PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2015
Profesores: G.Angulo - A.Cataldo - R.Cuadrado
S.Encina - D.Pozo - J.Vera

Interrogación 3

Duración: 2 horas y 15 minutos.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***

Pregunta 1 (15 puntos)

(a) (**6 puntos**) Considere el siguiente problema de Optimización Lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a & x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ & x_j \geq 0, j = 1, \ldots 4. \end{array}$$

Usando solamente conceptos de dualidad, muestre que este problema es no acotado. Justifique bien todos sus argumentos.

Respuesta: Es fácil ver que el problema es factible. Por ejemplo, $x = (0, 1, 0, 2)$ cumple con las restricciones.

Vamos a escribir el dual y mostrar que es infactible. Por dualidad, esto implica que el primal es no acotado. Es dual es:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & y_1 + 4y_2 \\ s.a & y_1 - y_2 \geq 2 \\ & y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ & -y_1 \geq 1 \\ & y_2 \geq 0 \end{array}$$

De la primera y cuarta restricción se tiene que $y_1 \geq 2$ lo que contradice la tercera restricción. Luego, el dual es infactible y, dado que el primal es factible, tiene que ser no acotado.

(b) (**5 puntos**) Considere un problema de flujo definido en una red $G = (N, A)$, donde N son los nodos, que corresponden a ciertas ciudades, y A son los arcos dirigidos que conectan esas ciudades. Sea b_i la oferta o demanda por un producto en el nodo i y sea c_{ij} el costo unitario de transporte por el arco (i, j). Se quiere transportar el producto para satisfacer las demandas, pero en este problema existe la especificación adicional de que la cantidad transportada en el arco (i, j) no puede superar una cota conocida, $u_{ij} > 0$. El problema que determina cuánto

debe transportarse por cada arco minimizando el costo total es:

$$\begin{array}{rl} \text{mín} & \sum\limits_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \\ s.a & \sum\limits_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum\limits_{k:(k,i)\in A} x_{ki} = b_i,\ i \in N \\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij},\ (i,j) \in A. \end{array}$$

(i) (**2 puntos**) Escriba el dual de este problema.

Respuesta: Sean π las variables duales de las restricciones de flujo e $y_{ij}, (i,j) \in A$ las de las variables de cota superior, las cuales es mejor escribir como $-x_{ij} \geq -u_{ij}$, para poder recordar mejor el dual de la forma simétrica. El dual de este problema es:

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & \sum\limits_{i\in N} b_i\pi_i - \sum\limits_{(i,j)\in A} y_{ij}u_{ij} \\ s.a. & \pi_i - \pi_j - y_{ij} \leq c_{ij}, (i,j) \in A \\ & y_{ij} \geq 0, (i,j) \in A. \end{array}$$

o equivalentemente,

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & \sum\limits_{i\in N} b_i\pi_i + \sum\limits_{(i,j)\in A} y_{ij}u_{ij} \\ s.a. & \pi_i - \pi_j - y_{ij} \leq c_{ij}, (i,j) \in A \\ & y_{ij} \leq 0, (i,j) \in A. \end{array}$$

(ii) (**3 puntos**) Explique con precisión qué significado se les puede dar a las variables duales asociadas a las restricciones $x_{ij} \leq u_{ij}, (i,j) \in A$.

Respuesta: Las variables duales y_{ij} representan el precio sombra o valor marginal de un aumento en la capacidad u_{ij}. Un incremento en la capacidad genera una disminución en la función objetivo.

(c) (**4 puntos**) Considere el siguiente problema de Optimización Lineal:

$$P) \quad \begin{array}{rl} \text{mín} & c^\top x \\ s.a & Ax = b, x \geq 0 \end{array}$$

donde A es una matriz de m filas linealmente independientes y n columnas, y $b \in \mathbb{R}^m$ es no negativo. Como usted sabe, el algoritmo Simplex se usa resolviendo primero el siguiente problema de Fase I para encontrar una solución básica factible inicial:

$$\text{PFI}) \quad \begin{array}{rl} \text{mín} & \sum\limits_{i=1}^{m} y_i \\ s.a & Ax + Iy = b \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

donde I es la identidad de $m \times m$.

(i) (**2 puntos**) Escriba el dual del problema PFI) y muestre que si el valor óptimo del problema de Fase I es > 0, entonces existe un vector $h \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$b^\top h > 0, A^\top h \leq 0.$$

Respuesta: El dual del problema PFI) es:

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & b^T\pi \\ s.a. & A^T\pi \leq 0 \\ & I\pi \leq e \end{array}$$

donde e es el vector cuyas componentes son todas iguales a 1. Sea h solución óptima de ese dual. Si el óptimo de PFI) es positivo, entonces $b^T h > 0$ y, como además es factible en el dual, se tiene que $A^T h \leq 0$, como se quería demostrar.

(ii) (**2 puntos**) Deduzca, a partir de lo anterior, que entonces el problema P) original es infactible.

Respuesta: Esto se puede seguir por dos formas equivalentes:

Primero, el dual de problema original es:

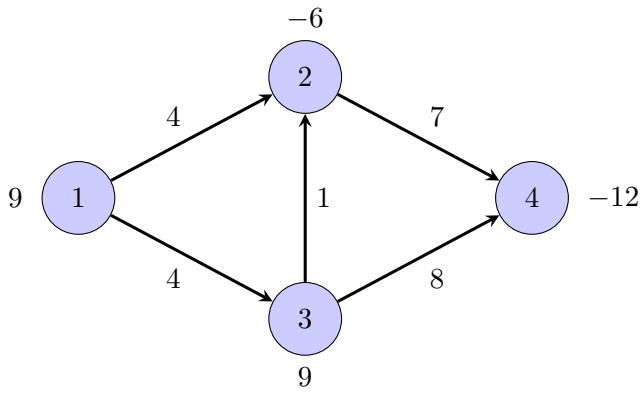
$$\begin{array}{rl} \text{máx} & b^T u \\ s.a. & A^T u \leq c \end{array}$$

Si $\bar{u}$ es un punto factible de este dual, entonces tenemos que $A^T(\bar{u} + th) \leq c$ para todo $t \geq 0$, dado que $A^T h \leq 0$ y además $b^T(\bar{u} + th) = b^T \bar{u} + t b^T h \to \infty$ con $t \to \infty$ dado que $b^T h > 0$. Esto muestra que el dual es no acotado y, por lo tanto, el primal debe ser infactible.

Alternativamente, podemos ver que la condición $b^T h > 0, A^T h \leq 0$ implica, a través del Lemma de Farkas (ver la Tarea 3) que el sistema $Ax = b, x \geq 0$ es infactible, así que el primal es infactible.

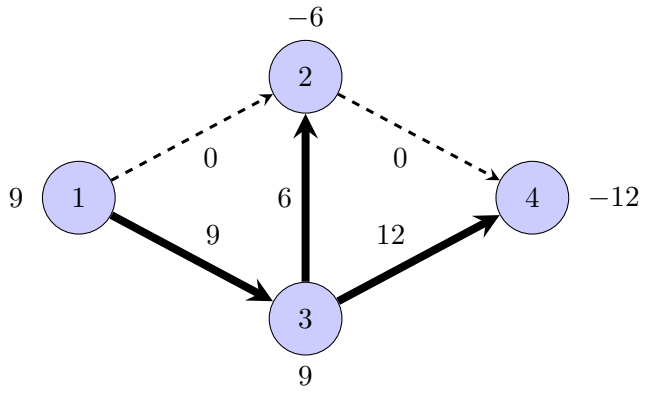
Pregunta 2 (14 puntos)

Se tiene la siguiente red:



donde para cada nodo se indica su demanda u oferta, y para cada arco se indica el costo por unidad de flujo.

(a) (**8 puntos**) Encuentre el flujo a costo mínimo de la red propuesta, utilizando la siguiente solución básica factible inicial indicada por los arcos en negrita:



Indicación: verifique que el costo óptimo es igual a 129.

Respuesta: Mediante el algoritmo Simplex especializado en redes, utilizamos la solución básica factible inicial dada y comenzamos a evaluar los costos reducidos para obtener los valores de las variables duales.

◇ Primera iteración:

Empezamos con los costos reducidos de las variables básicas ($\bar{c}_{ij} = 0$):

$c_{13} = \pi_1 - \pi_3 = 4$
$c_{32} = \pi_3 - \pi_2 = 1$
$c_{34} = \pi_3 - \pi_4 = 8$

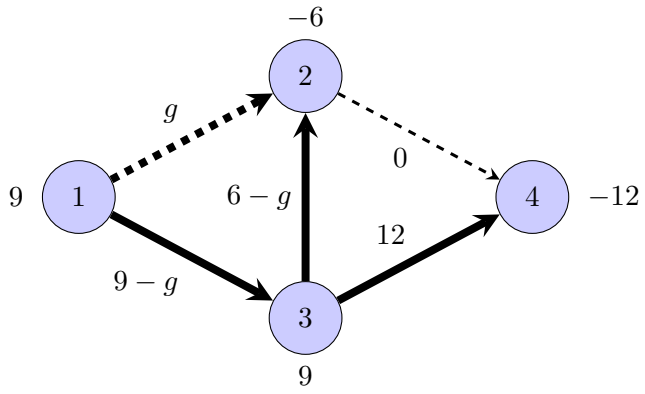
Luego, fijando (arbitrariamente) $\pi_1 = 0$, se obtiene:

$\pi_2 = -5,\ \pi_3 = -4,\ \pi_4 = -12$

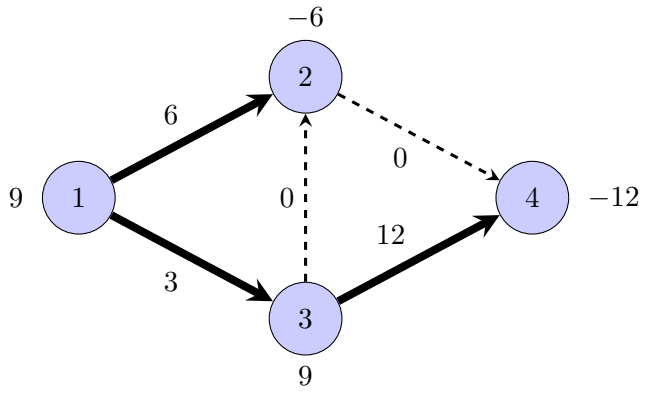
Ahora calculamos los costos reducidos de las variables no básicas:

$\bar{c}_{12} = c_{12} - \pi_1 + \pi_2 = 4 - 0 - 5 = -1$
$\bar{c}_{24} = c_{24} - \pi_2 + \pi_4 = 7 + 5 - 12 = 0$

Luego, uno de los costos reducidos es <0, por lo que no estamos en el óptimo. Por lo que el arco (1,2) debe entrar a la base y este forma un circuito por el que se debe enviar flujo hasta que uno de los arcos se haga nulo:



Por lo que si se mandan 6 unidades de flujo, el arco (3,2) alcanza el valor cero; por lo que este arco sale de la base, quedando:



◇ Segunda iteración:

Ahora para la nueva base, tenemos que calcular los costos reducidos de las variables básicas ($\bar{c}_{ij} = 0$):

$c_{13} = \pi_1 - \pi_3 = 4$
$c_{12} = \pi_1 - \pi_2 = 4$
$c_{34} = \pi_3 - \pi_4 = 8$

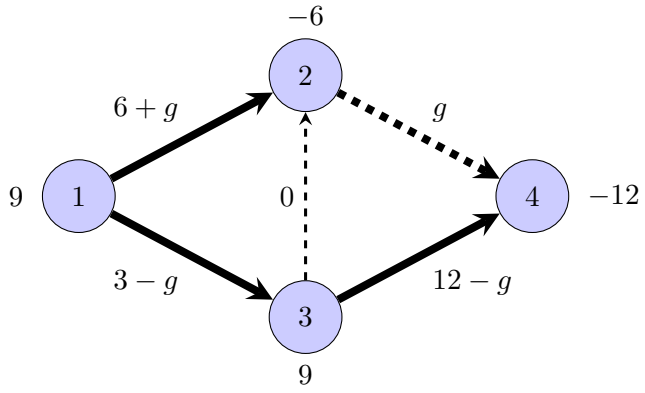
Luego, fijando (arbitrariamente) $\pi_1 = 0$, se obtiene:

$\pi_2 = -4,\ \pi_3 = -4,\ \pi_4 = -12$

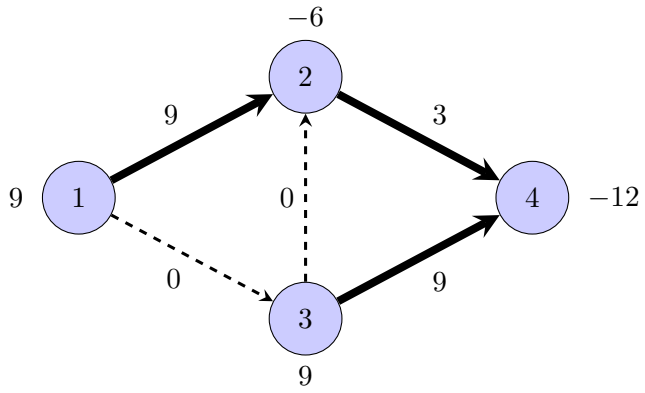
Ahora calculamos los costos reducidos de las variables no básicas:

$\bar{c}_{32} = c_{32} - \pi_3 + \pi_2 = 1 + 4 - 4 = 1$
$\bar{c}_{24} = c_{24} - \pi_2 + \pi_4 = 7 + 4 - 12 = -1$

Luego, uno de los costos reducidos es <0, por lo que no estamos en el óptimo. Por lo que el arco (2,4) debe entrar a la base y este forma un circuito por el que se debe enviar flujo hasta que uno de los arcos se haga nulo:



Por lo que si se mandan 3 unidades de flujo, el arco (1,3) alcanza el valor cero; por lo que este arco sale de la base, quedando:



◇ Tercera iteración:

Ahora para la nueva base, tenemos que calcular los costos reducidos de las variables básicas ($\bar{c}_{ij} = 0$):

$c_{24} = \pi_2 - \pi_4 = 7$
$c_{12} = \pi_1 - \pi_2 = 4$
$c_{34} = \pi_3 - \pi_4 = 8$

Luego, fijando (arbitrariamente) $\pi_1 = 0$, se obtiene:

$\pi_2 = -4,\ \pi_3 = -3,\ \pi_4 = -11$

Ahora calculamos los costos reducidos de las variables no básicas:
$\bar{c}_{32} = c_{32} - \pi_3 + \pi_2 = 1 + 3 - 4 = 0$
$\bar{c}_{13} = c_{13} - \pi_1 + \pi_3 = 4 - 0 - 3 = 1$

Ahora todos los costos reducidos son ≥ 0, por lo que estamos en el óptimo y hemos encontrado el flujo a costo mínimo de la red propuesta.

Adicionalmente, verifiquemos cuánto es este costo mínimo: $z = c_{12} \times f_{12} + c_{24} \times f_{24} + c_{34} \times f_{34} = 4 \times 9 + 7 \times 3 + 8 \times 9 = 129$.

Observación: el problema es equivalente si se invierten los arcos y los signos de las demandas/ofertas.

(b) (**3 puntos**) ¿Cuál es el rango de valores que puede tomar el costo del arco (1,2) para que la solución óptima no cambie?

Respuesta: Para que no cambie la solución óptima, se deben mantener los criterios de optimalidad. Entonces usando la base óptima encontrada en (a), dejamos como incógnita el costo del arco (1,2) y recalculamos los costos reducidos de las variables básicas ($\bar{c}_{ij} = 0$):

$c_{24} = \pi_2 - \pi_4 = 7$
$c_{12} = \pi_1 - \pi_2$
$c_{34} = \pi_3 - \pi_4 = 8$

Luego, fijando (arbitrariamente) $\pi_2 = 0$, se obtiene:

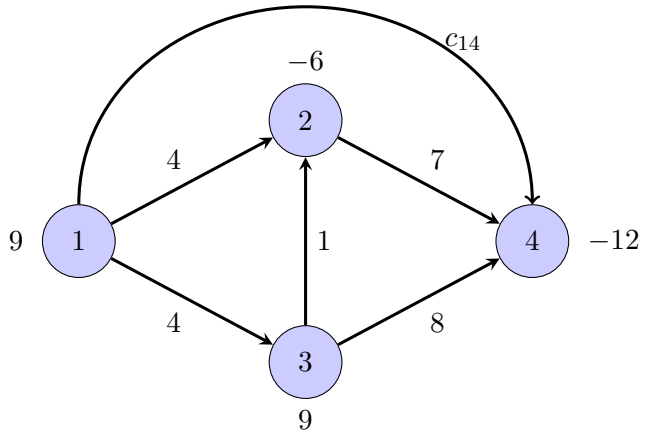
$\pi_1 = c_{12},\ \pi_3 = 1,\ \pi_4 = -7$

Ahora calculamos los costos reducidos de las variables no básicas:
$\bar{c}_{32} = c_{32} - \pi_3 + \pi_2 = 1 - 1 - 0 = 0$
$\bar{c}_{13} = c_{13} - \pi_1 + \pi_3 = 4 - c_{12} + 1 = 5 - c_{12}$

Luego, para mantener los criterios de optimalidad $\bar{c}_{13} = 5 - c_{12} \geq 0$, entonces el rango que puede tomar el costo del arco (1,2) para que no cambie la solución óptima es de $0 \leq c_{12} \leq 5$.

(c) (**3 puntos**) Se está considerando agregar un nuevo arco que va desde 1 a 4. ¿Hasta cuánto puede ser el costo unitario de este arco para que convenga usarlo?

Respuesta: La nueva situación queda representada por la siguiente red:



Con lo cual, se está agregando una variable no básica al modelo. Luego, basta con calcular el costo reducido de esta nueva variable (en el contexto de la tercera iteración en (a)) y ver que no se cumpla el criterio de optimalidad en este costo reducido y convega ingresarlo a la base:

$\bar{c}_{14} = c_{14} - \pi_1 + \pi_4 = c_{14} - 0 - 11 < 0 \Longrightarrow c_{14} < 11$

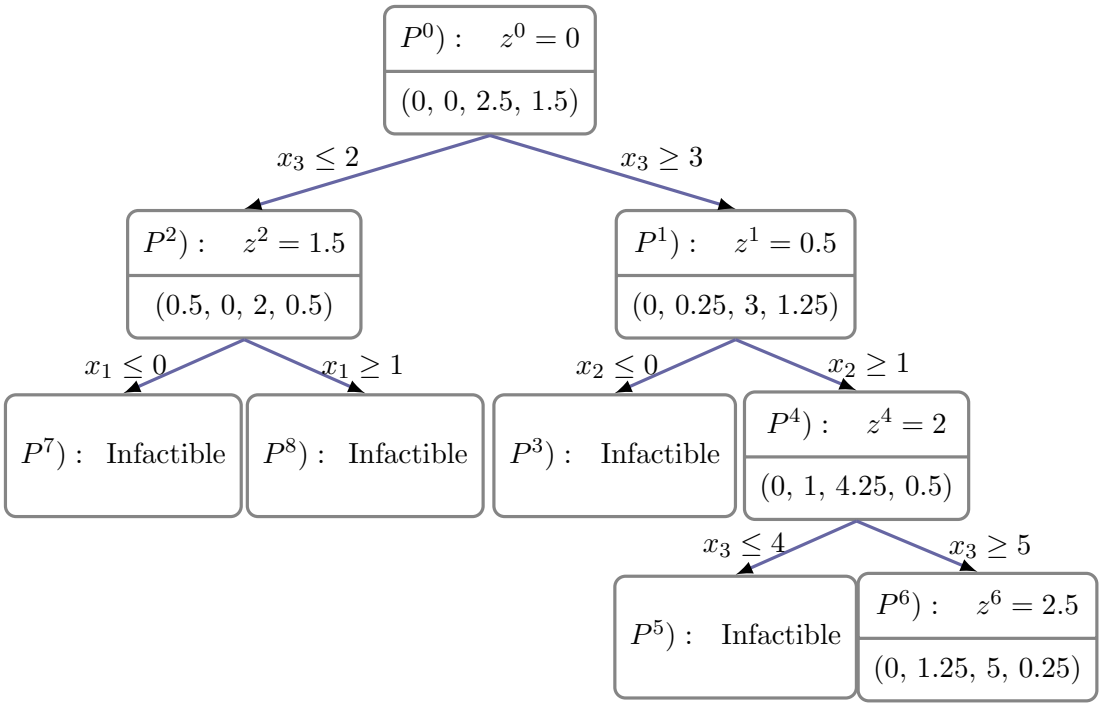
Por lo tanto, el costo unitario del nuevo arco debe ser menor a 11, para que convenga usarlo.

Pregunta 3 (16 puntos)

(a) (**5 puntos**) Se tiene el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ s.a \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 = 5/2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 3/2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ & x_2, x_3 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Se ha utilizado un algoritmo de Ramificación y Acotamiento (o Branch and Bound) para resolver el problema. El desarrollo del algoritmo se muestra en la siguiente figura, donde (P^i) denota un subproblema, z^i su valor óptimo, y además se indica la solución óptima correspondiente. Los problemas lineales planteados en cada iteración están indexados según la secuencia de resolución. Estamos seguros de que no hay errores en resolver cada uno de los problemas (P^i), aunque no estamos seguros si se ha aplicado bien el algoritmo de Ramificación y Acotamiento.



Se pide:

(I) (**3 puntos**) Indicar todos los errores que se han cometido al aplicar el algoritmo para resolver el problema (si los hubiera). No necesita resolver cada problema (P^i), puesto que sabemos no hay errores en la resolución de estos.

Respuesta: Notar, que solo las variables x_2 y x_3 son enteras, el resto de variables son continuas. Además, se encuentra un incumbente en la iteración 2. Los errores que podemos encontrar en la aplicación del algoritmo B&B son:

- ◇ El problema P^4 debería podar todo lo que está por debajo (P^5 y P^6), ya que el valor de la función objetivo en el incumbente de dicha iteración es inferior al valor óptimo de la solución que se obtiene en P^4.
- ◇ El problema P^2 tampoco se ramifica porque es incumbente. Las variables x_2 y x_3 cumplen con la propiedad de integralidad.
- ◇ No se ramifica en variables que son continuas. Por tanto, la ramificación de P^7 y P^8 no corresponden al proceso de resolución B&B.

(II) (**2 puntos**) Indicar si se encontró solución óptima al problema, incumbente o ninguna de las anteriores.

Respuesta: Se encontró incumbente en la iteración 2, y además este es solución óptima del problema puesto que no se precisa explorar/ramificar más en ninguna de sus ramas del árbol.

(b) (**6 puntos**) Comente sobre las siguientes afirmaciones justificando su respuesta.

(I) (**2 puntos**) En un problema lineal entero infactible, su relajación lineal puede ser infactible, factible acotada, o no acotada.

Respuesta: Los tres casos son posibles. Ejemplos:

- ◇ Problema entero infactible con relajación lineal infactible.

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1 \\ s.a \quad & x_1 \geq 7 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_1 \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

◇ Problema entero infactible con relajación lineal factible acotada.

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1 \\ s.a \quad & x_1 \geq 3{,}1 \\ & x_1 \leq 3{,}9 \\ & x_1 \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

◇ Problema entero infactible con relajación lineal factible no acotada.

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & x_2 \\ s.a \quad & x_1 = 1/2 \\ & x_1 \in \mathbb{Z}_+ \\ & x_2 \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

(II) (**2 puntos**) Dado un problema primal P) no acotado, se calcula su problema dual D) asociado. Se vuelve a calcular el dual de D) resultando en un nuevo problema que denominamos DD). ¿Es el problema P) equivalente al problema DD)?.

Respuesta: P) es igual a DD). El problema dual del dual, siempre es el primal, independientemente de si el primal es acotado o no.

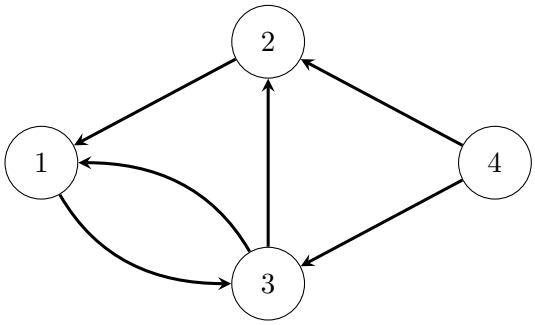
(III) (**2 puntos**) En un problema lineal entero, con todas sus variables binarias, se quiere analizar cuánto puede cambiar un coeficiente de costos de la función objetivo sin que cambie la solución. Indique si la metodología de análisis de sensibilidad estudiada en clase (en su forma algebraica) le permite cuantificar el rango de variación del coeficiente de costos a analizar.

Respuesta: La metodología estudiada en clase solo es aplicable a problemas lineales en variables continuas. El análisis de sensibilidad estudiado no se puede aplicar a problemas enteros, ya que variaciones pequeñas en alguno de los parámetros del problema pueden significar cambios en la solución óptima.

(c) (**2 puntos**) Construya el grafo asociado a la siguiente matriz de incidencias nodo-arco:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Respuesta:



Observación: dependiendo de la definición de matriz de incidencia, el grafo podría tener los arcos invertidos.

(d) (**3 puntos**) Sea $S := \{x \in \{0,1\}^3 : \ x_1+2x_2+4x_3 \geq 3\}$. Muestre que la desigualdad $x_1+x_3 \geq 1$ es válida para S.

Respuesta: Si un vector $x \in \{0,1\}^3$ viola la desigualdad, entonces $x_1 = 0$ y $x_3 = 0$ y por lo tanto no puede satisfacer $x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 3$.

Como este ejemplo es pequeño, también se puede verificar individualmente que cada elemento de S cumple la desigualdad.

Pregunta 4 (15 puntos)

El director deportivo de un prestigioso club de fútbol tiene la siguiente tarea: asegurar que todos los jugadores del equipo lleguen a Barcelona. El nombre de cada uno de los jugadores del club se encuentra listado en el conjunto K.

Una vez que este director deportivo cotizó todas las opciones de viaje que tiene para el plantel, construyó una red $D = (N, A)$, en la que cada nodo en $N = \{1, \ldots, n\}$ representa una ciudad: de origen-Santiago (1), de transbordo $(2, \ldots, N-1)$ y de destino-Barcelona (n). Cada arco de la red representa un trayecto en avión que es posible de realizar entre esas ciudades. El costo unitario del pasaje para cada trayecto está dado por el parámetro c_{ij} (pesos), para todo arco $(i,j) \in A$, y la cantidad máxima de pasajes que se pueden adquirir en ese trayecto está registrada en el parámetro μ_{ij} (pasajes), para todo arco $(i,j) \in A$.

De manera de mantener la cordialidad entre los integrantes del plantel, se encuestó a cada uno de ellos de manera de saber con qué compañero tiene problemas para compartir parte o la totalidad del viaje. En este sentido, se sabe que el conjunto $V(k)$ contiene el listado de los jugadores con los que no debe realizar ningún tramo del viaje el jugador k, esto para todo $k \in K$. Del mismo modo, el conjunto $R(k)$ contiene la lista de todos los jugadores con los que el jugador k no debe realizar más de M tramos de viaje, esto para todo $k \in K$.

Con la información anterior, construya un modelo de programación lineal entera que le permita al director deportivo decidir cómo trasladar a todos los jugadores del equipo desde Santiago a Barcelona al menor costo total posible.

Respuesta:

- ◇ *Variables de decisión*

  x_{ij}^k: variable binaria que toma valor 1 si el jugador k viaja a través del arco (i,j), y que vale 0 en cualquier otro caso.

  y_{ij}^{kl}: variable binaria que toma valor 1 si el jugador k y el jugador l viajan juntos a través del arco (i,j), y que vale 0 en cualquier otro caso

◇ *Función objetivo* Consiste en minimizar el costo total de las decisiones de traslado.

$$\text{mín} \quad \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} \sum_{k\in K} x_{ij}^k$$

◇ *Restricciones*

(R1) Conservación de flujo en cada nodo.

$$\sum_{j\in A} x_{ij}^k - \sum_{j\in A} x_{ji}^k = \begin{cases} 1 \text{ si } i = 1 \\ -1 \text{ si } i = N \\ 0 \text{ si } i = 2, \ldots, N-1 \end{cases} \qquad \forall i \in A, k \in K.$$

(R2) Se debe respetar la cantidad máxima de pasajes que se pueden adquirir en cada tramo.

$$\sum_{k\in K} x_{ij}^k \leq \mu_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A.$$

(R3) Respetar condición asociada a conjunto $V(k)$

$$x_{ij}^k + x_{ij}^l \leq 1 \qquad \forall (i,j) \in A, k, l \in K : k \neq l \text{ y } l \in V(k).$$

(R4) Relación entre variable x_{ij}^k e y_{ij}^{kl}.

$$x_{ij}^k + x_{ij}^l - 1 \leq y_{ij}^{kl} \qquad \forall (i,j) \in A, k, l \in K.$$

(R5) Relación entre variable x_{ij}^k e y_{ij}^{kl}.

$$x_{ij}^k + x_{ij}^l \geq 2y_{ij}^{kl} \qquad \forall (i,j) \in A, k, l \in K.$$

(R6) Asegurar que para el jugador k se cumple la condición impuesta sobre los jugadores del conjunto $R(k)$.

$$\sum_{(ij)\in A} y_{ij}^{kl} \leq M \qquad \forall (i,j) \in A, k, l \in K : l \in R(k).$$

Observación: Esta restricción también puede haber sido interpretada de forma agregada para cada jugador, es decir

$$\sum_{l\in R(k)} \sum_{(ij)\in A} y_{ij}^{kl} \leq M \qquad \forall (i,j) \in A, k \in K.$$

(R7) Naturaleza de las variables

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\} \qquad (i,j) \in A, k \in K.$$