PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2020 - 1
Profesores: : M. Arancibia - R. Cuadrado - J. González P. Guajardo - M. Klapp

Interrogación 2
Duración: 1 hora.

INSTRUCCIONES:

- *La prueba contiene 60 puntos.*
- *La prueba es sin apuntes y sin equipos electrónicos. Dichos equipos deben estar siempre apagados.*

Primera parte (25 puntos)

Pregunta 1 (15 puntos)

(a) (8puntos) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{llllll} \text{máx} & x_1 & + & 2x_2 & & \\ s.a. & 2x_1 & + & x_2 & \geq 6 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq 6 \\ & & & x_2 & \geq 2 \\ & & & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Muestre que su valor objetivo es no acotado utilizando conceptos de dualidad.

Solución: Primero el problema es factible, pues $(2, 2)$ es solución factible (es importante mencionar esto, pues el dual y el primal podrían ser infactibles).

Revisemos el problema dual:

$$\begin{array}{llllllll} \text{mín} & 6y_1 & + & 6y_2 & + & 2y_3 & & \\ s.a. & 2y_1 & + & 2y_2 & & & \geq 1 \\ & y_1 & - & y_2 & + & y_3 & \geq 2 \\ & & & & & y_1, y_3 & \leq 0 \\ & & & & & y_2 & \geq 0 \end{array}$$

Si sumamos la primera restricción más dos veces la segunda queda $4y_1 + 2y_3 \geq 5$. No es posible cumplir esta restricción, pues $y_1, y_3 \leq 0$, por lo tanto el dual es infactible.

Luego el primal debe ser no acotado.

(b) (7puntos) Considere ahora el siguiente problema de optimización con solución óptima en $(2, 2)$:

$$\begin{array}{llllll} \text{mín} & x_1 & + & 2x_2 & & \\ s.a. & 2x_1 & + & x_2 & \geq 6 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq 6 \\ & & & x_2 & \geq 2 \\ & & & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Encuentre la solución óptima de su problema dual.

Solución: Su problema dual es:

$$\begin{array}{llllllll} \text{máx} & 6y_1 & + & 6y_2 & + & 2y_3 & & \\ s.a. & 2y_1 & + & 2y_2 & & & \leq & 1 \\ & y_1 & - & y_2 & + & y_3 & \leq & 2 \\ & & & & & y_1, y_3 & \geq & 0 \\ & & & & & y_2 & \leq & 0 \end{array}$$

Utilizando el Teorema de Holguras Complementarias, dado que $x_1, x_2 > 0$, entonces ambas restricciones duales están en igualdad. Además, la holgura de la segunda restricción primal es > 0, por lo que $y_2 = 0$.

Lo anterior implica que $y_1 = 0,5$ e $y_3 = 1,5$.

Ayuda (Tabla de conversión Primal-Dual):

Minimización	Maximización
Variables	Restricciones
$x \geq 0$	$\alpha^T y \leq \beta$
$x \leq 0$	$\alpha^T y \geq \beta$
x Irrestricta	$\alpha^T y = \beta$
Restricciones	Variables
$\alpha^T x \leq \beta$	$y \leq 0$
$\alpha^T x \geq \beta$	$y \geq 0$
$\alpha^T x = \beta$	y Irrestricta

Pregunta 2 (10 puntos)

Considere el siguiente problema de programación lineal entera:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & -5x + 4y & \\ s.a. & -3x + 2y & \leq 5 \\ & 4x + 8y & \leq 63 \\ & x + y & \geq 3 \\ & x & \leq 6 \\ & x, y & \geq 0 \\ & x, y & \in \mathbb{Z} \end{array}$$

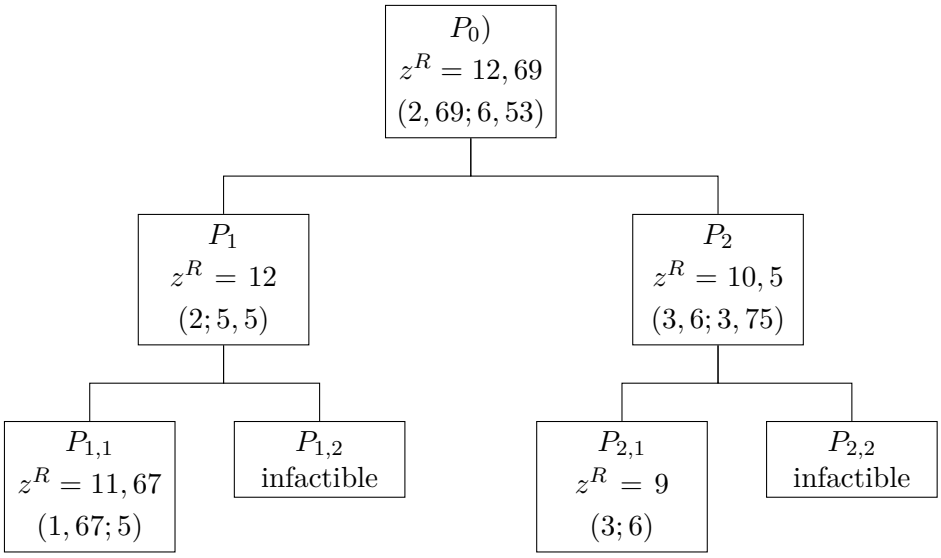
Suponga que usted está resolviendo el problema mediante el algoritmo Branch & Bound y que después de haber resueslto 7 nodos el árbol explorado es el siguiente. En cada nodo se detalla el valor óptimo del problema relajado (z^R) y su correspondiente solución óptima relajada ($x^R; y^R$) o, alternativamente, si el dominio relajado es infactible.

Responda a las siguientes preguntas:

(a) (4p) Al ramificar P_0 en dos nodos (P_1 y P_2). ¿Qué restricción agregó a cada nodo hijo?

Solución: Al nodo P_1 se agrega la restricción $x \leq 2$, mientras que a P_2 se agrega $y \geq 3$.

(b) (3p) Indique el valor incumbente y la mejor cota superior al valor óptimo del problema entero.



Solución: La mejor cota inferior es 9 (incumbente del problema). El nodo abierto, de mayor valor es $P_{1,1}$ que podría haber soluciones enteras con un valor objetivo de hasta 11 (la función objetivo solo posee coeficientes enteros, por lo que el objetivo debe ser entero).

(c) (3p) ¿Que nodos debería seguir explorando? Justifique.

Solución: Solo $P_{1,1}$ debe ser ramificado, dado que contiene una solución fraccionaria y su valor objetivo relajado es mejor que el incumbente.