PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 02-2017
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado - M. Klapp
A. Cataldo - J.T. Marquinez

Pauta Interrogación 2

Duración: 2 horas y 15 minutos.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***
La interrogación cuenta con 66 puntos, el 7 se logra sacando 60 o más puntos en la interrogación.

Pregunta 1 (21 puntos)

Parte A (15 puntos)

Considere un problema P de optimización lineal de minimización con variables continuas no negativas. Responda para cada una de las siguientes afirmaciones si es VERDADERA o FALSA. Justifique según corresponda.

(a) **(3 puntos)** Si P tiene una solución básica degenerada, entonces su dominio de soluciones factibles tiene al menos una restricción redundante.

Solución: FALSO, la punta de la pirámide 3D de cuatro lados es un contraejemplo. Tiene 4 restricciones activas (por lo que está sobredeterminada), pero ninguna restricción es redundante.

(b) **(3 puntos)** Considere una iteración intermedia del método Simplex sobre P en forma estándar. Una variable no básica puede entrar a la base y salir en la siguiente iteración.

Solución: VERDADERO, por ejemplo $min - x_1 - x_2 s.t. x_1, x_2 \geq 0, 2x_1 + x_2 \leq 2$. Si parte del origen ($B = \{h\}$) y entra x_1 pasa por $B = \{1\}$, pero el óptimo es $B = \{2\}$, por lo que sale x_1 en la siguiente iteración.

(c) **(3 puntos)** Considere una iteración intermedia del método Simplex sobre P en forma estándar. Una variable básica puede salir de la base y entrar a ella en la siguiente iteración.

Solución: FALSO, al salir de base la variable quedará con costo reducido positivo (es la operación inversa a la entrada con costo reducido negativo). No habrá incentivo a ingresarla a la base en la siguiente iteración.

(d) **(3 puntos)** En una iteración del método Simplex, el criterio de salida de variables básicas garantiza que el próximo vértice a evaluar sea siempre mejor o igual que el actual en términos del objetivo.

Solución: FALSO, ya que el criterio de salida de la base determina la distancia a la que se encuentra la más próxima intersección (punto extremo adyacente al punto extremo actual) cuando se avanza en la dirección determinada por el criterio de entrada a la base, y no tiene que ver con el avance en alguna proyección del gradiente, lo que se determina con el criterio de entrada a la base.

(e) **(3 puntos)** Las variables adicionales que se agregan para completar la forma estándar identifican en una solución determinada las restricciones del problema original que están activas e inactivas.

Solución: VERDADERO, ya que cada variable de la forma estándar representa la distancia a la que una restricción –incluida la naturaleza de variables– está de la restricción a la que está asociada (variables originales, de holgura y exceso), luego, si para un punto determinado una variable toma valor igual a 0 indica que se está sobre esa restricción y, por lo tanto, es activa, si por el contrario, la variable toma valor distinto de 0, indica que no se está sobre esa restricción, y por lo tanto, es inactiva.

Parte B (6 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización lineal en forma estándar

$$P): \qquad \min_{x \geq 0} c^T x \quad s.a. \quad Ax = b$$

donde $b \in \mathbb{R}^m_+, c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Se sabe que la base óptima de P es $B \subseteq \{1, \dots n\}$.

Obtenga una solución óptima para el siguiente problema

$$P_2) \qquad \min_{x,y \geq 0} c^T x + kc^T y \quad s.a. \quad Ax + kAy = b$$

donde $k \in \mathbb{R}_+$. Debe entregar la solución óptima de P_2 como una expresión matemática en función de los datos A, b, c, k, B. Justifique su optimalidad.

Solución: La base óptima B se mantiene óptima y factible al inyectar cada variable y como no básica. Se tiene que $r_y^T = kc^T - c_B A_B^{-1} kA = kr_x^T \geq 0$, donde r_x, r_y son los vectores de costos reducidos de x y de y. Luego $y = 0, x = x^*$ es óptimo para P_2.

Pregunta 2 (20 puntos)

Parte A (8 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización lineal con 3 variables y 2 restricciones:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \\ s.t. \quad & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \leq b_1 \\ & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \leq b_2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

donde $c^T = [8; 6; 3]$ y $b^T = [2; 4]$.

Usted ha calculado una base factible del problema de minimización equivalente agregando holguras no negativas (x_4 y x_5) en cada restricción para trabajarlo en forma estándar. El problema equivalente

con las variables básicas y el objetivo despejadas en función de las variables no básicas es:

$$\begin{array}{rl} \text{mín} & v + r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3 + r_4x_4 + r_5x_5 \\ s.t. & 2x_1 + 0x_2 + x_3 + 3x_4 + \alpha x_5 = 10 \\ & 3x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 - 7x_4 + 5x_5 = \delta \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Como puede ver, se desconocen los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, el valor de la función objetivo v y todos sus costos reducidos.

(a) **(2 puntos)** ¿Qué configuración de base podría estar despejada?

Solución: La única opción para tener una base despejada es hacer $\beta = 1, \gamma = 0$ con lo que se obtiene $B = \{3, 2\}$.

(b) **(3 puntos)** Encuentre los valores de α, β, γ y δ. Calcule la solución básica y el valor de la función objetivo v.

Solución: La matriz básica invertida A_B^{-1} debe ser tal que

$$A_B^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

También se debe tener que $A_B^{-1}b = \begin{pmatrix} 10 \\ \delta \end{pmatrix}$, lo que implica: $\begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ \delta \end{pmatrix}$. La única opción es que $\alpha = 1$ y $\delta = 6$.

El valor de v sería $c^T x = 8 \times 0 + 6 \times 6 + 3 \times 10 = 66$.

Naturalmente $r_2 = r_3 = 0$.

(c) **(2 puntos)** ¿Es la solución básica óptima?

Solución: Para determinar optimalidad hay que ver los costos reducidos no básicos r_D^T. Por fórmula se tiene que:

$$r_D^T = [-8; 0; 0] - [-3; -6] \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix} = [16; -33; 33]$$

No es solución óptima.

Parte B (12 puntos)

El método Simplex trabaja en forma estándar y de ella dependen sus cuatro criterios (condición de factibilidad, condición de optimalidad, criterio para seleccionar variable que entra a la base y criterio para seleccionar variable saliente). Ahora suponga que se desea ejecutar el método Simplex sobre una "forma estándar modificada": FE'.

$$FE') \quad \begin{array}{rll} \text{mín} & z = c^T x & \\ \text{s.a.} & Ax = b & (b \leq 0) \\ & x \leq 0. & \end{array}$$

(a) **(8 puntos)** Modifique y explique cada uno de los cuatro criterios si el método de Simplex fuese ejecutado en "forma estándar modificada". Justifique.

Solución: Sea I_B el conjunto de los índices de las variables básicas, e I_R el conjunto de los índices de las variables no básicas, los criterios son:

- ◇ Criterio de factibilidad: $x_B = B^{-1}b = \bar{b} \leq 0$.
- ◇ Criterio de optimalidad: $\bar{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R \leq 0$
- ◇ Criterio de entrada: La variable x_e que entra a la base está asociada a $\bar{c}_e = \underset{\bar{c}_j > 0}{\text{máx}} \{\bar{c}_j : j \in I_R\}$.

  Alternativamente, también se puede responder como que la variable x_e que entra a la base debe tener costo reducido positivo (hay mejora al ser no positiva).
- ◇ Criterio de salida: Interesa determinar qué variable se hará cero al bajar una variable no básica (ahora con valor 0). Dado que está entrando x_e a la base, la variable x_s que sale será aquella tal que $x_e = \frac{\bar{b}_s}{\bar{a}_{se}} = \underset{\bar{a}_{ie} > 0}{\text{máx}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ie}} : i \in I_B \right\}$.

(b) **(4 puntos)** ¿Cómo sería el problema de Fase I para esta "forma estándar modificada"?

Solución: La Fase I debe ser

$$
\begin{array}{rll}
 & \text{mín} & -\sum_{i=1}^{m} t_i \\
PFI) & \text{s.a.} & Ax + It = b \qquad (b \leq 0) \\
 & & x \leq 0 \\
 & & t \leq 0
\end{array}
$$

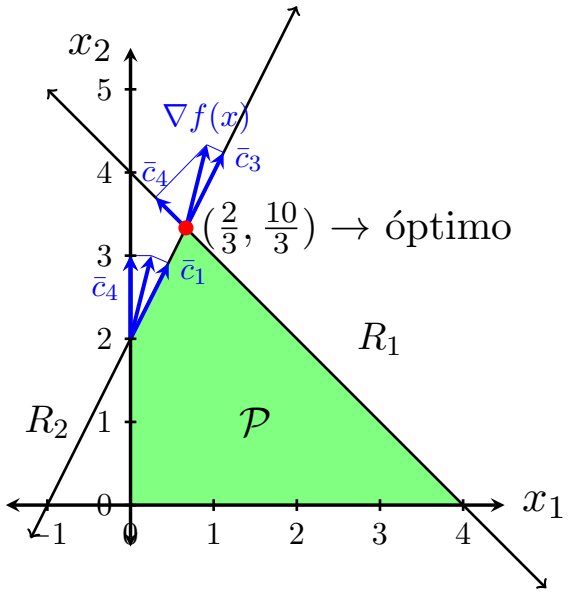
Pregunta 3 (10 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización P):

$$
\begin{array}{rl}
max & 3x_1 + 12x_2 \\
s.t. & x_1 + x_2 \leq 4 \\
 & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

(a) **(3 puntos)** Grafique el espacio de soluciones factible descrito en P, el gradiente del objetivo en el punto óptimo y en el punto extremo (vértice) adyacente al óptimo que tenga mejor valor de la función objetivo. Grafique e indique qué representan los costos reducidos en cada punto extremo (vértice).

Solución: El gráfico es el siguiente:



Como se puede apreciar del gráfico, el óptimo está en el punto (2/3,10/3) obteniéndose un valor de 42 en la función objetivo. El punto extremo adyacente más cercano es el punto (0,2) que tiene un valor de la función objetivo de 24.

Los costos reducidos representan, gráficamente, la proyección del gradiente de la función objetivo sobre las restricciones activas en el punto en que se está parado.

(b) **(5 puntos)** A partir del punto extremo (vértice) adyacente al óptimo que tenga mejor valor de la función objetivo, aplique el algoritmo Simplex para determinar la solución óptima de P.

Solución: La forma estándar del problema es:

$$\begin{aligned} min \quad & -3x_1 - 12x_2 \\ s.t. \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & -2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

En el punto desde el que se deben partir (0,2), las variables básicas son x_2, x_3 y las no básicas son x_1, x_4. Entonces, se tiene que:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego, los costos reducidos de las variables no básicas son:

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -12 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & 12 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución no es óptima, y entra x_1 a la base.

Para determinar la variable que abandona la base calculamos primero:

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

con lo que el criterio de salida de la base queda determinado por el único cuociente que cumple la condición, y entonces, 2/3, con lo que x_1 ingresa a la base.

Así, en la nueva iteración las variables básicas serán x_1, x_2 y las variables no básicas x_3, x_4. Con lo que se tiene que:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Luego, los costos reducidos de las variables no básicas son:

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_3 & \bar{c}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -12 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución es óptima (y corresponde al punto (2/3, 10/3)).

(c) **(2 puntos)** ¿Es posible pasar desde $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ al punto óptimo de P) en una iteración del algoritmo Simplex? Justifique su respuesta.

Solución: No. El algoritmo Simplex en su ejecución garantiza que si debe moverse a un nuevo punto, este movimiento siempre es hacia un punto extremo adyacente. Dos puntos son adyacentes si comparten todas las restricciones activas salvo exactamente una. En este caso, el punto (0,0) no comparte dos restricciones con el punto óptimo, luego no son puntos extremos adyacentes.

Pregunta 4 (15 puntos)

La administración del Hospital del Salvador le ha solicitado asesoría para la planificación de los turnos de su personal médico en los próximos T bloques horarios. Las políticas del hospital establecen que en cada bloque horario debe existir una cantidad mínima de K enfermeras, y una proporción de al menos $\delta \in [0, 1]$ enfermeras por cada paciente. La cantidad de pacientes esperados para cada bloque horario se encuentra definido en el parámetro d_t. Por otro lado, se le ha indicado que por cada h bloques horarios continuos trabajados, a la enfermera se le debe entregar al menos R_h bloques horarios continuos de descanso inmediatamente después de terminar su turno. Por otro lado, el sindicato de enfermeras ha establecido que ninguna enfermera realizará turnos mayores a 24 bloques horarios continuos de trabajo, y que dentro de los últimos 7 días, todas las enfermeras tendrán al menos 48 horas de descanso adicional al descanso establecido en R_h. Por último, el hospital dispone de I enfermeras para cumplir con los requisitos de funcionamiento del hospital.

Plantee un modelo de programación lineal en variables mixtas (enteras y continuas) que minimice la cantidad total de bloques horarios de enfermeras utilizados satisfaciendo las condiciones establecidas por la administración y el sindicato.

Solución: Índices:

- $\diamond$ $t \in \{1, \ldots, T\}$, bloque horario
- $\diamond$ $i \in \{1, \ldots, I\}$, enfermeras
- $\diamond$ $h \in \{1, \ldots, 24\}$, bloques horarios de trabajo

Parámetros:

d_t: Cantidad de pacientes durante el bloque t.

K: Cantidad mínima de enfermeras en todo bloque horario.

$P_{tht'}$: 1 si iniciando el turno en el bloque t' con h horas de duración permite que una enfermera pueda estar trabajando en el bloque t, 0 en otro caso.

δ: proporción mínima de enfermeras contra pacientes.

VARIABLES:

x_{ith}: Variable binaria con valor 1 si la enfermera i inicia un turno en el bloque t de h horas de duración, 0 en otro caso.

α_{it}: Variable binaria con valor 1 si la enfermera i se encuentra trabajando durante el bloque horario t.

β_{it}: Variable binaria con valor 1 si la enfermera i se encuentra descansando durante el bloque horario t.

FUNCIÓN OBJETIVO:

$$\min \sum_{it} \alpha_{it}$$

RESTRICCIONES:

R1) Trabajar después de iniciar turnos.

$$R_h x_{ith} \leq \sum_{t'=t}^{t+R_h} \alpha_{it'} \quad \forall t = 1...T$$

$$\alpha_{it} \leq \sum_{t'=\text{máx}\{0,t-24\}}^{t} P_{tht'} x_{it'h} \quad \forall i = 1...I, t = 1...T$$

R2) Garantizar descanso después del turno.

$$R_h X_{ith} \leq \sum_{t'=\text{mín}\{t+h+1,T\}}^{\text{mín}\{t+h+d,T\}} \beta_{it} \quad \forall i, t$$

R3) Trabajando o Descansando.

$$\alpha_{it} + \beta_{it} = 1 \quad \forall i = 1...I, t = 1...T$$

R4) Descanso de 48 mínimo dentro de los últimos 7 días

$$\sum_{t'=t-196}^{t} \beta_{it'} \geq 48 + \text{máx}\{R_h\} \quad \forall i = 1, \ldots, I, t = 196, \ldots, T$$

R5) No activar turnos antes de finalizar el anterior

$$\sum_{t'=t}^{\text{mín}\{t+h+R_h,T\}} \sum_{h':h' \neq h} x_{it'h'} \leq (1 - x_{ith}) \quad \forall i = 1 \ldots I, t = 1 \ldots T, h = 1 \ldots 24$$

R6) Cantidad mínima enfermeras

$$\sum_i \alpha_{it} \geq \text{máx}\{\delta d_t, K\} \quad t = 1, \ldots, T$$

R8) Naturaleza variables

$$\begin{aligned} x_{ith} &\in \{0,1\} \quad \forall i = 1, \ldots, I, t = 1, \ldots, T, h = 1, \ldots, 24 \\ \alpha_{it}, \beta_{it} &\in \{0,1\} \quad \forall i = 1, \ldots, I, t = 1, \ldots, T \end{aligned}$$