PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2021 - 1
Profesores: G. Angulo - R. Cuadrado
J. González - S. Vásquez
F. Verástegui

Interrogación 1

Duración: 150 minutos.

INSTRUCCIONES:

- ◇ *La prueba contiene 60 puntos.*
- ◇ *La prueba es sin apuntes y sin equipos electrónicos. Dichos equipos deben estar siempre apagados.*

Pregunta 1 (25 puntos)

En el futuro, se espera que los autos eléctricos puedan contribuir a la descarbonización de la economía. Además de ser eficientes, estos tienen la capacidad de apoyar a la red eléctrica; si están conectados, mediante la carga y descarga de su batería en distintas horas, pueden facilitar la entrada de energía renovable y entregar electricidad cuando el sistema necesita energía, apoyando así la operación del sistema.

Suponga que en el Campus San Joaquín se han instalado $\mathcal{L}$ estacionamientos con cargadores para autos eléctricos. Considere un total de $0 < \mathcal{K} \leq \mathcal{L}$ autos eléctricos, que diariamente van al Campus, y estacionan en alguno de estos cargadores. Suponga que, para cada día, usted conoce el estacionamiento en el cual se ubicará el auto, información que se representa a través del parámetro $\varepsilon_{k,l} \in \{0,1\}$, el cual vale 1 si y solo si el auto $k \in \{1,\ldots,\mathcal{K}\}$ se ubica en el estacionamiento $l \in \{1,\ldots,\mathcal{L}\}$.

Con esta información, usted se dispone a construir un modelo que permita usar estos autos eléctricos para apoyar a la red, cargando y descargando las baterías, asegurándose que cada usuario pueda volver a su casa al final del día, y que no se dañe la batería de ningún auto.

Para efectos prácticos, considere que el día puede ser dividido en bloques temporales $i \in \{1,\ldots,T\}$. Para cada auto $k \in \{1,...,\mathcal{K}\}$, usted conoce el bloque temporal en que llegará y saldrá del Campus, dados respectivamente por t_k^{Start} y t_k^{End}, ambos pertenecientes al conjunto $\{2,\ldots,T-1\}$, con $t_k^{\text{Start}} < t_k^{\text{End}}$. Además, usted sabe con anticipación con cuánta carga llegará el auto, y cuánta carga necesita tener al momento de retirarse para que el usuario pueda volver a su casa, respectivamente, Q_k^{Start} y Q_k^{End}.

En cada bloque temporal $t \in \{1,...,T\}$, el operador de la red eléctrica percibe un beneficio por unidad de energía $p_t \in \mathbb{R}$ que toma valores más positivos cuando a la red le es más preferible recibir energía, y valores más negativos cuando a la red le es más preferible entregar energía. Considere que en un bloque temporal, la energía que fluye hacia o desde el vehículo estacionado en $l \in \{1,\ldots,\mathcal{L}\}$ es un valor constante $\gamma_l > 0$ que varía para distintos estacionamientos, por las características de cada cargador.

Usted ha logrado convencer a los dueños de los vehículos para que usted pueda decidir, en cada bloque temporal $t \in \{1,...,T\}$, si la batería de sus vehículos debe cargarse o descargarse (no se puede hacer las dos cosas al mismo tiempo, pero puede no hacer ninguna). Para cada vehículo $k \in \{1,...,\mathcal{K}\}$, su dueñ@ sólo le exige que, al momento de retirarse del estacionamiento tenga suficiente carga para volver a su casa, y que, desde que llegó al estacionamiento, no haya incurrido en más de $\beta_k \in \mathbb{Z}_+$

'episodios de ciclaje'. Un episodio de ciclaje está definido como pasar directamente de carga a descarga, o viceversa, en dos bloques temporales consecutivos. Estos cambios bruscos, hechos de forma reiterada, pueden llegar a dañar la batería.

Formule un problema de optimización lineal entera que permita decidir cuándo cargar o descargar cada batería, de forma de brindar el máximo apoyo a la red eléctrica, respetando las condiciones impuestas por los dueños de los vehículos.

Solución:

Debemos definir el comportamiento de la batería durante el día. Para esto, consideraremos un modelo similar al de inventario, a partir de las siguientes variables:

- $C_{k,t} \in \{0,1\}$: toma valor 1 si y solo si la batería del auto k se carga en el bloque horario t.
- $D_{k,t} \in \{0,1\}$: toma valor 1 si y solo si la batería del auto k se descarga en el bloque horario t.
- $Q_{k,t} \in \mathbb{R}^+$: Estado de carga, o energía en la batería, del auto k al principio del bloque horario t.

Sabemos, por enunciado, que la batería no puede cargarse y descargarse en una misma hora, y que no debemos considerar carga ni descarga cuando el auto no esté en el Campus. Esto lo podemos modelar a partir de las siguiente restricciones lógicas:

$$C_{kt} + D_{kt} \leq 1 \qquad \forall k \in \{1,...,\mathcal{K}\}, \forall t \in \{1,...,\mathcal{T}\}, \tag{1}$$

$$C_{kt} + D_{kt} \leq 0 \qquad \forall k \in \{1,...,\mathcal{K}\}, \forall t \leq t_k^{\text{Start}} - 1 \tag{2}$$

$$C_{kt} + D_{kt} \leq 0 \qquad \forall k \in \{1,...,\mathcal{K}\}, \forall t \geq t_k^{\text{End}} \tag{3}$$

Luego, el modelo de inventario para la batería del auto está dado por las siguientes restricciones:

$$Q_{k,t_k^{\text{Start}}} = Q_k^{\text{Start}} \qquad \forall k \in \{1,...,\mathcal{K}\} \tag{4}$$

$$Q_{k,t_k^{\text{End}}} = Q_k^{\text{End}} \qquad \forall k \in \{1,...,\mathcal{K}\} \tag{5}$$

$$Q_{k,t+1} = Q_{k,t} + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \gamma_l \varepsilon_{k,l} (C_{k,t} - D_{k,t}) \qquad \forall k \in \{1,...,\mathcal{K}\} \tag{6}$$

$$\forall t \in \{t_k^{\text{Start}},...,t_k^{\text{End}} - 1\},$$

donde (4) y (5) representan la carga con la que llega el auto k, al comienzo del período t_k^{Start}, y la carga que necesita para volver a su casa, al comienzo del período t_k^{End}, mientras que (6) víncula el estado de carga, entre períodos consecutivos, con las decisiones de carga y descarga de la batería.

Por otro lado, es necesario definir las condiciones de ciclaje de la batería. Sabemos que esto ocurre en dos escenarios: o bien pasando directamente de carga a descarga, o de descarga a carga, en dos bloques de tiempo consecutivos. Esto puede ser modelado como un '*y lógico*', para lo cuál definimos las siguientes variables:

- $W_{k,t}^1 \in \{0,1\}$: toma valor 1 si y solo si la batería del auto k incurre en ciclaje (carga a descarga) en el bloque temporal t.
- $W_{k,t}^2 \in \{0,1\}$: toma valor 1 si y solo si la batería del auto k incurre en ciclaje (descarga a carga) en el bloque temporal t.

Con esto, el '*y lógico*' queda dado por las siguientes restricciones:

- ◇ Escenario 1: El auto k es cargado en $t-1$ y descargado en t.

$$W^1_{k,t} \leq C_{k,t-1} \qquad \forall k \in \{1,...,\mathcal{K}\}, t \in \{1,...,\mathcal{T}\} \tag{7}$$
$$W^1_{k,t} \leq D_{k,t} \qquad \forall k \in \{1,...,\mathcal{K}\}, t \in \{1,...,\mathcal{T}\} \tag{8}$$
$$C_{k,t-1} + D_{k,t} \leq 1 + W^1_{k,t} \qquad \forall k \in \{1,...,\mathcal{K}\}, t \in \{1,...,\mathcal{T}\} \tag{9}$$

- ◇ Escenario 2: El auto k es descargado en $t-1$ y cargado en t.

$$W^2_{k,t} \leq D_{k,t-1} \qquad \forall k \in \{1,...,\mathcal{K}\}, t \in \{1,...,\mathcal{T}\} \tag{10}$$
$$W^2_{k,t} \leq C_{k,t} \qquad \forall k \in \{1,...,\mathcal{K}\}, t \in \{1,...,\mathcal{T}\} \tag{11}$$
$$D_{k,t-1} + C_{k,t} \leq 1 + W^2_{k,t} \qquad \forall k \in \{1,...,\mathcal{K}\}, t \in \{1,...,\mathcal{T}\} \tag{12}$$

Opcionalmente, podemos combinar las variables $W^1_{k,t}$ y $W^2_{k,t}$ con un '*ó lógico*', definiendo la siguiente variable:

- ◇ $W_{k,t} \in \{0,1\}$: toma valor 1 si y solo si el auto k incurre en ciclaje en el bloque temporal t,

y las siguientes restricciones:

$$W^1_{k,t} \leq W_{k,t} \qquad \forall k \in \{1,...,\mathcal{K}\}, t \in \{1,...,\mathcal{T}\} \tag{13}$$
$$W^2_{k,t} \leq W_{k,t} \qquad \forall k \in \{1,...,\mathcal{K}\}, t \in \{1,...,\mathcal{T}\} \tag{14}$$
$$W_{k,t} \leq W^1_{k,t} + W^2_{k,t} \qquad \forall k \in \{1,...,\mathcal{K}\}, t \in \{1,...,\mathcal{T}\} \tag{15}$$

Con esto, podemos definir una restricción para que ninguna batería exceda el máximo de episodios de ciclaje, de la siguiente manera:

$$\sum_{t \in \{1,...,T\}} W_{k,t} \leq \beta_k \qquad \forall k \in \{1,...,\mathcal{K}\} \tag{16}$$

Con las variables que hemos definido, la función objetivo que maximiza el apoyo a la red eléctrica queda dada por:

$$\text{máx} \sum_{t \in \{1,...,T\}} \sum_{k \in \{1,...,\mathcal{K}\}} \sum_{l \in \{1,...,\mathcal{L}\}} (D_{k,t} - C_{k,t})\, \gamma_l \varepsilon_{k,l}\, p_t \tag{17}$$

Pregunta 2 (15 puntos)

Se le ha encomendado la misión de planificar el calendario de la siguiente temporada de fútbol de Chile. Existen 20 equipos y debe programar las 38 fechas del calendario deportivo. Para ello,

el anterior gerente de la asociación le ha dejado el siguiente modelo de optimización, el cual era utilizado para generar el fixture:

Variables:

- $X_{i,j,t}$ vale 1 si el equipo $i \in \{1, ..., 20\}$ juega de local contra el equipo $j \in \{1, ..., 20\}$ en la fecha $t \in \{1, ..., 38\}$, y 0 en caso contrario.
- $Y_{i,j,t}$ vale 1 si se escoge el partido entre los equipos $i, j \in \{1, ..., 20\}$ como el partido a televisar de la fecha $t \in \{1, ..., 38\}$, y 0 en caso contrario.

Parámetros:

- $\alpha_{i,j}$: Parámetro que mide el atractivo de televisar un partido entre los equipos i, j.

Requisitos:

(a) Se escoge solamente 1 partido por fin de semana para televisar.

(b) El torneo es en formato de todos contra todos, con 2 vueltas de 19 fechas cada uno. En cada vuelta todos los equipos deben enfrentarse entre sí, y la segunda vuelta del torneo debe ser un espejo de la primera vuelta.

(c) Un equipo puede jugar como máximo 2 partidos de visitante seguidos durante el torneo.

(d) Cada equipo debe jugar exactamente 1 vez por fecha.

(e) Se debe balancear el atractivo televisivo que cada equipo recibirá en ambas vueltas del torneo, existiendo a lo más un 20 % de diferencia entre una y otra. El atractivo televisivo para un equipo se considera exclusivamente en los partidos que este participa y que a su vez son escogidos como partido televisado de esa fecha.

Modelo:

$$
\begin{array}{lll}
\text{máx} & \sum_i \sum_j \sum_t \alpha_{i,j} Y_{i,j,t} & \\
s.a. \quad (R1) & X_{i,j,t} = X_{j,i,t+19} & \forall i, j, t : t = \{1, ..., 19\} \\
(R2) & \sum_k X_{i,k,t} + X_{k,i,t} = 1 & \forall i, t \\
(R3) & \sum_j \sum_{\theta=t}^{t+2} X_{j,i,\theta} \leq 2 & \forall i, t : t \leq 36 \\
(R4) & \sum_k \sum_{t=1}^{19} \alpha_{i,k} * (Y_{i,k,t} + Y_{k,i,t}) \leq 1.2 \sum_k \sum_{t=20}^{38} \alpha_{i,k} * (Y_{i,k,t} + Y_{k,i,t}) & \forall i \\
(R5) & \sum_k \sum_{t=20}^{38} \alpha_{i,k} * (Y_{i,k,t} + Y_{k,i,t}) \leq 1.2 \sum_k \sum_{t=1}^{19} \alpha_{i,k} * (Y_{i,k,t} + Y_{k,i,t}) & \forall i \\
(R6) & Y_{i,j,t} \leq X_{i,j,t} & \forall i, j, t \\
(R7) & \sum_i \sum_j Y_{i,j,t} = 1 & \forall t \\
(R8) & \sum_{t=1+19(r-1)}^{19+19(r-1)} X_{i,j,t} + X_{j,i,t} = 1 & \forall i, j \forall r \in \{1, 2\} \\
 & X_{i,j,t}, Y_{i,j,t} \in \{0, 1\} & \forall i, j, t
\end{array}
$$

Actualmente se cuenta con una planificación que satisface todas las restricciones, pero a usted le interesa maximizar el atractivo total en televisión.

(a) **(5 puntos)** Determine que restricción(es) del modelo se utilizan para modelar cada uno de los requisitos planteados.

(b) **(5 puntos)** Compruebe que el modelo admite solución óptima.

Suponga que ahora ha cambiado un poco el reglamento y debe hacer algunos ajustes al modelo. En particular, sabe que hay muchos equipos que decidieron compartir estadio este año. Se tiene que para cada equipo $i \in \{1, ..., 20\}$ existe el subconjunto A_i que contiene todos los equipos con los que comparte su estadio. Por lo tanto, usted debe procurar que dos equipos que comparten estadio no jueguen de local en la misma fecha.

(c) **(5 puntos)** Agregue y/o cambie las restricciones para reflejar el nuevo requerimiento.

Solución:

(a) Se tienen las siguientes restricciones:

(i) Restricción (a): R6 y R7.

(ii) Restricción (b): R1 y R8.

(iii) Restricción (c): R3.

(iv) Restricción (d): R2.

(v) Restricción (e): R4 y R5.

(b) Usemos el teorema de Bolzano-Weierstrass. Para eso, veamos cada uno de los puntos:

- ◇ Se puede observar que la función objetivo es continua.
- ◇ El dominio es cerrado, pues todas las restricciones son no estrictas.
- ◇ El dominio es acotado, dado que todas las variables son binarias, por lo tanto tienen cota inferior 0 y cota superior 1.
- ◇ El dominio es no vacío, puesto que en el enunciado se menciona que existe actualmente una solución que cumple con todas las restricciones.

(c) Se debe incorporar la siguiente restricción:

$$\sum_{j}(X_{i,j,t} + \sum_{k \in A_i} X_{k,j,t}) \leq 1 \qquad \forall i, t$$

Pregunta 3 (20 puntos)

(a) **(3 puntos)** Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa y $\alpha \in \mathbb{R}$. ¿Es verdad que $G = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \geq \alpha\}$ es convexo? Demuestre o refute con un contraejemplo.

Solución: La afirmación es falsa. Como contraejemplo, podemos tomar $f(x) = x^2$ y $\alpha = 1$. En tal caso, $G = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, el cual no es convexo.

(b) **(3 puntos)** Sean (P) $\min\{f(x) : \ x \in D\}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente decreciente. ¿Es verdad que (P') $\max\{g(f(x)) : \ x \in D\}$ es equivalente a (P)? Demuestre o refute con un contraejemplo.

Solución: La afirmación es verdadera, puesto que como $-g$ es estrictamente creciente, (P) es equivalente a $\min\{-g(f(x)) : \ x \in D\}$, el cual a su vez es equivalente a (P').

(c) **(3 puntos)** Explique por qué tener un dominio no cerrado en un problema de optimización puede generar dificultades, aunque sea acotado, y dé un ejemplo de ello.

Solución: La principal dificultad es que pueden existir sucesiones de soluciones factibles cuyos valores objetivos convergen al valor óptimo del problema, pero no lo alcancen. Es lo que ocurre, por ejemplo, con $\text{mín}\{x : \ x \in (0,1]\}$, cuyo valor óptimo es 0, pero no es alcanzado.

(d) **(3 puntos)** Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $L = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \leq \alpha\}$ es compacto y no vacío. Demuestre que f alcanza su mínimo sobre $\mathbb{R}^n$.

Solución: Como L es no vacío, tenemos que $\text{mín}\{f(x) : \ x \in \mathbb{R}^n\} = \text{mín}\{f(x) : \ x \in L\}$. Como además L es compacto y f es continua, por Bolzano-Weierstrass, tenemos que el segundo problema tiene solución óptima, que por consiguiente es solución óptima del primero.

(e) **(3 puntos)** Sea (P) $\text{mín}\{f(x) : \ x \in D\}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo, cerrado y no vacío, y $f : D \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente convexa. ¿Es verdad que (P) tiene solución óptima? Demuestre o refute con un contraejemplo.

Solución: La afirmación es falsa. Como contraejemplo, podemos tomar $D = \mathbb{R}_-$ y $f(x) = e^x$. En tal caso, D y f cumplen las condiciones descritas, pero $\text{mín}\{e^x : \ x \leq 0\}$ no tiene solución óptima.

(f) **(5 puntos)** Sabiendo que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$ es convexa, demuestre que $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dada por $g(y) = \log(y+1)$ es cóncava. Para ello, analice el epigrafo de $-g$.

Solución: Basta verificar que $-g$ es convexa, para lo cual es suficiente demostrar que $\text{Epi}(-g)$ es convexo. Tenemos

$$\begin{aligned}
\text{Epi}(-g) &= \{(y,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : \ -g(y) \leq z\} \\
&= \{(y,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : \ -\log(y+1) \leq z\} \\
&= \{(y,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : \ e^{-z} \leq y+1\} \\
&= \{(y,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : \ e^{-z} - y \leq 1\}.
\end{aligned}$$

Notemos que la función $h(y,z) = e^{-z} - y$ es convexa, puesto que es suma de funciones convexas. Luego, $\text{Epi}(-g) = \{(y,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : \ h(y,z) \leq 1\}$, el cual es convexo por la convexidad de h.