere el siguiente problema, basado en hechos de la vida real. Un operador logístico que trabaja en el aeropuerto de Santiago debe trasladar a un conjunto $P = \{1, \ldots, n\}$ de pasajeros a sus hogares. Para ello, posee un conjunto K de vehículos con velocidad de circulación constante e igual a $v_k > 0$. El operador logístico cuenta con una asignación definida, donde, para cada vehículo $k \in K$, usted conoce el subconjunto de pasajeros P_k que se irán en él, de forma tal que $P_{k_1} \cap P_{k_2} = \emptyset$ para todo par de vehículos $k_1, k_2 \in K$, y $\cup_{k \in K} P_k = P$.

Suponga que un nuevo pasajero $n+1$ solicita el servicio. En ese instante, el operador debe actualizar su decisión inicial, indicándole al nuevo pasajero en qué vehículo irse, y definir cuáles serán las rutas de cada vehículo, sin modificar la asignación inicial de los primeros n pasajeros, dada por los conjuntos $P_k, k \in K$. Luego, todos los vehículos comienzan sus respectivas rutas al mismo tiempo (digamos, un instante 0). Sea $N = P \cup \{0, n+1\}$, donde el elemento 0 representa al aeropuerto y el elemento $n+1$ al nuevo pasajero. Sea $d_{ij} > 0$ la distancia entre los hogares de los pasajeros $i, j \in N$. Para $i = 0$ ó $j = 0$, se considera la distancia entre el aeropuerto y el hogar del pasajero correspondiente. Adicionalmente, se asume que, cuando un vehículo llega al hogar de un pasajero, este se baja instantáneamente.

Para resolver este problema, el operador utiliza el siguiente modelo de optimización entero–mixto:

$$\text{mín} \quad \sum_{k\in K}\sum_{i\in N} t_i^k \tag{1}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j\in N: i\neq j} x_{ij}^k = \sum_{j\in N: i\neq j} x_{ji}^k \qquad i\in N,\ k\in K \tag{2}$$

$$y_i^k = \sum_{j\in N: i\neq j} x_{ij}^k \qquad i\in N,\ k\in K \tag{3}$$

$$y_i^k = 1 \qquad i\in P_k,\ k\in K \tag{4}$$

$$\sum_{k\in K} y_{n+1}^k = 1 \tag{5}$$

$$t_j^k \geq t_i^k + \frac{d_{ij}}{v_k} - M_1\cdot(1-x_{ij}^k) \qquad i,j\in N: i\neq j,\ j\neq 0,\ k\in K,\ (M_1 \gg 0) \tag{6}$$

$$t_0^k = 0 \qquad k\in K \tag{7}$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\} \qquad i,j\in N: i\neq j,\ k\in K \tag{8}$$

$$t_i^k \geq 0 \qquad i\in N,\ k\in K \tag{9}$$

$$y_i^k \in \{0,1\} \qquad i\in N,\ k\in K \tag{10}$$

donde $x_{ij}^k \in \{0,1\}$ toma valor 1 si y sólo si el vehículo $k\in K$ lleva al pasajero $j\in N$ a su hogar, justo después de llevar a $i\in N$, $i\neq j$, y $t_i^k \geq 0$ representa el instante en que el vehículo $k\in K$ parte del hogar del pasajero $i\in N$, si es que lo visita. Este modelo será parte de una herramienta más grande, en la cual el valor óptimo de las variables t_i^k se puede utilizar para poder aplicar medidas que mejoren el nivel del servicio entregado.

(a) **(6 puntos)** Explique el modelo propuesto, explicitando qué representa la función objetivo, cada restricción y las variables y_i^k.

Tiempo después de haber actualizado la herramienta, y con la confianza de haber obtenido resultados positivos, al operador se le consulta si es que tiene sentido que, cada vez que se asigne un nuevo pasajero a un vehículo, se mantengan los subconjuntos de pasajeros P_k fijos para cada vehículo $k\in K$. Para evaluar esto, le proponen desarrollar una herramienta que, además de asignar al nuevo pasajero a un vehículo y definir su ruta, determine una potencial re–asignación del resto de los pasajeros entre los vehículos. Con el fin de que este proceso sea razonable, se le entrega como información un parámetro $l_{ir}\in\{0,1\}$ que toma valor 1 si y sólo si el pasajero $i\in N: i\neq 0$ vive en la comuna $r\in R$.

Con lo anterior, se le exige como condiciones adicionales que **(i)** la cantidad de comunas en las cuales se detiene un vehículo no puede superar $\gamma > 0$, y **(ii)** que la distancia entre los hogares más alejados visitados por un mismo vehículo sea, a lo más, $\delta > 0$.

(b) **(4 puntos)** Explique qué restricciones añadiría al modelo, utilizando las siguientes variables:

- $z_r^k \in \{0,1\}$: toma valor 1 si y sólo si el vehículo $k\in K$ se detiene en la comuna $r\in R$,
- $w_{ij}^k \in \{0,1\}$: toma valor 1 si y sólo si el vehículo $k\in K$ se detiene en el hogar del pasajero $i\in N: i\neq 0$ y en el del pasajero $j\in N: j\neq 0,\ i\neq j$.

Solución:

(a)
- La función objetivo (1) busca minimizar la suma de los instantes de llagada (o partida) a cada hogar, para todos los vehículos.

- ◇ El bloque de restricciones (2) indica que, si un vehículo k llega al hogar del pasajero j, debe ser el mismo vehículo el que salga de dicho hogar, *i. e.*, cada vehículo k debe realizar un tour que cubra los hogares de los pasajeros P_k, excepto el vehículo que, adicionalmente, cubrirá el hogar del pasajero $n+1$.
- ◇ El bloque de restricciones (3) definen la variable y_i^k como una binaria que toma valor 1 si y sólo si el vehículo k se retira del hogar del pasajero j, *i. e.*, lo visita.
- ◇ La restricción (4) define la asignación inicial dada por los conjuntos P_k, para cada $k \in K$.
- ◇ El bloque de restricciones (5) fuerza a que el pasajero $n+1$ sea asignado a alguno de los vehículos en K.
- ◇ El bloque de restricciones (6) fuerza a que, si el vehículo k visita el hogar del pasajero j justo después de visitar el del pasajero i (*i.e.*, $x_{ij}^k = 1$), entonces el instante en que se visita el hogar de j (t_j^k) sea, al menos, la suma del instante en que se retira del hogar del pasajero i y el tiempo de viaje entre el hogar del pasajero i y el del pasajero j. En otro caso (*i.e.*, $x_{ij}^k = 0$), la restricción en cuestión no restringe los valores de t_j^k.
- ◇ El bloque de restricciones (7) fuerza a que el tiempo de salida del aeropuerto, es decir, el tiempo en que comienzan todas las rutas, sea un instante 0 equivalente para todos los vehículos.
- ◇ Finalmente, (8)–(10) definen la naturaleza de las variables.

(b) Se modela la variable $z_r^k \in \{0,1\}$, la cual toma valor 1 si y sólo si el vehículo $k \in K$ debe detenerse en la comuna $r \in R$. Esto se logra a través de los bloques de restricciones

$$\begin{aligned} z_r^k &\geq l_{ir} \cdot y_i^k && i \in N,\ k \in K, \\ z_r^k &\leq \sum_{i \in N} l_{ir} \cdot y_i^k && r \in R,\ k \in K \end{aligned} \qquad (\star)$$

Nota: Para efectos prácticos, puede no considerarse $(\star)$, pues no es completamente necesaria.

Luego, la condición adicional **(i)** se cumple agregando el bloque de restricciones

$$\sum_{r \in R} z_r^k \leq \gamma \qquad k \in K.$$

También, se modela la variable $w_{ij}^k \in \{0,1\}$, la cual toma valor 1 si y sólo si los pasajeros $i, j \in N \setminus \{0\}$ se van juntos en el vehículo $k \in K$. Esto se logra a través de los bloques de restricciones

$$\begin{aligned} w_{ij}^k &\leq y_i^k && i,j \in N \setminus \{0\},\ k \in K, \\ w_{ij}^k &\leq y_j^k && i,j \in N \setminus \{0\},\ k \in K, \\ w_{ij}^k &\geq y_i^k + y_j^k - 1 && i,j \in N \setminus \{0\},\ k \in K. \end{aligned}$$

Finalmente, para satisfacer la condición adicional **(ii)**, se debe agregar el bloque de restricciones

$$d_{ij} \cdot w_{ij}^k \leq \delta \qquad i,j \in N \setminus \{0\},\ k \in K.$$

Pregunta 2 (10 puntos)

Sea $G = (N, A)$ un grafo, con N el conjunto de nodos, A el conjunto de arcos y u_{ij} como la capacidad máxima del arco (i, j). A su vez se le indica que el conjunto I posee a todos los nodos de oferta y en el conjunto F a los nodos de demanda de la red. Considere que existe un conjunto de nodos intermedios con oferta igual a cero que interconectan a los nodos de oferta con los de demanda.

(a) **(5 puntos)** Plantee un modelo de optimización que permita mediante el algoritmo de simplex especializado en redes, resolver el problema de flujo máximo anteriormente descrito, en donde lo que se busca resolver es encontrar la capacidad máxima de flujo que se puede enviar de manera agregada desde los nodos de oferta hacia los nodos de demanda.

(b) **(5 puntos)** Asuma que del resultado del modelo anterior determina que la capacidad máxima del grafo es de M unidades de flujo que llegarán desde los nodos de oferta hacia los nodos de demanda. A partir de esta información, y considerando a c_{ij} como el costo unitario de envio de flujo por el arco (i, j) determine qué cambios debería realizarle a su grafo para determinar la solución que permita enviar dicho flujo al menor costo posible. Puede agregar los nodos y arcos que requiera.

Solución:

(a) Se deben agregar para cada combinación de nodos de demanda y oferta, un arco que los una con costo unitario de flujo igual a -1 y capacidad máxima del arco igual a infinita. Para el resto de los arcos de la red original se fija un costo cero unitario.

Se define en R como el conjunto de arcos artificiales creados, luego el modelo a resolver es el siguiente:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & \sum_{(i,j)\in R} -1 * X_{i,j} & \\ s.a. & \sum_k X_{i,k} - \sum_k X_{k,i} = 0 & \forall i \in N \\ & 0 \leq X_{i,j} \leq u_{ij} & \forall (i,j) \in A \\ & 0 \leq X_{i,j} & \forall (i,j) \in R \end{array}$$

(b) Ahora lo que se debe realizar, es generar un nodo de oferta auxiliar que conecte con un arco a costo 0 hacia cada uno de los nodos de oferta, con oferta igual a M. Los nodos de oferta original cambian su oferta a 0. Adicionalmente se debe crear un nodo de demanda auxiliar, que conecte con un arco desde los nodos de demanda originales hacia el nodo de demanda auxiliar, con demanda igual a $-M$. Los nodos de demanda original cambian a demanda 0.

El modelo a resolver es simplemente ahora el problema de flujo a costo mínimo de la red modificada, en donde la solución óptima corresponderán a los flujos de los arcos del grafo original.

Pregunta 3 (10 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización lineal entera mixta:

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & -3x_1 - 2x_2 + 10 \\
\text{s.a.} \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 = \frac{5}{2} \\
& 2x_1 + x_2 + x_4 = \frac{3}{2} \\
& x_i \geq 0 \qquad\qquad i \in \{1,2,3,4\} \\
& x_k \in \mathbb{Z} \qquad\qquad k \in \{2,3\}
\end{aligned}
$$

(a) **(8 puntos)** Usando el algoritmo de Branch & Bound, encuentre la solución óptima y el valor óptimo de el nodo raíz y de los dos subproblemas que nacen de la ramificación de dicho nodo. Para esto, puede utilizar el método gráfico.

(b) **(1 punto)** Explique brevemente si con lo ya analizado puede obtener una cota inferior para la función objetivo del problema, y cuál sería dicha cota.

(c) **(1 punto)** Explique brevemente si con lo ya analizado puede conocer la solución óptima al problema, y bajo qué argumentos.

Solución:

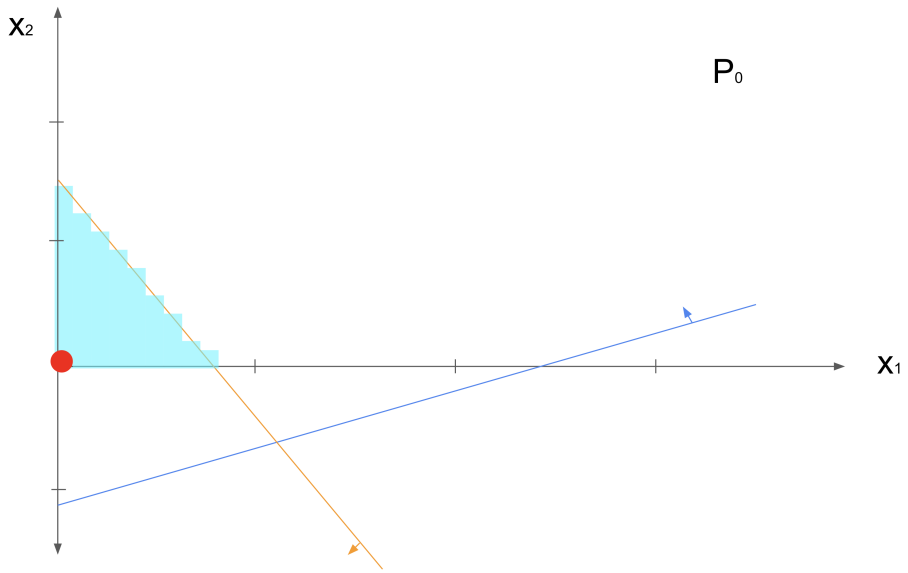
(a) Primero, resolvemos la relajación lineal del problema entregado, que denominaremos P_0.

$$
\begin{aligned}
(P_0) \quad \text{máx} \quad & -3x_1 - 2x_2 + 10 \\
\text{s.a.} \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 = \frac{5}{2} \\
& 2x_1 + x_2 + x_4 = \frac{3}{2} \\
& x_i \geq 0 \qquad\qquad i \in \{1,2,3,4\}
\end{aligned}
$$

Para resolver (P_0), notemos que este puede ser reformulado como un problema equivalente lineal y continuo en 2D con restricciones de desigualdad, reinterpretando a x_3 y x_4 como variables de holgura, de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\sim \quad \text{máx} \quad & -3x_1 - 2x_2 + 10 \\
\text{s.a.} \quad & x_1 - 2x_2 \leq \frac{5}{2} \\
& 2x_1 + x_2 \leq \frac{3}{2} \\
& x_i \geq 0 \qquad\qquad i \in \{1,2\}
\end{aligned}
$$

Gráficamente:



Podemos ver que la función objetivo alcanza su mayor valor en el origen, i.e., en el punto $x^* = \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$. Para dicho punto, las holguras toman los valores del vector de lado derecho, i.e., $x_3 = \frac{5}{2}$ y $x_4 = \frac{3}{2}$. Lo anterior implica que la solución óptima de P_0 viola la restricción de integralidad sobre x_3, por lo que debemos generar dos sub-problemas nuevos:

- ⋄ Primero, generamos P_1 incorporando la restricción $x_3 \leq 2$:

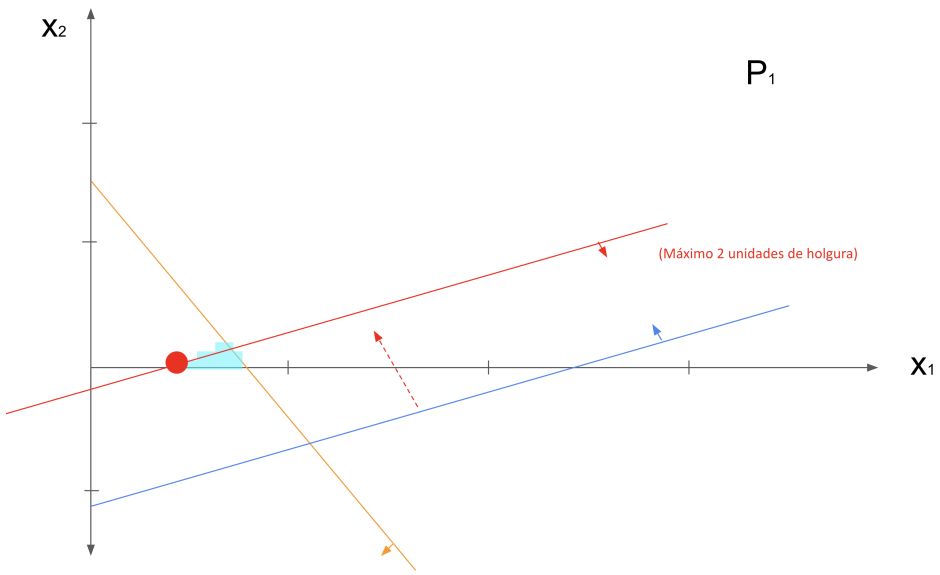
Se tiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
(P_1) \quad \text{máx} \quad & -3x_1 - 2x_2 + 10 \\
\text{s.a.} \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 = \frac{5}{2} \\
& 2x_1 + x_2 + x_4 = \frac{3}{2} \\
& x_3 \leq 2 \\
& x_i \geq 0 \qquad\qquad i \in \{1, 2, 3, 4\}
\end{aligned}
$$

Esto implica a pedir una solución cuya holgura sobre la restricción asociada a x_3 sea a lo más de dos unidades. Esto lo podeemos reescribir equivalentemente en dos dimensiones como:

$$
\begin{aligned}
\sim \quad \text{máx} \quad & -3x_1 - 2x_2 + 10 \\
\text{s.a.} \quad & x_1 - 2x_2 \leq \frac{5}{2} \\
& x_1 - 2x_2 \geq \frac{1}{2} \\
& 2x_1 + x_2 \leq \frac{3}{2} \\
& x_i \geq 0 \qquad\qquad i \in \{1, 2\}
\end{aligned}
$$

Gráficamente:



La solución de $\hat{P}_1$ corresponde al punto $x_1 = 1/2$, $x_2 = 0$. Con esto, $x_3 = 2$ y $x_4 = 1/2$. Este punto cumple las restricciones de integralidad sobre x_2 y x_3, y por lo tanto esta solución es incumbente para el problema original, con valor objetivo igual a 8.5.

- ◇ Ahora generamos P_2 incorporando la restricción $x_3 \geq 3$:

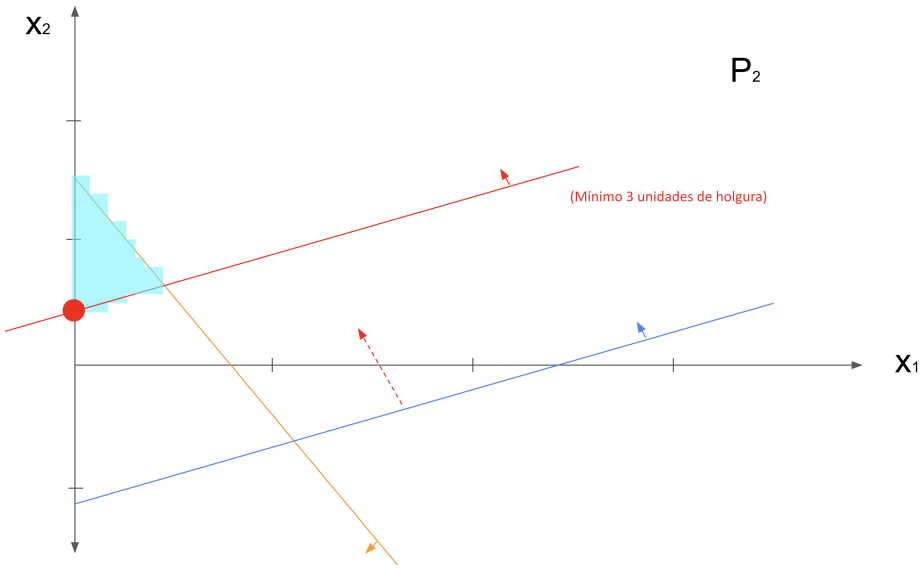
Se tiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
(P_2) \quad \text{máx} \quad & -3x_1 - 2x_2 + 10 \\
\text{s.a.} \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 = \frac{5}{2} \\
& 2x_1 + x_2 + x_4 = \frac{3}{2} \\
& x_3 \geq 3 \\
& x_i \geq 0 \qquad\qquad i \in \{1, 2, 3, 4\}
\end{aligned}
$$

Esto implica a pedir una solución cuya holgura sobre la restricción asociada a x_3 sea a lo menos de tres unidades. Esto lo podemos reescribir de forma equivalente en dos dimensiones como:

$$
\begin{aligned}
\sim \quad \text{máx} \quad & -3x_1 - 2x_2 + 10 \\
\text{s.a.} \quad & x_1 - 2x_2 \leq \frac{5}{2} \\
& x_1 - 2x_2 \leq \frac{-1}{2} \\
& 2x_1 + x_2 \leq \frac{3}{2} \\
& x_i \geq 0 \qquad\qquad i \in \{1, 2\}
\end{aligned}
$$

Gráficamente:



La solución de $\hat{P}_2$ corresponde al punto $x_1 = 0$, $x_2 = 1/4$. Con esto, $x_3 = 3$ y $x_4 = 5/4$. Este punto viola la restricción de integralidad sobre x_2 y su valor objetivo es igual a 9.5. Dado que $9.5 \geq 8.5$, deberíamos volver a ramificar en este punto sobre P_2, generando dos nuevos subproblemas P_3 y P_4.

Nota: Si se alcanzan las soluciones óptimas indicadas para cada subproblema utilizando un método distinto al método gráfico, también se considerará correcta la respuesta.

(b) Si podemos definir una cota inferior para la función objetivo. La solución de $\hat{P}_1$, correspondiente al punto $x_1 = 1/2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ y $x_4 = 1/2$, es incumbente para el problema original, ya que cumple todas las restricciones de integralidad. Luego, su valor objetivo, $v^* = 8.5$, es cota inferior para la solución óptima del problema analizado.

(c) No podemos estar seguros de que tenemos la solución óptima al problema analizado. Hasta este punto del algoritmo, se tiene una cota inferior, o LB, de 8.5, y una cota superior, o UB, de 9.5, por lo que el gap de optimalidad es mayor a cero, y por lo tanto, se necesita seguir iterando para encontrar una solución mejor a la encontrada (incrementar LB), o bien, para obtener un certificado de optimalidad que permita validar la optimalidad de la solución a mano (disminuir UB).

Pregunta 4 (10 puntos)

Sea el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & (x+3)^2+(y+1)^2 \\ s.a. & x^2+y^2 \leq 4 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

(a) **(3 puntos)** Encuentre gráficamente la solución óptima del problema.

(b) **(5 puntos)** Compruebe matemáticamente que el punto encontrado cumple con las condiciones de KKT. Muestre además en el gráfico este hecho.

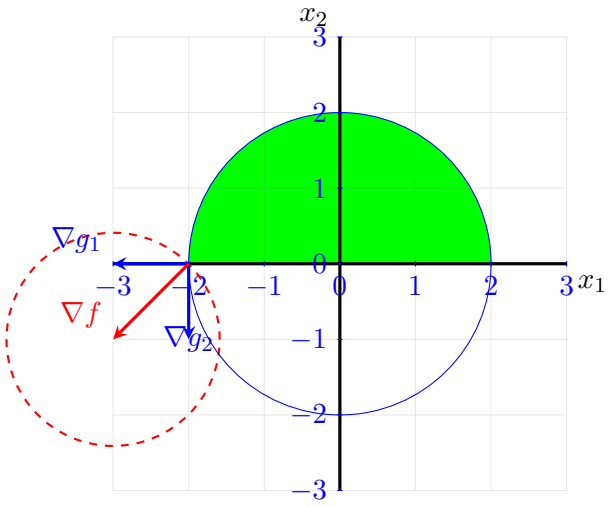
(c) **(2 puntos)** Suponga que se agrega la siguiente restricción al problema:

$$x^2+(y-1)^2 \geq \alpha$$

Determine si existe un valor de α para que exista algún punto singular dentro del dominio. Justifique.

Solución:

(a) El gráfico es el siguiente:



Se puede observar que el punto (-2,0) es la solución óptima del problema.

(b) Se muestra en el gráfico el vector $-\nabla f(x)$ en el cono generado por los vectores gradientes de las restricciones.

Para que se cumplan las condiciones de KKT en el punto (-2, 0), necesitamos encontrar $\mu_1 \geq 0$ y $\mu_2 \geq 0$ que cumplan lo siguiente:

$$\mu_1 \nabla g_1(x) + \mu_2 \nabla g_2(x) = -\nabla f(x)$$
$$\mu_i (g_i(x) - b_i) = 0 \qquad i = 1, 2$$

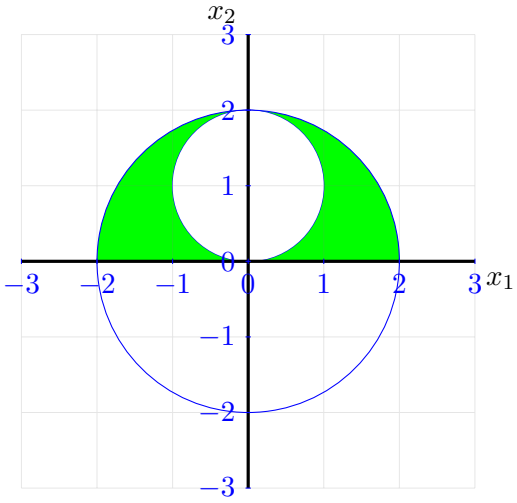
En el punto (-2,0) tenemos lo siguiente:

$$\mu_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mu_1(x^2 + y^2 - 4) = 0$$
$$\mu_2(-y) = 0$$

Por lo tanto, cuando $\mu_1 = 0.5$ y $\mu_2 = 2$, las condiciones de KKT se cumplen.

(c) La restricción corresponde a una circunferencia centrada en el punto (0,1). Por lo tanto, cuando la circunferencia es de radio 1, se tiene que existirán puntos en donde los gradientes de las restricciones activas serán l.d. (se muestra el gráfico).



En particular, el punto (0,2) tendrá el siguiente jacobiano:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se puede ver que la matriz no es de rango completo en ese punto. Por lo tanto, para $\alpha = 1$ se cumple lo buscado.

Pregunta 5 (20 puntos)

(a) **(6 puntos)** Sin necesidad de justificar, indique si los siguientes conjuntos son convexos, cerrados y/o acotados:

	Convexo	Cerrado	Acotado
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \leq e^{-x}, x \geq 0, \ y \geq 0\}$		Sí	
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq e^{-x}, \ y > 0\}$			
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \lvert y\rvert > e^{-x}, \ x \geq 0\}$			

Solución:

	Convexo	Cerrado	Acotado
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \leq e^{-x}, x \geq 0, \ y \geq 0\}$	No	Sí	No
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq e^{-x}, \ y > 0\}$	Sí	Sí	No
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \lvert y\rvert > e^{-x}, \ x \geq 0\}$	No	No	No

(b) **(5 puntos)** Sean $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $h \in \mathbb{R}^m$. Demuestre que si $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es convexa, entonces $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = g(Tx + h)$ es convexa.

Solución: Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in [0,1]$, tenemos

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = g(T(\lambda x + (1-\lambda)y) + h) = g(\lambda(Tx+h) + (1-\lambda)(Ty+h))$$

$$\leq \lambda g(Tx+h) + (1-\lambda)g(Ty+h) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

(c) **(5 puntos)** Sea (x^*, y^*) solución óptima de (P) $\min\{f(x,y) :\ g(x,y) \leq b,\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m\}$. Fijando $x = x^*$, sea (P') $\min\{f(x^*,y) :\ g(x^*,y) \leq b,\ y \in \mathbb{R}^m\}$. ¿Es verdad que y^* es solución óptima para (P')? Demuestre o refute con un contraejemplo.

Solución: Supongamos que y^* no es solución óptima para (P'). Entonces, existe $z \in \mathbb{R}^m$ tal que $g(x^*, z) \leq b$ y $f(x^*, z) < f(x^*, y^*)$. Luego, (x^*, y^*) no sería solución óptima de (P), lo cual es contradicción. Por lo tanto, la afirmación es verdadera.

(d) **(4 puntos)** Sea y_i la variable dual asociada a una restricción de la forma $a_i^\top x \leq b_i$ en un problema lineal de minimización. Interpretando y_i como una tasa de variación apropiada, explique por qué esta variable dual es no positiva.

Solución: La variable dual y_i puede interpretarse como la tasa de variación del valor óptimo del problema con respecto a b_i. Como la restricción es de menor o igual, aumentar el lado derecho mantiene o agranda la región factible. Al ser un problema de minización, esto hace que el valor óptimo se mantenga o disminuya. Luego, la tasa de variación es no positiva, lo cual corresponde al signo de y_i.