PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2016
Profesores: A.Cataldo - R.Cuadrado
S.Encina - F.Palominos - J.Vera

Interrogación 3. Solución

Duración: 2 horas y 20 minutos.

Pregunta 1 (15 puntos)

(a) (**2 puntos**) Sin importar la estructura del problema, el método de Newton aplicado a un problema de Optimización no restringida garantiza la convergencia al óptimo. ¿Es verdadera o falsa esta afirmación? Jutifique con precisión.

Respuesta: No, no es verdad, ya que, para comenzar, el método prodría simplemente no converger, y si converge, en general lo hace a un punto que satisface $\nabla f(x) = 0$, el cual puede ser un punto silla, entre otras cosas. Sólo condiciones adicionales (convexidad o una condición de segundo orden) pueden garantizar convergencia a un óptimo local.

(b) (**4 puntos**) Demuestre que la siguiente relación:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq ln\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}\right)$$

se cumple para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, con $x_i > 0, i = 1, \ldots, n$. (Ind: piense en una función que, al ser optimizada, lo puede llevar a la relación).

Respuesta: Sea

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1\ldots n} x_i^2}{n^2} - ln(\prod_{i=1\ldots n}\frac{x_i}{n})$$

Expandiendo el término

$$f(x) = \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n^2} - (ln(\frac{x_1}{n}) + \ldots + ln(\frac{x_n}{n}))$$
$$f(x) = \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n^2} - (ln(x_1) + \ldots + ln(x_n) - nln(n))$$

Luego si demostramos que $\forall x_i \geq 0, f(x) \geq 0$ lograríamos demostrar lo anterior.
Demostrar lo anterior es lo mismo que demostrar que mín $f(x) \geq 0, \forall x_i \geq 0$

Buscaremos los puntos críticos de la función:

$$\frac{df(x_i)}{dx_i} = \frac{2x_i}{n^2} - \frac{1}{x_i}$$

Luego el punto crítico se encontrará en $x_i = \frac{n}{\sqrt{2}}$

Evaluando $f(x)$ en $x = \frac{n}{\sqrt{2}}$

$f(\frac{n}{\sqrt{2}}) = \frac{(\frac{n}{\sqrt{2}})^2+...+(\frac{n}{\sqrt{2}})^2}{n^2} - (ln(\frac{n}{\sqrt{2}}) + ... + ln(\frac{n}{\sqrt{2}}) - nln(n))$ $f(\frac{n}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2} - (nln(\frac{n}{\sqrt{2}}) - nln(n))$ $f(\frac{n}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2} - nln(\sqrt{2}) \geq 0$

Por último, falta demostrar que $f(x)$ es convexa $\forall x_i > 0$

Si calculamos el hessiano de la matriz $f(x)$ y demostramos que esta es definita positiva comprobaríamos que el punto crítico anteriormente encontrado corresponde al mínimo global de la función.

Para ello calculamos las segundas derivadas de $f(x)$,

$\frac{d^2 f(x)}{dx_i^2} = \frac{2}{n} + \frac{1}{x^2}, \forall i = 1...n$

$\frac{d^2 f(x)}{dx_i dx_j} = 0, \forall i \neq j$

Luego la matriz hessiana corresponde a una matriz diagonal, con únicamente elementos positivos en la diagonal, por ende es definida positiva.

$\therefore f(x) \geq 0, \forall x_i > 0$

(Nota de evaluación: dar 3 puntos por el desarrollo del mínimo y un punto por el argumento de la convexidad)

(c) (**4 puntos**) Considere un problema de optimización con restricciones que es resuelto usando las condiciones KKT. Explique por qué los multiplicadores asociados a restricciones de igualdad no tienen restricción de signo, y sí la tienen los multiplicadores asociados a restricciones de desigualdad (por ejemplo, $\lambda \geq 0$, donde λ es un multiplicador).

Respuesta: Esto se explica fundamentalmente por la presencia de desigualdades. Esto hace que la optimalidad quede caracterizada en función de direcciones factibles, lo que induce un signo en los multiplicadores de la combinación lineal entre el gradiente de la función objetivo y los gradientes de las restricciones activas.

(d) (**5 puntos**) Considere un problema de programación lineal:

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ s.a. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Construya el Lagrangeano de este problema y plantee las condiciones KKT. ¿Qué relación existe entre lo que se obtiene y las condiciones de optimalidad del Simplex? ¿Qué relación existe también con el problema dual a P)?

Respuesta: El Lagrangeano es

$$L(x, \lambda) = c^T x + \lambda^T (Ax - b)$$

Las condiciones KKT dicen que $\nabla_x L(x, \lambda) \geq 0$, $x^T \nabla_x L(x, \lambda) = 0$. Esto se traduce en:

$$c + A^T \lambda \geq 0, x^T (c + A^T \lambda) = 0$$

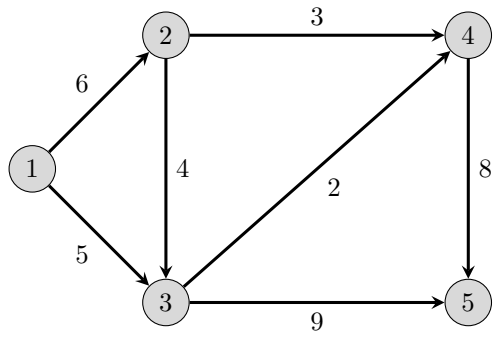
Notemos que los multiplicadores λ no tienen ningún signo especial, así que vamos a redefinir $\pi = -\lambda$. Con esto, tenemos que la condición de optimalidad es $c - A^T \pi \geq 0$. Definamos $\bar{c} = c - A^T \pi$ y tenmos que esto dice que $\bar{c} \geq 0$, donde $\bar{c}$ son precisamente los costos reducidos del Simplex y π son los multiplicadores del Simplex. La condición de holgura complementaria, por otro lado, expresa que $x^T \bar{c} = 0$, lo que dice que los costos reducidos de las variables básicas son nulos.

Por otro lado, la expresión $A^T \pi \leq c$ dice que los multiplicadores de Lagrange son factibles en el dual del problema P). De hecho, son soluciones óptimas del dual, lo que se puede ver simplemente del hecho que, por la holgura complementaria, $x^T (c - A^T \pi) = 0$, lo que implica $c^T x = b^T \pi$, es decir las soluciones cumplen dualidad fuerte.

(Nota de evaluación: 2 puntos por esribir el lagrangeano y la condición KKT, 2 puntos por identificar eso como equivalente a la condición de costos reducidos y 1 punto por concluir que es solución factible del dual y óptima).

Pregunta 2 (15 puntos)

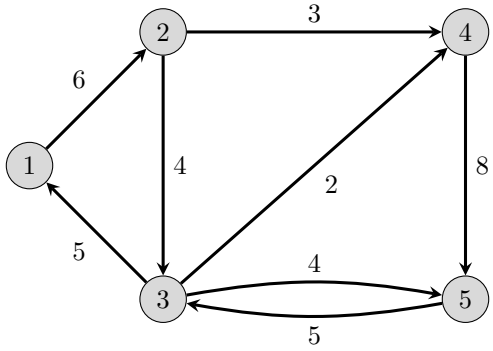
Considere el siguiente grafo, en el que sobre los arcos está colocada la capacidad máxima de flujo que puede transportarse (en una misma unidad de tiempo) por ese arco de la red. Además, se sabe que la cota mínima al flujo es igual a 0 para todos los arcos.



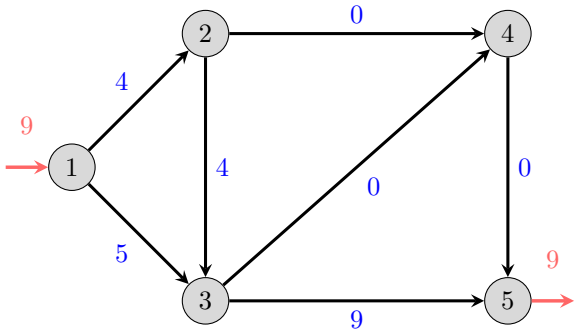
A través de esta red se desea transportar flujo desde el nodo fuente u origen, (1), al nodo sumidero o destino, (5).

(a) (**4 puntos**) Considere que se transportan 5 unidades de flujo desde el nodo fuente al sumidero a través de la ruta 1–3–5, y que todas las demás rutas disponibles en la red transportan 0 unidades de flujo. Basándose en esta solución, realice solamente una iteración del algoritmo de Ford y Fulkerson. Asegúrese de elegir una ruta incremental que envíe el máximo flujo adicional posible. Explicite sus cálculos e indique con precisión el grafo residual.

RESPUESTA:
El grafo residual para el flujo de 5 unidades que pasa a través de la ruta 1–3–5 es:



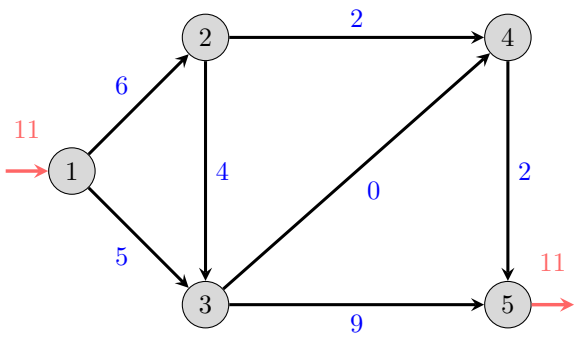
Se puede observar que la ruta de máximo incremento es 1–2–3–5, que permite un flujo incremental de 4 unidades. El nuevo flujo es de 9, y se distribuye de la siguiente manera:



(Nota de evaluación: Si no usaron el mejor camino de aumento de flujo, pero lo otro está correcto, descontar sólo un punto)

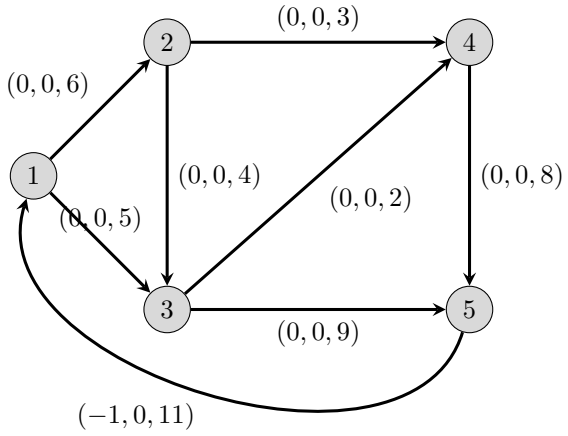
(b) (**1 punto**) Ahora, a partir de la solución obtenida en (a) determine visualmente el flujo máximo que puede pasar por la red descrita en el grafo.

Respuesta:
Visualmente, y basado en la solución de la parte (a), se tiene que el flujo máximo que puede pasar por esta red de es 11 unidades, y se distribuye:



(c) (**2 puntos**) Transforme el problema planteado en el grafo original en su equivalente como un problema de flujo a costo mínimo (basta que haga un dibujo de la red correspondiente indicando en frma precisa qué significa cada elemento y cada dato que use).

Respuesta:
Para transformar el grafo del problema de flujo máximo en uno de flujo a costo mínimo tenemos que agregar un arco de recirculación desde el nodo 5 al nodo 1, colocar como costo de todos los arcos originales en 0 y el costo del arco de recirculación en -1. Además, consideramos que todas las cotas mínimas son iguales a cero, la capacidad máxima de los del grafo original son las dadas y del arco de recirculación corresponde al flujo máximo obtenido en la parte (b). Entonces, el grafo queda:



en el que sobre cada arco se coloca la información del costo, cota mínima y capacidad máxima respectivamente.

Una formulación alternativa es colocar el arco adicional $(1, 5)$, en la dirección del origen al destino. Sea α igual a la suma de todas las capacidades de los arcos. Colocamos una oferta igual a α en el nodo 1 y una demanda igual a $-\alpha$ en el nodo 5, costos nulos en todos los arcos originales, y costo igual a -1 en

el arco $(1,5)$. Se conservan las cotas superiores en los arcos originales. De este modo, el buscar el flujo a costo mínimo para cumplir la oferta y demanda, obliga a enviar la mayor cantidad de flujo por los arcos originales, usando $(1,5)$ sólo para la cantidad que excede el flujo máximo.

(d) (**4 puntos**) Considere ahora que el flujo que se desea transportar a través de la red desde el nodo 1 al nodo 5 es el flujo máximo que ha obtenido en la parte (b), y que la información que aparece sobre los arcos, ahora corresponde a un costo unitario de transporte a través de ese arco (y entonces, la información ya no corresponde a la capacidad máxima de ese arco, de hecho, ya no hay capacidades). Utilice el algoritmo de Dijkstra para determinar la forma en la que se deben transportar esas unidades a través de la red descrita por el grafo (modificado) de manera de minimizar el costo total de transporte.

RESPUESTA:
Como la capacidad máxima de cada arco es infinita, se puede resolver el problema de flujo a costo mínimo encontrando la ruta más corta (la más barata en costo) y transportar todo el flujo (las 11 unidades) por esa ruta. La siguiente tabla muestra el desarrollo del algoritmo de Dijkstra. La información de cada celda corresponde a (predecesor(i), distancia(i)).

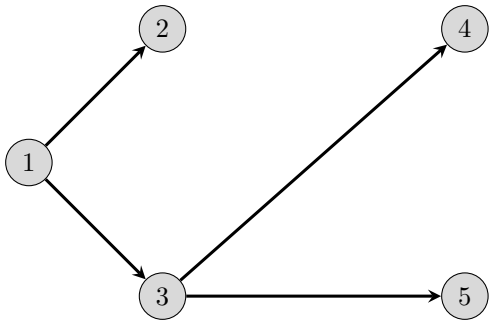
	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
1	$(1,0)$	$(1,0)$				
2	$(-,\infty)$	$(1,6)$	$(1,6)$	$(1,6)$		
3	$(-,\infty)$	$(1,5)$	$(1,5)$			
4	$(-,\infty)$	$(-,\infty)$	$(3,7)$	$(3,7)$	$(3,7)$	
5	$(-,\infty)$	$(-,\infty)$	$(3,14)$	$(3,14)$	$(3,14)$	$(3,14)$
Revisar		1	3	2	4	5

por lo que se deben transportar las 11 unidades por la ruta 1–3–5.

Los mismo cálculos puede hacer, onviamente, usando los dibujos del grafo, no es necesario armar la tabla de más arriba.

(e) (**4 puntos**) Utilice el criterio de optimalidad del algoritmo Simplex especializado en redes para determinar si el árbol de distancias mínimas obtenido en la parte (d) es óptimo o no.

RESPUESTA:
Para ello, construyamos el árbol de rutas mínimas de la parte (d):



utilizamos los flujos básicos para calcular el valor de los π_s:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{12} &= 0 = 6 - \pi_1 + \pi_2 \\
\bar{c}_{13} &= 0 = 5 - \pi_1 + \pi_3 \\
\bar{c}_{34} &= 0 = 2 - \pi_3 + \pi_4 \\
\bar{c}_{35} &= 0 = 9 - \pi_3 + \pi_5
\end{aligned}$$

que da: $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = -6$, $\pi_3 = -5$, $\pi_4 = -7$ y $\pi_5 = -14$.

y ahora calculamos los costos reducidos de los flujos no básicos:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{23} &\quad 4 - (-6) + (-5) &&= 5 \\
\bar{c}_{24} &\quad 3 - (-6) + (-7) &&= 2 \\
\bar{c}_{45} &\quad 8 - (-7) + (-14) &&= 1
\end{aligned}$$

que como se observa es óptima.

Pregunta 3 (15 puntos)

(a) (**3 puntos**) Para el siguiente problema no lineal:

$$P) \quad \text{mín} \quad \tfrac{1}{2}x^4 \quad - \quad \tfrac{1}{4}x \quad + \quad 2y^4 \quad - \quad y$$

haga una iteración mediante el Método del Gradiente partiendo de punto $(x^0, y^0) = (0, 0)$. Indique una forma de saber qué tan buena será la solución que habrá calculado despúes de una iteración. Muestre con cuidado los cálculos.

Respuesta: para mostrar una iteración del Método del Gradiente para este problema no lineal, debemos encontrar la dirección de decenso

$$d^1 = -\nabla f(x, y) = \left[-2x^3 + \tfrac{1}{4} \quad , \quad -8y^3 + 1\right]$$

Con lo que $(x^1, y^1) = (0, 0) + \lambda(\frac{1}{4}, 1) = (\frac{\lambda}{4}, \lambda)$, para posteriormente resolver:

$$\min_{\lambda \geq 0} f\left(\frac{\lambda}{4}, \lambda\right) = \frac{1}{512}\lambda^4 - \frac{1}{16}\lambda + 2\lambda^4 - \lambda = \frac{1025}{512}\lambda^4 - \frac{17}{16}\lambda$$

Luego derivamos en terminos de λ e igualamos a cero, obteniendo:

$$\nabla f\left(\frac{\lambda}{4}, \lambda\right) = \frac{1025}{128}\lambda^3 - \frac{17}{16} = 0$$

$$\lambda^3 = \frac{136}{1025} \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{\frac{136}{1025}}$$

Con esto tenemos que el punto en una iteración es $(x^1, y^1) = (\frac{\lambda}{4}, \lambda) = \left(\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{136}{1025}}, \sqrt[3]{\frac{136}{1025}}\right) \approx (0{,}128; 0{,}51)$

Luego si queremos ver que tan bueno es esta solución encontrada, debemos ver si es aproximadamente estacionario este punto para $f(x, y)$, en otras palabras, que su gradiente sea lo suficientemente cercano al vector cero (o que su norma euclidiana sea menor a un valor pequeño predefinido que llamaremos ϵ).

$$\left\|\nabla f\left(\frac{\lambda}{4}, \lambda\right)\right\| = \sqrt{\left(2\frac{1}{64}\frac{136}{1025} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(8\frac{136}{1025} - 1\right)^2} \approx 0{,}3492 \leq \epsilon$$

(Nota de evaluación: Como los estudiantes no tienen acceso a calculadora,está bien si todos los números están expresados en función de la solución de λ. En la última parte, es suficiente si escriben la norma del gradiente que hay que calcular, independientemente del grado de simplificación uqe hagan en los números).

(b) (**3 puntos**) Si en (a) quisiera ahora resolver mediante el Método de Newton, ¿existirá algún problema?, ¿cuál?. Indique dos alternativas para poder evitar el problema detectado. En caso de no haber ningún problema, haga una iteración del Método de Newton.

Respuesta: para Newton, tenemos que calcular el Hessiano de la función, el que es:

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 6x^2 & 0 \\ 0 & 24y^2 \end{bmatrix}$$

Podemos ver que al evaluarlo en el punto $(0, 0)$ el Hessiano es identicamente nulo, luego no se puede usar el Método de Newton aquí.

Esto puede arreglarse de dos formas posibles: la primera es partir de un punto inicial diferente en donde el Hessiano sea invertible, es decir, definido positivo; la segunda es perturbar la matriz Hessiana de una forma $\nabla^2 f(0, 0) + \mu I$ de modo tal que esta matriz sí sea definida positiva. Para esto, μ tiene que ser positivo y con eso bastaría en este caso.

(c) (**3 puntos**) Resuelva el siguiente problema no lineal:

$$P) \quad \begin{array}{lccccccc} \text{Min} & xy & + & yz & + & xz & & \\ \text{s.a:} & x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}$$

Respuesta: Este problema tiene puntos estacionarios que satisfacen la condición de Lagrange. En efecto, el lagrangeano del problema es:

$$L(x, \lambda) = xy + yz + xz + \lambda(x + y + z - 3)$$

Calculando las derivadas, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= y + z + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= x + z + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= y + x + \lambda = 0 \end{aligned}$$

Restando la segunda relación de la primera tenemos que $y = x$ y haciendo lo mismo entre la tercera y la segunda tenemos que $x = y$. Luego, $x = y = z$ y por la restricción se obtiene que $x = y = z = 1$. Ese es un punto estacionario.

Sin embargo, el problema en realidad no tiene solución, su valor es no acotado. Esto se puede ver fácilmente tomando el camino $(x(t), y(t), z(t)) = (-t, t + 3, 0)$ el que cumple con $x(t) + y(t) + z(t) = 3$. Reemplazando en la función objetivo, se tiene:

$$f(t) = -t(t + 3) = -t^2 - 3t \to -\infty$$

d) (**6 puntos**) En problemas de operaciones es importante determinar los tamaños óptimos de los lotes que se van a ordenar de un conjunto de productos. Cuando se ordenan productos, se incurre en costos fijos (llamados de ordenamiento), correspondientes a un parámetro α, pero además estos productos deben ser guardados y eso genera costos de "inventario", dados por un parámetro β. La teoría de Gestión de Operaciones establece que si, para un producto j, se ordena una cantidad (lote) Q_j, el costo por unidad de tiempo incurrido es $\alpha_j \frac{D_j}{Q_j} + \beta_j \frac{Q_j}{2}$, donde d_j es la demanda para el producto j. Suponga que una empresa tiene que ordenar de un total de n productos, cada unidad del producto j ocupa un volumen v_j en una bodega, y hay un espacio total disponible igual a K. La empresa plantea el siguiente modelo de Optimización para calcular los lotes óptimos:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{d_j}{Q_j} + \beta_j \frac{Q_j}{2} \\ s.a. & \sum_{j=1}^{n} v_j Q_j \leq K \\ & Q_j \geq 0, j = 1, \ldots, n \end{array}$$

i) (**1 puntos**) Explique brevemente, pero justificadamente, por qué este problema tiene solución única.

Respuesta: Esto se sigue de que el problema es convexo y, además, la función objetivo es estrictamente convexa por lo que no podría haber dos soluciones óptimas distintas (todos los puntos combinación convexa de esas dos soluciones darían el mismo valor, lo que contradice la convexidad estricta).

ii) (**4 puntos**) Usando KKT, encuentre la solución óptima del problema.

Respuesta: El Lagrangeano del problema es:

$$L(Q, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{d_j}{Q_j} + \beta_j \frac{Q_j}{2} + \lambda(\sum_{j=1}^{n} v_j Q_j - K)$$

Notemos ahora que podemos estar seguro que la solución óptima cumple $Q_j > 0, j = 1, \ldots, n$ ya que la función objetivo tiende a ∞ cuando Q_j se aproxima a 0. Rspecto a la restricción, tenemos dos posibilidades: o se cumple con =, y el espacio de almacenamiento no alcanza, o se cumple con <. En este caso, la solución óptima se obtiene de derivar la función objetivo e igualar a 0. Eso da:

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2\alpha_j d_j}{\beta_j}}$$

En caso contrario, basta buscar el punto que cumpla $\nabla_x L(Q, \lambda) = 0$. Tenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_j} = -\frac{\alpha_j d_j}{Q_j^2} + \frac{\beta_j}{2} + \lambda v_j = 0$$

Despejando Q_j de esta ecuación se tiene:

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2\alpha_j d_j}{\beta_j + 2\lambda v_j}}$$

Estos valores dependen de λ. Ahora debemos usar la restricción:

$$\sum_{j=1}^{n} v_j \sqrt{\frac{2\alpha_j d_j}{\beta_j + 2\lambda v_j}} = K$$

No es posible despejar analíticamente λ de esta ecuación, pero puede ser resuelta por cualquier método para resolver ecuaciones en una variable.

ii) (**1 puntos**) ¿Qué significado le puede atribuir al multiplicador de Lagrange?

Respuesta: Como se puede ver, si el espacio no es escaso $\lambda = 0$ y la solución es la primera planteada. En caso contrario, un término de la forma $2v_j\lambda$ aparece sumada al costo de inventario. Recordemos que λ es el precio sombra de la restricción de espacio, es el costo que tiene para el problema el espacio limitante. Luego, el que se sume al costo de iventario es natural: almacenar debiera ser más caro mientras más escaso sea el espacio.

Pregunta 4 (15 puntos)

Un municipio está organizando un gran sistema de transporte para trasladar a las personas que asistan a una gran feria de la ciudad. El recinto de la feria tiene una entrada y una salida y se supone que las personas se distribuirán dentro de la feria según diversos factores. Esto ha llevado a representa el sistema como una red $G = (V, A)$, donde V representa un conjunto de puntos específicos de tránsito y de intercambio de personas dentro de la feria (transbordo), y A representa el conjunto de conexiones; es decir, el arco (i, j) existen en A si alguien se puede transportar entre el nodo i y el nodo j. Existen dos nodos especiales: $r \in V$ representa la entrada a la feria, y $s \in V$ representa la salida. El concesionario de la feria recibirá un ingreso α por cada persona que entra y sale de la feria. El municipio, por otro lado, cobra al concesionario un costo c_{ij} por cada usuario que viaja entre el nodo i y el nodo j. Adicionalmente, en cada arco $(i, j) \in A$, el flujo no puede ser más grande que una cantidad u_{ij} conocida.

a) (4 pts) Construya un modelo de optimización que permita al concesionario maximizar sus ingresos.

Respuesta: Sea F el flujo de personas que entran (y salen) a la feria. Sea x_{ij} el flujo de personas que se mueven entre el punto i y el j. El módelo es:

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \alpha F - \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \\
s.a. \quad & \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(k,i)\in A} x_{ki} = 0, i \neq r, s \\
& \sum_{(r,j)\in A} x_{rj} - \sum_{(k,r)\in A} x_{kr} - F = 0 \\
& \sum_{(s,j)\in A} x_{sj} - \sum_{(k,s)\in A} x_{ks} + F = 0 \\
& 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \forall (i,j) \in A
\end{aligned}$$

b) (5 pts) Suponga ahora que el municipio considera algunos efectos adicionales. En primer lugar, le preocupa la congestión que se pueda presentar en el sistema y para eso quiere que el costo unitario c_{ij} ya no sea constante (como en la parte anterior), sino que aumente sustancialmente cuando el flujo en el arco (i, j) se acerque a la cota u_{ij}, pero el flujo debe respetar esa cota. Proponga una función de costos que haga precisamente eso y modifique su modelo de (a) para considerar esta nueva característica. Explique los supuestos que haga, parámetros adicionales que tenga que definir, etc.

Respuesta: Aquí hay más de una posible respuesta.

Una alternativa es la siguiente, definir $c_{ij} = \bar{c}_{ij} x_{ij}$, es decir, el costo unitario aumenta linealmente. De este modo, el costo total en un arco es igual a $\bar{c}_{ij} x_{ij}^2$ y aumenta de forma no lineal cuando crece el flujo. el parámetro $\bar{c}_{ij}$ es fijo.

Otra alternativa es definir $c_{ij} = \bar{c}_{ij} + \gamma_{ij} x_{ij}$ y con esto el costo total en el arco es $\bar{c}_{ij} x_{ij} + \gamma_{ij} x_{ij}^2$. Aquí, el crecimiento del costo se puede controlar mejor que en la primera alternativa, mediante el parámetro γ_{ij}.

Otra alternativa es que el costo total sea $\bar{c}_{ij} x_{ij} - \log(u_{ij} - x_{ij})$. Esta función crece a ∞ cuando x_{ij} se acerca a la cota superior, es la que más penaliza, de hecho.

Cualquier otra alternativa similar es válida, pero la idea es que crezca "fuerte".

c) (6 pts) El otro problema que le preocupa al municipio es la congestión en los puntos de transbordo de asistentes y la disparidad de flujo entre los distintos arcos. Para esto, le ha establecido al concesionario que en cada arco (i, j), en caso que sea usado por los visitantes, el flujo debe ser al menos igual a una cantidad m_{ij} y, además, que en caso que algún punto de transbordo sea usado, el numero de conexiones que le aporten flujo sea exactamente igual al número de conexiones que sacan flujo. Modifique el modelo de la parte b) para representar esto.

Respuesta: Para esto, hay que definir variables binarias z_{ij} que valen 1 si hay flujo en el arco (i, j). Estas se usan para forzar flujos mínimos y máximos, en caso que haya flujo, y además se pueden usar para "contar" arcos entrantes y salientes para escribir la situación propuesta. El modelo modificado es:

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \alpha F - \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \\
s.a. \quad & \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(k,i)\in A} x_{ki} = 0, i \neq r, s \\
& \sum_{(r,j)\in A} x_{rj} - \sum_{(k,r)\in A} x_{kr} - F = 0 \\
& \sum_{(s,j)\in A} x_{sj} - \sum_{(k,s)\in A} x_{ks} + F = 0 \\
& z_{ij} m_{ij} \leq x_{ij} \leq z_{ij} u_{ij}, \forall (i,j) \in A \\
& \sum_{(i,j)\in A} z_{ij} = \sum_{(k,i)\in A} z_{ki}, i \neq r, s \\
& z_{ij} \in \{0, 1\}, (i,j) \in A
\end{aligned}
$$

En este modelo la restricción de igualdad de conexiones está escrita para todos los nodos distintos al origen y destino, pero no importa si se escribe para todos.