PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2017
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado - M. Klapp
A. Cataldo - J.T. Marquinez

Solución Tarea 1

Fecha de Entrega: 4 de septiembre .

La tarea contiene 60 puntos.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ Esta Tarea **debe** ser desarrollada por el mismo grupo ya asignado para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- ◇ La respuesta debe tener **hojas separadas por pregunta**. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y es decisión del alumno escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenada**. En cada hoja se debe colocar **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Se debe hacer **una entrega independiente por pregunta** y las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas.
- ◇ El plazo es el día lunes 4 de septiembre a las 12:30 horas (impostergable). Aquellas Tareas no entregadas hasta la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **NO Entregadas**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaría docente de Ingeniería Industrial y de Sistemas en el segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar cada pregunta en el buzón correspondiente. Además, **la entrega de la tarea se debe realizar entre las 10:30 y las 12:30 el día de la entrega**. Esto, para evitar cualquier conflicto durante la mañana.
- ◇ El desarrollo y discusión de la tarea debe ocurrir dentro de cada grupo. La tarea está construida con el propósito de desarrollar aprendizaje colaborativo y para entrenar al alumno antes de cada prueba. No se permite distribuir cada pregunta entre los integrantes del grupo y se espera que el grupo realize un trabajo conjunto. Está permitido discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar y desarrollar sus soluciones. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada por el equipo docente con consecuencias que podrían escalar a la **reprobación del curso** más la denuncia a las autoridades correspondientes (revisar medidas de programa con respecto a faltas a la ética).
- ◇ Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.

Problema 1. (15 puntos)

En una lejana universidad, antes de que llegara *Bummer*, existía el software *PUCMAGICO*, un programa que buscaba optimizar la toma de ramos de toda la universidad, de manera de lograr la mejor asignación de cursos posibles para cada alumno. El programa funciona a través de un método de apuestas, cada alumno tiene una cierta cantidad de puntaje que debe repartir entre distintos ramos según sea su preferencia, obviamente, mientras más puntaje se apuesta en un ramo, mayor probabilidad de quedárselo, pero le quedará menos puntaje para otros ramos. Finalmente, el *PUCMAGICO* recibe como datos un conjunto de alumnos A, un conjunto de cursos C, y un puntaje p_{ij} que representa cuánto apostó el alumno $i \in A$ por el curso $j \in C$. Con esto, el *PUCMAGICO* busca maximizar el puntaje acumulado efectivo de la universidad, es decir, el total de las apuestas que sí se quedan con el ramo. Sin embargo, existen muchas restricciones en la toma de cursos, cada curso j tiene un número máximo de vacantes k_j, y un subconjunto de cursos $R_j \subset C$ que son prerequisitos del curso j, es decir, no se puede tomar sin haber aprobado anteriormente todos los cursos en el conjunto R_j. Por otro lado, cada alumno i tiene un subconjunto $B_i \subset C$ de cursos aprobados anteriormente. Asuma que un alumno no puede quedar inscrito en un ramo que apostó 0. A cada estudiante de ingeniería $l \in I$, siendo $I \subset A$ el conjunto de estudiantes de ingeniería, se le permite tomar a lo más un ramo que no sea de ingeniería, definiendo como $C_I \subset C$ el conjunto de ramos de ingeniería. Para que cada ramo se dicte, necesita al menos 5 alumnos inscritos, en caso contrario nadie podrá tomarlo porque no se dictará. Cada alumno $m \in M \subset A$, perteneciente a magíster o último año, se le deben dar al menos los dos cursos en que más apostó. Por último, cada ramo j tiene r_j créditos, y los alumnos pueden tomar un máximo de 50 créditos.

i) (12 puntos) Plantee el problema de *PUCMAGICO* como un modelo de programación lineal entera, de forma de cumplir con todos los requisitos descritos.

(*Hint: Puede utilizar la notación* $max^n\{\Omega\}$ *para referirse al conjunto de los n mayores números del conjunto* Ω)

Suponga que ahora se quiere tomar medidas para que los alumnos no tomen pocos ramos, y se decide que en caso de que el alumno no apueste en al menos 30 créditos se asumirá que congela el semestre y no se le inscribirá en ningún ramo. Esta medida corre para todos los alumnos que no cursen magíster ni último año. Además, para todos aquéllos que apostaron en 30 créditos o más, *PUCMAGICO* debe inscribirlos en al menos 30 créditos.

ii) (3 puntos) Modifique el modelo anterior agregando ó eliminando las variables y restricciones necesarias para modelar lo descrito en el último párrafo, manteniendo el modelo planteado en i).

Solución Problema 1.

i) Supuestos:

1) Si un curso se encuentra dentro de las dos mayores apuestas de un alumno de magíster ó último año, y además cumple los requisitos que el curso exige, entonces se dicta necesariamente aunque no hayan 5 inscritos.

Es posible hacer otros supuestos, siempre que se mantenga la consistencia del problema.

Variables de decisión:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si se inscribe al alumno } i \text{ en el curso } j. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$\alpha_j = \begin{cases} 1 & \text{Si se dicta el curso } j. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{Si el curso } j \text{ se dicta en situaciones extraordinarias.} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

La variable z_j es necesaria sólo si se toma el supuesto 1)

Función Objetivo:

$$Max \sum_{i \in A} \sum_{j \in C} \delta_{ij} p_{ij} - \bar{M} \sum_{j \in C} z_j$$

Siendo $\bar{M}$ un número suficientemente grande. La última resta es necesaria sólo si se tomó el supuesto 1). Esto pues, efectúa que el curso j se dicte de forma extraordinaria exclusivamente si cualquier otra asignación es infactible.

Sujeto a las siguientes restricciones:

(1) Cantidad de cupos máxima:

$$\sum_{i \in A} \delta_{ij} \leq k_j \qquad \forall j \in C$$

(2) Sólo se inscriben ramos en que la apuesta fue mayor a 0:

$$\delta_{mj'} \leq p_{ij} \bar{M} \qquad \forall i \in A, \forall j \in C$$

(3) Se deben cumplir los requisitos para inscribir un ramo:

$$\delta_{ij} = 0 \qquad \forall i \in A, \forall j : R_j \nsubseteq B_i$$

(4) Los ingenieros pueden tomar a lo más un ramo de otras carreras:

$$\sum_{j \in C/C_I} \delta_{lj} \leq 1 \qquad \forall l \in I$$

(5) Un curso se dicta con al menos 5 alumnos inscritos:

$$\frac{\sum_{i \in A} \delta_{ij}}{5} + z_j \geq \alpha_j \qquad \forall j \in C$$

(6) No se pueden inscribir alumnos en un curso que no se dicta:

$$\delta_{ij} \leq \alpha_j \qquad \forall i \in A, \forall j \in C$$

(7) Alumnos de magíster deben ser inscritos en al menos los dos cursos que más apostaron:

$$\delta_{mj'} = 1 \qquad \forall m \in M, \forall j' : p_{ij'} \in max^2\{p_{ij} : j \in C \wedge (R_j \subseteq B_m)\}$$

(8) Un almuno no puede inscribir más de 50 créditos:

$$\sum_{j \in C} \delta_{ij} r_j \leq 50 \qquad \forall i \in A$$

(9) Naturaleza de las variables:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &\in \{0,1\} && \forall i \in A, \forall j \in C \\ \alpha_j &\in \{0,1\} && \forall j \in C \\ z_j &\in \{0,1\} && \forall j \in C \end{aligned}$$

ii) Supuestos:

2) Es posible dictar un curso extraordinariamente, en caso que algún alumno apueste en al menos 30 créditos y no exista una asignación factible de cursos que se dicten regularmente.

Nuevas variables de decisión:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{Si al alumno } i \text{ no se le congela el semestre.} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el alumno } i \text{ apuesta en el curso } j. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Nuevas restricciónes:

(10) Definición de y_{ij}:

$$\begin{aligned} y_{ij} &\leq \bar{M} p_{ij} && \forall i \in A \backslash M, \forall j \in C \\ y_{ij} \bar{M} &\geq p_{ij} && \forall i \in A \backslash M, \forall j \in C \end{aligned}$$

(11) Definición de x_{ij}:

$$\begin{aligned} x_i &\leq \frac{\sum_{j \in C} r_j y_{ij}}{30} && \forall i \in A \backslash M \\ (30 - \epsilon) + \bar{M} x_i &\geq \sum_{j \in C} r_j y_{ij} && \forall i \in A \backslash M \end{aligned}$$

Siendo ϵ un número suficientemente chico.

(12) Si no congela, debe inscribirse en al menos 30 créditos:

$$30 x_i \leq \sum_{j \in C} r_j \delta ij \qquad \forall i \in A \backslash M$$

(13) Si congela, no se debe inscribir en ningún curso:

$$x_i \geq \delta_{ij} \qquad \forall i \in A \backslash M, \forall j \in C$$

(14) Naturaleza de las variables:

$$x_i \in \{0,1\} \qquad \forall i \in A \backslash M$$
$$y_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i \in A \backslash M, \forall j \in C$$

Problema 2. (16 puntos)

a) (6 puntos) El administrador de un basurero municipal desea determinar el itinerario óptimo de recolección de basura. Este basurero tiene una capacidad de K kilos, que puede almacenar durante varios días. Para ordenar que un camión retire la basura se debe pagar un costo fijo de c_1 pesos, y uno variable de c_2 pesos por Kg de basura. El costo de inventario de mantener un kilo de basura por período de tiempo es de r *pesos*$/kg - dia$, y el costo de exceder de capacidad el basurero es de s *pesos*$/kg$. Los kilos de exceso de capacidad se los lleva un camión externo y desaparecen del basurero. Asuma que al comienzo del día t llegan d_t kilos de basura al basurero (siempre más temprano que el camión recogedor) y que inicialmente no hay basura acumulada. Plantee un problema de programación lineal entera mixta que minimice el costo total de operar el basurero durante T días, haciendo que en el día T la basura acumulada sea 0.

b) (6 puntos) Considere el problema de modelación descrito en 1). Suponga ahora que usted es un alumno que logró ingresar a los sistemas de la universidad y tiene acceso a todos los puntajes que apostaron los alumnos, además puede redistribuir libremente sólo las apuestas que usted había realizado. Para cada ramo j, usted tiene una afinidad β_j. Considere que ahora puede tomar cualquier ramo y cuántos quiera sin considerar ninguna de las restricciones anteriores, sin embargo, para asegurar que lo inscriban en un ramo, usted debe apostar al menos la máxima apuesta que hay por ese ramo actualmente. Usted puede redistribuir su puntaje, pero su puntaje total P sigue siendo fijo.

i) (4 puntos) Plantee un modelo matemático lineal y continuo que maximize su afinidad total sólo con ramos que está seguro que va a inscribir.

ii) (2 puntos) Explique como resolvería el problema en palabras generales

c) (4 puntos) Se le pide utilizar un computador y procesar un conjunto $P = \{1, \cdots, n\}$ de programas, sin embargo, el CPU es capaz de procesar sólo un programa al mismo tiempo. Cada programa $p \in P$, está listo para ser procesado después de cierto tiempo t_p, llamado tiempo mínimo de ejecución. El CPU tiene la posibilidad de mantener en una cola de espera a los programas que hayan terminado el tiempo de ejecución, y que no hayan sido o no se estén siendo procesando. Además, cada programa tiene su propio tiempo de procesamiento r_p. Se exige que los procesos no se interrumpan, ni se sobrepongan. Plantee un modelo de programación lineal entera que minimice el tiempo total en que son procesados todos los programas.

Solución Problema 2.

a) Variables de decisión:

$$x_t = \text{Kg de basura que quedan en el inventario al final del día } t.$$

$$y_t = \text{Kg de basura que se lleva el camión recogedor el día } t.$$

$$z_t = \text{Exceso de Kg de basura que se producen el día } t.$$

$$\omega_t = \begin{cases} 1 & \text{Si pasa el camión de basura el día } t. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Función Objetivo:

$$Min \sum_{t=1}^{T} r x_t + c_1 \omega_t + y_t c_2 + s z_t$$

s.a.

(1) Si pasa el camión, el inventario al final del día es 0:

$$x_t \leq K(1 - \omega_t) \qquad \forall t \in \{1, \ldots, T\}$$

(2) Definición de z_t:

$$x_{t-1} + d_t \leq K + z_t \qquad \forall t \in \{1, \ldots, T\}$$

(4) Definición de y_t:

$$\begin{aligned} x_{t-1} + d_t - z_t &\leq K(1 - \omega_t) + y_t && \forall t \in \{1, \ldots, T\} \\ y_t &\leq K\omega_t && \forall t \in \{1, \ldots, T\} \end{aligned}$$

(5) Ecuación de continuidad:

$$x_{t-1} + d_t - z_t = y_t + x_t \qquad \forall t \in \{1, \ldots, T\}$$

(6) El basurero parte y termina vacío:

$$x_0 = x_T = 0$$

(7) Naturaleza de las variables:

$$\begin{aligned} x_t &\in \mathbb{R}_0^+ && \forall t \in \{1, \ldots, T\} \\ y_t &\in \mathbb{R}_0^+ && \forall t \in \{1, \ldots, T\} \\ z_t &\in \mathbb{R}_0^+ && \forall t \in \{1, \ldots, T\} \\ \omega_t &\in \{0, 1\} && \forall t \in \{1, \ldots, T\} \end{aligned}$$

b) *i)* Se sabe que para inscribir el ramo j con seguridad necesita apostar al menos $\text{máx}_{i \in A}\{p_{ij}\}$ puntos en él, es decir, se puede suponer que el modelo sólo hará apuestas binarias de ese puntaje o nada.

Entonces, para modelar este problema basta ver que se trata de un problema de la mochila binario, en que el beneficio es la afinidad, y el peso el puntaje necesario. Finalmente se tiene:

$$\epsilon_j = \begin{cases} 1 & \text{Si inscribe el ramo } j \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$Max \sum_{j \in C} \epsilon_j \beta_j$$

$$\sum_{j \in C} \epsilon_j \operatorname{máx}_{i \in A}\{p_{ij}\} \leq P$$

$$\epsilon_j \in \{0,1\} \qquad \forall j \in C$$

Pueden haber muchos modelos que no sean tipo la mochila, pero sólo estarán bien si son lineales.

ii) Para resolver este problema, basta ajustar el método del problema de la mochila a los parámetros, es decir, seleccionar de mayor a menor los cursos según la relación $\frac{\beta_j}{\operatorname{máx}_{i \in A}\{p_{ij}\}}$, e ir desechándolos en la medida de que su puntaje necesario sobrepase P. Se seleccionan hasta que no queden cursos que se puedan tomar con el puntaje restante. Finalmente, quedará una selección que maximiza la afinidad total.

c) Variables de decisión:

$$x_p = \text{Tiempo en que se empieza a procesar el programa } p$$

$$y_i = \text{Tiempo hasta que se hayan terminado de procesar } i \text{ programas}$$

$$\alpha_{pi} = \begin{cases} 1 & \text{Si el programa } p \text{ se procesa en la posición } i. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Función Objetivo:

$$Min \quad y_n$$

s.a.

$$\begin{aligned}
x_p &\geq t_p && \forall p \in P \\
\sum_{i=1}^{n} \alpha_{pi} &= 1 && \forall p \in P \\
\sum_{p \in P} \alpha_{pi} &= 1 && \forall i = 1 \ldots n \\
x_{p'} &\geq x_p + r_p - M(2 - \alpha_{pi} - \alpha_{p'(i+1)}) && \forall p' \in P, \forall p \in P, \forall i = 1 \ldots n-1 \\
y_i &\geq x_p + r_p - M(1 - \alpha_{pi}) && \forall p \in P, \forall i = 1 \ldots n \\
x_p &\in \mathbb{R}_0^+ && \forall p \in P \\
y_i &\in \mathbb{R}_0^+ && \forall i = 1 \ldots n \\
\alpha_{pi} &\in \{0,1\} && \forall p \in P, \forall i = 1 \ldots n
\end{aligned}$$

Problema 3. (17 puntos)

a) (7 puntos) Pruebe matemáticamente si las siguientes funciones $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son convexas o no.

Nota de ayuda: Usted requiere probar convexidad en todos los casos posibles de x para determinar que una función **si es convexa**. Por el contrario, sólo basta un contraejemplo para determinar que una función **no es convexa.**

i) (1 punto) Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones convexas. $h(x) = f(g(x))$

ii) (1 punto) Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones convexas y $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa creciente en su argumento. $h(x) = r(f(x) - g(x))$

iii) (2 puntos) Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones convexas. $h(x) = max\{f(x), g(x)\}$

iv) (2 puntos) $h(x) = \lfloor e^{x^2+x} \rfloor$

v) (1 punto) Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones cóncavas. $h(x) = \sqrt{-min\{f(x), g(x)\}}$

b) (5 puntos) Demuestre si los conjuntos $H \subseteq \mathbb{R}^n$ son convexos o no:

i) (1 punto) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$

ii) (2 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}$

iii) (2 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$

c) (5 puntos) Una empresa está considerando fabricar los productos p_1, p_2, p_3, p_4 y p_5. Haciendo uso de variables binarias y restricciones lineales, modele las siguientes condiciones de producción. Use las variables $x_1, \cdots, x_5$ para referirse a cada producto respectivamente:

i) (0.5 puntos) Si no se produce p_1, entonces no se debe producir p_2.

ii) (0.5 puntos) Si se produce p_2 o p_3, entonces se debe producir p_1

iii) (1 punto) Si se produce p_1, entonces se debe producir p_2 o p_3 (ó ambos)

iv) (1 punto) Si se produce p_1, entonces se debe producir p_2, o,p_3 (excluyente)

v) (1 punto) Si se produce p_1, entonces se produce p_2, y si se produce p_2, entonces se produce p_3

vi) (1 punto) Si se producen 3 o más de p_2, p_3, p_4, p_5 entonces se debe producir p_1

Solución Problema 3.

a) *i*) La función $h(x)$ no es necesariamente convexa. Se puede tomar el siguiente caso, en que ambas funciones son convexas: $f(x) = -x, g(x) = x^2$
Entonces, $h(x) = -x^2$ que no es convexa, y se comprueba lo afirmado.

ii) La función $h(x)$ no es necesariamente convexa. Basta tomar el contraejemplo: $f(x) = x^2, g(x) = 2x^2$, y $r(x) = x$.
Finalmente, $h(x) = -x^2$, que no es convexa y se comprueba lo afirmado.

iii) Para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, y cualquier $\lambda \in [0, 1]$ tenemos que:

$$h(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \text{máx}\{f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2), g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)\}$$

Por otro lado,

$$\text{máx}\{a + b\} \leq \text{máx}\{a\} + \text{máx}\{b\}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\text{máx}\{f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2), g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\} &\leq \text{máx}\{\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2), \lambda g(x_1)+(1-\lambda)g(x_2)\}\\ &\leq \text{máx}\{\lambda f(x_1), \lambda g(x_1)\}+\text{máx}\{(1-\lambda)f(x_2),(1-\lambda)g(x_2)\}\\ &= \lambda\,\text{máx}\{f(x_1), g(x_1)\}+(1-\lambda)\,\text{máx}\{f(x_2), g(x_2)\}\\ &= \lambda h(x_1)+(1-\lambda)h(x_2)\end{aligned}$$

Con lo que se comprueba que $h(x)$ es siempre convexa.

iv) Sin perder generalidad, se pueden definir x_1 y x_2 tales que $e^{x_1^2+x_1} = n-\frac{1}{2}$, y $e^{x_2^2+x_2} = n+\frac{1}{2}$, con n cualquier entero.
Luego, se define $\hat{x} = \lambda x_1+(1-\lambda)x_2$ con $\lambda \in (0{,}5, 1)$. Para cualquier λ se cumple que: $h(\hat{x}) = h(x_2)$.
Por otro lado,

$$\begin{aligned}\lambda h(x_1)+(1-\lambda)h(x_2) &= n+\lambda\\ &< n+1\\ &= h(\hat{x})\end{aligned}$$

Con esto se demuestra que $h(x)$ no es convexa.
También se puede demostrar con un ejemplo numérico.

v) La función $h(x)$ no es necesariamente convexa. Basta tomar el siguiente contraejemplo: $f(x) = -x$, y $g(x) = \sqrt{x}$.

$$h(x) = \sqrt{-min\{-x, \sqrt{x}\}} = \sqrt{max\{x, -\sqrt{x}\}} = \sqrt{x}$$

Finalmente, como $\sqrt{x}$ no es convexa se comprueba lo afirmado.

b) *i)* A continuación, se muestra el gráfico de la región H en rojo.

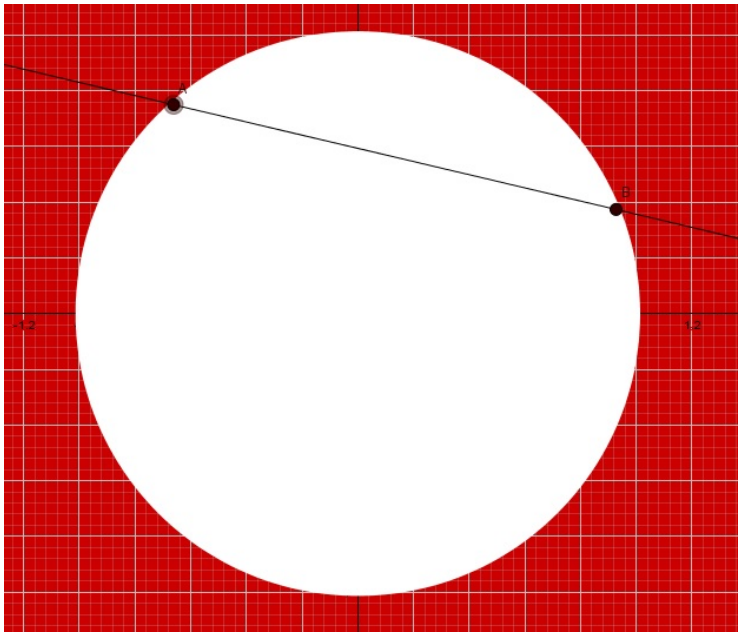


Figura 1: Dominio 3.b.i)

Basta tomar cualquier combinación de puntos que su combinación convexa pase por el círculo unitario. En este caso, se puede ver que los puntos A y B pertenecen a la región, pero todos los puntos que forman la unión convexa entre ellos no pertenece, es decir, el conjunto no es convexo.

ii) Sea $(\hat{x}, \hat{y}) = \lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2)$ con $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in H$ y $\lambda \in [0, 1]$. Por definición de H y por la convexidad de $f(x)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \\ &\geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \\ &\geq f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \\ &= f(\hat{x}) \end{aligned}$$

Es decir, $(\hat{x}, \hat{y}) \in H$ y el conjunto H es convexo.

iii) En este caso el conjunto H no es convexo. Como contraejemplo basta tomar la función $f(x) = x^2$ y los puntos $(-1, 1)$ y $(1, 1)$. Se puede ver que el punto $(0, 1)$ pertenece a la unión convexa de los dos puntos, pero no al conjunto H, es decir, no hay conexidad en este conjunto.

c) *i)* $x_2 \leq x_1$

ii) $x_2 + x_3 \leq 2x_1$

iii) $x_1 \leq x_2 + x_3$

iv) $x_1 \leq x_2 + x_3$
$x_2 + x_3 \leq 2 - x_1$

v) $x_1 \leq x_2$
$x_2 \leq x_3$

vi) $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2 + 2x_1$

Problema 4. (12 puntos)

a) (3 puntos) La empresa *Super Food*, productora de 3 tipos de alimentos, ha tenido un reciente escándalo, en que uno de sus gerentes ha decidido renunciar y llevarse consigo todos los archivos de avances en optimización que la empresa había logrado. Sin embargo, la empresa logró salvar en un archivo uno de los modelos que habían diseñado, el problema es que no se sabe qué es lo que el modelo hace ni qué calcula. Por esto la empresa le pide a usted determinar qué representan cada una de las restricciones, la función objetivo, los conjuntos, parámetros y las variables del modelo a continuación. La única información disponible es que la variable x_{it} representa la cantidad producida del alimento i en el período t, p es el precio de cualquier alimento, y c_i el costo unitario de producirlo.

$$\max_{x,y} \sum_{t\in T} p y_t - \sum_{i=1}^{3} c_i \sum_{t\in T} x_{it}$$

$$
\begin{array}{lrcll}
s.a. & \sum_i x_{it} & = & y_t & \forall t \in T \quad (1)\\
& y_t & \geq & k & \forall t \in T \quad (2)\\
& y_t & \leq & K & \forall t \in T \quad (3)\\
& M\delta_{it} & \geq & x_{it} & \forall t \in T, \forall i \in \{1,2,3\} \quad (4)\\
& m\delta_{it} & \leq & x_{it} & \forall t \in T, \forall i \in \{1,2,3\} \quad (5)\\
& \delta_{1t} + \delta_{2t} & \leq & 2(1-\delta_{3t}) & \forall t \in T, \forall i \in \{1,2,3\} \quad (6)\\
& \sum_{t\in T} x_{2t} & \geq & H & (7)\\
& \sum_{t\in T} \delta_{3t} & \leq & n & (8)\\
& x_{1t} & \leq & 0{,}4 y_t & \forall t \in T \quad (9)\\
& x & \geq & 0 & \\
& \delta_{it} & \in & \{0,1\} & \forall t \in T, \forall i \in \{1,2,3\}
\end{array}
$$

b) (3 puntos) Transforme la función objetivo del siguiente problema de maximización no lineal a un problema lineal equivalente de minimización. Asuma que la región de soluciones factibles Ω puede ser representada por restricciones lineales y que no requiere transformación.

$$
\begin{array}{lll}
P) & \max & -\sqrt{7x + |x+y| - min\{x, |x+y|\}} \\
& s.a. & \\
& x & \in \quad \Omega
\end{array}
$$

c) (6 puntos) Considere el siguiente problema de optimización donde c_1 y c_2 son parámetros escalares desconocidos:

$$\min c_1 x + c_2 y$$

$$
\begin{array}{lrcl}
s.a. & & & \\
& 4x - y & \geq & -8 \\
& -1{,}5x + 3y & \geq & -4{,}5 \\
& 0{,}8x + 2y & \geq & 1{,}6 \\
& 4x - 6{,}6y & \geq & -26{,}4 \\
& x & \geq & 0
\end{array}
$$

i) (1 punto) Grafique el problema original, indicando claramente las restricciones y la región de soluciones factibles.

ii) (1 punto) ¿Tiene solución óptima? ¿Por qué?

iii) (1 punto) Agregue la siquiente restricción al dominio del problema:

$$6x + 3{,}5y \leq 21$$

¿Tiene solución óptima? ¿Por qué?

iv) (2 puntos) Considere que $(c_1, c_2) = (3, 12)$. Haciendo uso del gráfico en iii), resuelva el nuevo problema. Determine el valor óptimo y todas las posibles soluciones óptimas, las curvas de nivel de la función objetivo y la ubicación de la region de soluciones óptimas.

iv) (1 punto) ¿Determine el intervalo de valores que puede tomar $\frac{c_1}{c_2}$ para que el conjunto de soluciones óptimas anterior se mantenga?

Solución Problema 4.

a) La interpretación del modelo es la siguiente:

F.O.: Busca maximizar las utilidades (ganancias - pérdidas) de la empresa dentro de T períodos.

y_t: Cantidad total de alimento producido en el período t

δ_{it}: Si es que se produce el alimento tipo i en el período t

(1): Definición de y_t. Suma de todos los tipos de alimento producidos en t.

(2) y (3): Se debe producir más de k y menos de K unidades de alimento por período

(4) y (5): Definición de δ_{it}. Con un M suficientemente grande, y un m suficientememte chico. x_{it} es mayor a 0, sí y sólo sí, δ_{it} es mayor a 0.

(6): Si se producen alimentos tipo 1 o 2, entonces no se puede producir alimento tipo 3, y visceversa

(7): Se deben producir al menos H unidades de alimento tipo 2 dentro de los T períodos.

(8): Se puede producir alimento tipo 3 en a lo más n períodos

(9): La producción de aliemto tipo 1 por período no puede ser mayor al 40 % de la producción del período

b) Primero se deben plantear las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} \text{máx } f(x) \sim \text{mín } -f(x) &\longrightarrow P') \quad && \text{mín } \sqrt{7x + |x+y| - min\{x, |x+y|\}} \\ \text{mín } f(x) \sim \text{mín } g(f(x)) \text{ con } g(x) \text{ estrictamente creciente} &\longrightarrow P'') && \text{mín } 7x + |x+y| - min\{x, |x+y|\} \\ -min\{f(x), g(x)\} \sim max\{-f(x), -g(x)\} &\longrightarrow P''') && \text{mín } 7x + |x+y| + max\{-x, -|x+y|\} \end{aligned}$$

Hasta que finalmente se puede reescribir el problema equivalente como:

$$\begin{aligned} \hat{P}) \qquad & \text{mín } 7x + \mu_1 + \mu_2 \\ s.a. \quad & \\ & \begin{array}{rcl} x + y & \leq & \mu_1 \\ -(x+y) & \leq & \mu_1 \\ -x & \leq & \mu_2 \\ -(x+y) & \leq & \mu_2 \\ (x+y) & \leq & \mu_2 \\ x & \in & \Omega \end{array} \end{aligned}$$

c) *i*) A continuación se muestra el gráfico del problema:

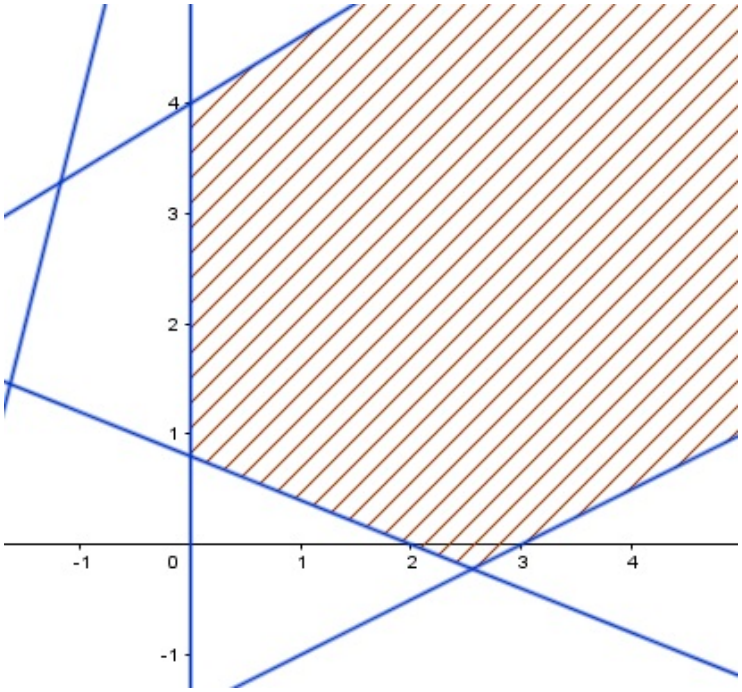


Figura 2: Gráfico i)

En rojo se encuentra el conjunto de soluciones factibles, y en azul las restricciones.

ii) No es posible afirmarlo, pues la región no está acotada. Es decir, es posible encontrar un rayo que pertenezca por completo a la región.

iii) La región del problema quedará de la siguiente forma:

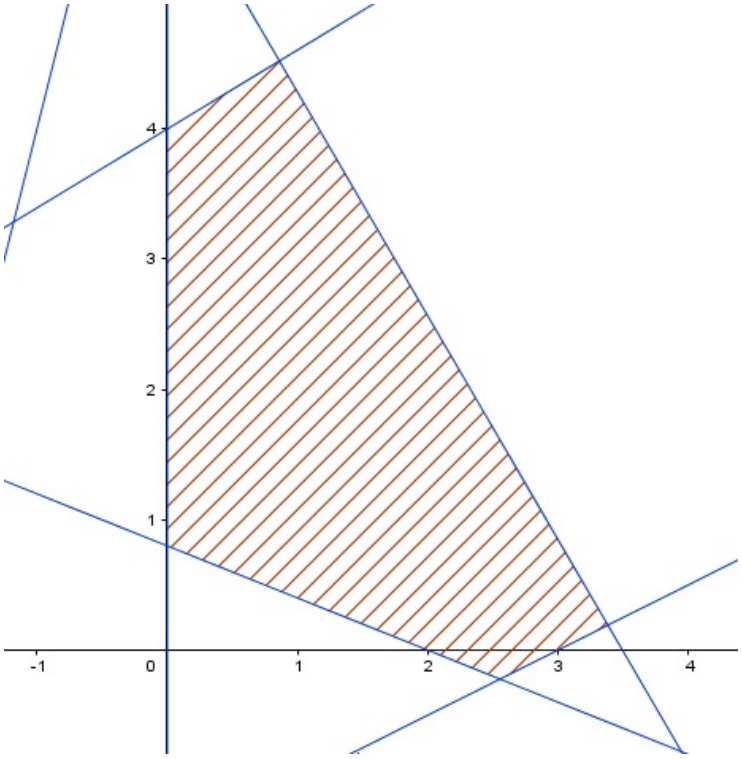


Figura 3: Gráfico iii)

Ahora el dominio del problema está acotado, cerrado, y no existe ningún rayo que se contenga por completo. Además, se tiene que la función objetivo es continua, por lo que finalmente, usando el Teorema de Bolzano-Wierstrass se puede afirmar que el problema tiene al menos una solución óptima.

iv) La solución será el punto $A = (2{,}56, -0{,}22)$, y el valor óptimo será 5,04.

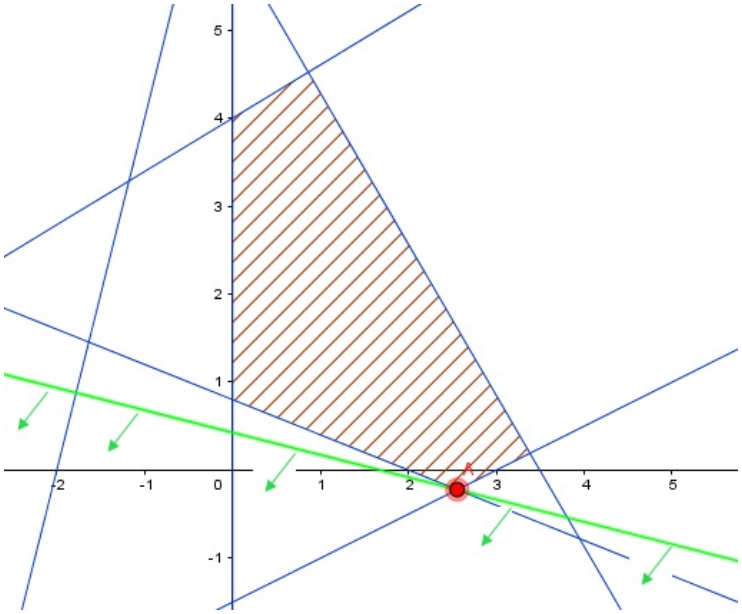


Figura 4: Gráfico iv)

En la figura, la línea verde es la curva de nivel de la función función objetivo, y las flechas su dirección de aumento.

v) Para que la solución se mantenga, la relación $\frac{c_1}{c_2}$ debe variar entre las pendientes de las restricciones que definen el vértice óptimo, es decir:

$$\frac{-1{,}5}{3} = -0{,}5 \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{0{,}8}{2} = 0{,}4$$