PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2016
Profesores: G.Angulo - P.Carrillo - A.Cataldo
R.Cuadrado - S.Encina
JT.Marquinez - F.Palominos

Interrogación 2

Duración: 2 horas y 45 minutos.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***

Pregunta 1 (15 puntos)

(a) **(3 puntos)** Sea $Q \subseteq \mathbb{R}^4$ el poliedro definido por

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 &= 6 \\ 7x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 11x_4 &= 10 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Explique por qué Q *no* está en forma estándar y por qué esto impide aplicar el método Simplex directamente.

Solución: Las filas de la matriz son linealmente dependientes, por lo que el poliedro no está en forma estándar. En particular, no se pueden encontrar bases, por lo que el método Simplex no se puede aplicar directamente.

(b) **(4 puntos)** Sean $P_1,\ P_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ dados por $P_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 = 1,\ x_1 + x_2 = 1,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,\ x \geq 0\}$ y $P_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 = 1,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,\ x \geq 0\}$.

(i) **(2 puntos)** Explique por qué ambos poliedros *sí* están en forma estándar.
Solución: En ambos casos, tenemos sistemas de igualdades con variables no negativas. Además las filas son linealmente independientes.

(ii) **(2 puntos)** Muestre que $P_1 = P_2$.
Solución: Es fácil deducir que $(1, 0, 0, 0)$ es el único elemento de ambos poliedros, por lo que son iguales.

Note que lo anterior es un ejemplo que un poliedro puede tener distintas representaciones en forma estándar con las mismas variables pero diferente número de restricciones de igualdad.

(c) **(8 puntos)** Considere el problema (P) $\min\{c^\top x :\ Ax \geq b\}$. Desarrolle en forma independiente:

(i) **(4 puntos)** Suponga que existe $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, tal que $Ad = 0$. Muestre que el poliedro asociado a (P) *no* tiene vértices.

Solución: Llamemos Q al poliedro, y supongamos que existe un vértice $\bar{x} \in Q$. Sean $y = \bar{x} + d$ y $z = \bar{x} - d$. Como $d \neq 0$, tenemos $y \neq \bar{x}$ y $z \neq \bar{x}$. Como $Ad = 0$, tenemos $Ay = A\bar{x} \geq b$ y $Az = A\bar{x} \geq b$, es decir, $y, z \in Q$. Claramente, $\bar{x} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$, es decir, $\bar{x}$ se puede escribir como combinación convexa de dos elementos diferentes de Q. Por lo tanto, $\bar{x}$ no puede ser vértices de Q.

(ii) **(4 puntos)** Suponga que $b = 0$. Muestre que el valor óptimo de (P) es cero o es no acotado.

Solución: Notemos primero que $x = 0$ satisface $A0 \geq 0$, por lo que (P) es factible. Además, el valor objetivo de $x = 0$ es igual a 0. Por otro lado, si existe un vector factible $x \neq 0$ tal que $c^\top x < 0$, tenemos que λx con $\lambda > 0$ también es factible y su valor objetivo es $\lambda c^\top x < 0$. Tomando λ arbitrariamente grande, tenemos que el valor objetivo es no acotado.

Pregunta 2 (15 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización P).

$$\begin{array}{lllll} P) & \text{máx} & 15x_1 - x_2 & & \\ & \text{s.a.} & -x_1 + 2x_2 & \leq 6 & (R1) \\ & & x_1 + x_2 & \leq 16 & (R2) \\ & & x_2 & \leq 6 & (R3) \\ & & 4x_1 - x_2 & \geq 4 & (R4) \\ & & x_1\,,\, x_2 & \geq 0 & (R5, R6) \end{array}$$

(a) **(5 puntos)** Note que el punto $u = (0, 3)$ es un punto infactible. A partir de dicho punto, encuentre una base factible utilizando el algoritmo de Simplex apropiado.

Hint: Para iterar menos, identifique las variables a agregar considerando qué restricciones no están siendo respetadas en el punto u.

Solución: El problema en forma estándar de P), es

$$\begin{array}{lllll} PFE) & \text{mín} & -15x_1 + x_2 & & \\ & \text{s.a.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 & = 6 \\ & & x_1 + x_2 + x_4 & = 16 \\ & & x_2 + x_5 & = 6 \\ & & 4x_1 - x_2 - x_6 & = 4 \\ & & x_1, \ldots, x_6 & \geq 0 \end{array}$$

Para generar el problema de Fase I, la única restricción que requiere variable auxiliar es la cuarta restricción:

$$\begin{array}{lllll} PFI) & \text{mín} & t_4 & & \\ & \text{s.a.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 & = 6 \\ & & x_1 + x_2 + x_4 & = 16 \\ & & x_2 + x_5 & = 6 \\ & & 4x_1 - x_2 - x_6 + t_4 & = 4 \\ & & x_1, \ldots, x_6 & \geq 0 \end{array}$$

Así, para el punto $u = (x_1, x_2) = (0, 3)$, las variables básicas son x_2, x_4, x_5 y t_4, mientras que las no básicas son x_1, x_3 y x_6. Luego,

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Para determinar si la base es óptima, utilizamos el criterio de optimalidad de Simplex.

$$\bar{c}_R^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \not\geq \vec{0}^T$$

El criterio de optimalidad nos dice que esta base no es óptima, y el de entrada nos dice que debería entrar la variable x_1 a la base. Así, para el criterio de salida, calculamos $\bar{b}$:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

$$\text{mín} \left\{ \bullet, \frac{13}{3/2}, \frac{3}{1/2}, \frac{7}{7/2} \right\} = 2 \rightarrow t_4 \text{ es la variable que sale de la base.}$$

Así, nos encontramos con una nueva base, en que las variables básicas son x_2, x_4, x_5 y x_1, mientras que las variables no básicas son t_4, x_3 y x_6.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 4/7 & 0 & 0 & 1/7 \\ -5/7 & 1 & 0 & -3/7 \\ -4/7 & 0 & 1 & -1/7 \\ 1/7 & 0 & 0 & 2/7 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Para determinar si la base es óptima, utilizamos el criterio de optimalidad de Simplex.

$$\bar{c}_R^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 4/7 & 0 & 0 & 1/7 \\ -5/7 & 1 & 0 & -3/7 \\ -4/7 & 0 & 1 & -1/7 \\ 1/7 & 0 & 0 & 2/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \not\geq \vec{0}^T$$

El criterio de optimalidad nos dice que esta base es óptima y, por ende, se termina la Fase I de Simplex. Además, la base óptima es factible, pues t_4 es una variable no básica y, entonces, $z_{FI}^* = 0$.

Por último, el valor de las variables básicas viene dado por $\bar{b}$:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

Así, $x_1 = 2, x_2 = 4$ (el punto v). Esto genera un valor igual a $z_{FII} = 26$.

(b) **(3 puntos)** Ahora, considerando el punto factible $v = (2, 4)$, analice la optimalidad de dicho punto utilizando el algoritmo de Simplex en Fase II.

Solución: La base de comienzo es la base asociada al punto en el que quedamos en el ejercicio anterior. Así, las variables básicas seguirán siendo x_2, x_4, x_5 y x_1, mientras que las variables no básicas son x_3 y x_6. Verifiquemos si es óptima, utilizando el criterio de optimalidad de Simplex.

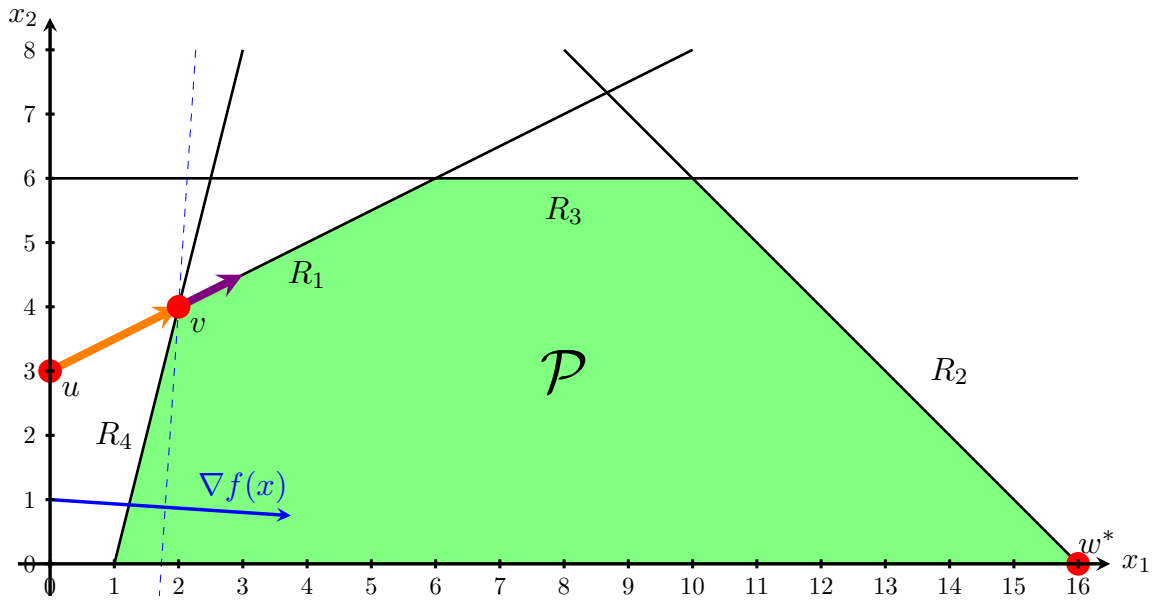
$$\bar{c}_R^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 4/7 & 0 & 0 & 1/7 \\ -5/7 & 1 & 0 & -3/7 \\ -4/7 & 0 & 1 & -1/7 \\ 1/7 & 0 & 0 & 2/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{11}{7} & -\frac{29}{7} \end{pmatrix} \not\geq \vec{0}^T$$

El criterio de optimalidad nos dice que esta base no es óptima, y el de entrada nos diría que debería entrar la variable x_6 a la base.

(c) **(4 puntos)** Realice un gráfico del dominio factible, e ilustre el camino realizado en (a). Además, indique claramente el camino que seguirá el algoritmo de Simplex a partir de su respuesta en (b).

Solución: El gráfico del dominio factible es el que se muestra a continuación:



En verde se aprecia el espacio de soluciones factibles $\mathcal{P}$. En rojo se muestran los puntos u, v y el óptimo w^*. En azul el gradiente de la función objetivo.

El ejercicio (a) presenta un movimiento de base desde $u = (0, 3)$ a $v = (2, 4)$, mostrado en naranjo, realizado en la Fase I.

El ejercicio (b) resulta tal que, en la Fase II, se recomendaría ingresar a la base la variable x_6. Dicho movimiento quedaría representado por la flecha morada.

(d) **(3 puntos)** Si el gráfico está bien hecho, es posible darse cuenta que desde v Simplex llegará a la base óptima en tres iteraciones. Sin embargo, desde v es posible realizar simplemente 2 cambios de bases para llegar al óptimo. Entonces, para el punto v, ¿qué parte del algoritmo debe modificar/relajar para moverse al punto que le permitiría llegar a la base óptima en tan solo dos cambios de bases? Considere esa modificación solamente para salir del punto v.

Solución: El criterio de entrada de la Fase II indica que la variable que entra a la base es la con el costo más negativo de todas las con costo negativo. El criterio a relajar es este mismo, permitiendo ingresar la variable asociada al costo reducido positivo, haciendo retroceder de curva de nivel. Si eso ocurre, nos moveríamos al punto $(1, 0)$, logrando solamente dos cambios de base.

Pregunta 3 (15 puntos)

El Departamento desea comprar lápices para pizarra para las clases. Se estima que se necesitan al menos 120 lápices azules y al menos 80 rojos. El proveedor de insumos vende los siguientes packs de productos:

- ◇ Pack 1: 1 azul + 2 rojos: \$3000
- ◇ Pack 2: 2 azules + 1 rojo: \$3000
- ◇ Pack 3: 3 azules + 2 rojos: \$5000
- ◇ Pack 4: 2 azules + 3 rojos: \$4000

Para minimizar el costo total de compra, uno de los ayudantes formuló el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x5 = 120 \\ & 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_6 = 80 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

(a) **(3 puntos)** Interprete de forma precisa el significado de cada una de las variables, restricciones, y función objetivo.

Solución: Sea $x_i \geq 0$ la cantidad de packs del tipo i que comprará el Departamento, $i = 1, 2, 3, 4$. Luego es natural formular el problema

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 3000x_1 + 3000x_2 + 5000x_3 + 4000x_4 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 120 \\ & 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq 80 \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

donde las dos restricciones indican el mínimo de lápices rojos y azules requeridos, y la función objetivo es el costo total. Si dividimos los coeficientes de la función objetivo por 1000 y llevamos el problema a forma estándar, obtenemos la formulación del ayudante.

(b) **(3 puntos)** Luego de aplicar el método Simplex, el ayudante se dio cuenta que basta comprar packs del tipo 2 y 4 solamente para obtener una solución óptima. Si $\bar{c}^\top = (3/4, 0, 1/4, 0, 5/4, 1/2)$ es el vector de costos reducidos de dicha solución, determine la solución óptima y costo con respecto al problema original.

Solución: Tenemos $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, por lo que $B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $x_B = B^{-1}b = (50, 10)^\top$. El costo de esta solución es \$190000 en el problema original.

(c) **(3 puntos)** Muestre que la cantidad requerida de lápices rojos puede disminuir a 60 sin que cambie la estructura de la solución óptima.

Solución: Si el requisito de lápices rojos cambia a $80+\delta$, debemos tener $\delta\frac{1}{4}(-2, 2) \geq -(50, 10)$ para que la base $\{2, 4\}$ siga siendo óptima. Esto implica $\delta \geq -20$, es decir, disminuir el requisito a 60 no altera la base óptima.

(d) **(3 puntos)** Un minorista ofrece venderle al Departamento exactamente 20 lápices rojos por \$6000. Con respecto a la solución actual, determine si es conveniente comprarle los 20 lápices o no.

Solución: Si el Departamento compra los 20 lápices al minorista, entonces necesita pedir al menos 60 al proveedor. De la parte anterior, en tal caso la base $\{2, 4\}$ sigue siendo óptima y la nueva solución tendría $\tilde{x}_B = B^{-1}\tilde{b} = (60, 0)^\top$ con costo igual a \$180000. Luego el costo total en que incurriría el Departamento es de $186000 < 190000$, por lo que sí conviene comprarle al minorista.

(e) **(3 puntos)** Ante la amenaza de la competencia, el proveedor ofrece el Pack 5, el cual incluye 2 lápices azules y 2 rojos. Con respecto a la solución actual, determine hasta cuánto puede cobrar el proveedor por unidad del Pack 5 de manera que el Departamento tenga incentivo a comprar este producto.

Solución: Sea $x_7 \geq 0$ la cantidad de Pack 5 que eventualmente compraría el Departamento. Esta nueva variable está dada por la columna $A_7 = (2, 2)^\top$ y costo c_7 por determinar. Para que le convenga al Departamento, necesitamos $\bar{c}_7 < 0$, es decir, $c_7 - c_B^\top B^{-1}A_7 < 0$. Como $c_B^\top B^{-1}A_7 = (3, 4) \cdot \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 7/2$, el precio del pack 5 debe ser menor a \$3500.

Pregunta 4 (15 puntos)

Se le ha solicitado su ayuda para la programación académica de los cursos que se dictarán en el primer semestre del 2017 en la universidad. En total existen N cursos diferentes que deben ser impartidos en este nuevo semestre. Desde luego, para poder realizar un curso, se necesita que a éste se le asigne una sala y un horario definido en el cual se impartirán las clases cada semana. Para ello, la universidad cuenta con un listado de las M salas que se encuentran disponibles para el próximo semestre. A su vez, en el parámetro h_m se encuentra definida la capacidad máxima de alumnos que la sala m puede recibir en cada bloque horario. Naturalmente, cada sala puede ser utilizada a lo más por 1 curso en cada bloque horario en cada día. Por ejemplo, no se puede planificar Cálculo I y Álgebra Lineal ambos en el segundo módulo los días lunes en la misma sala.

La utilización de cada sala posee una estructura de costo fijo y variable, donde si se decide hacer uso la sala m a lo largo del semestre, se debe pagar un costo fijo de cf_m pesos por el derecho a utilizarla y un costo variable de cv_m por cada bloque.

Adicionalmente, dada la naturaleza de los cursos que se deben impartir, cada uno de ellos requiere de un conjunto de atributos que debe poseer la sala para poder dictar el curso en ella. Para ello existe el parámetro $d_{n,l}$ que indica con valor 1 si el curso n requiere del atributo l para realizar el curso, y 0 en otro caso. Del mismo modo, en el parámetro $c_{m,l}$ se indica con valor 1 si la sala m posee el atributo l, y 0 en caso contrario. En total existen L atributos diferentes.

Actualmente la universidad cuenta con un listado de los K alumnos que deberán tomar los cursos en el siguiente período académico. En la matriz A, el coeficiente $A_{k,n}$ se encuentra definido con valor

1 si el alumno k debe inscribir el curso n, o 0 en caso que no deba inscribirlo. Adicionalmente, a modo de garantizar horarios razonables para los alumnos de cada generación, en la matriz B, el coeficiente $B_{n,n'}$ se encuentra definido con valor 1 si el curso n debe ser planificado en un bloque-día diferente que el curso n'.

Asuma que dispone de 45 bloques horarios para distribuir la asignación de los cursos dentro de cada semana, distribuidos en 9 bloques horarios para cada uno de los días de la semana (no se consideran los días sábado ni domingo).

La misión de usted será la de formular un problema de programación lineal entera-mixta con el cual pueda minimizar los costos totales en los que la universidad deberá incurrir, asegurándose de que se planifiquen todos los cursos en horarios y salas adecuados.

(a) **(7 puntos)** Desarrolle un modelo de programación lineal entera-mixta que le sirva para planificar la situación anterior. Para ello, identifique claramente las variables, restricciones y función objetivo del modelo. Si utiliza algún conjunto o índice no definido en el enunciado, explicite su definición.

(b) **(8 puntos)** Si es que el dinero no fuese un problema, modifique el modelo anterior de modo que el objetivo sea el de minimizar la suma total de las "ventanas"que existirán para los alumnos de la universidad, asegurándose que se cumplan las condiciones anteriormente planteadas.

Nota: Las "ventanas"para un alumno consisten en los bloques horarios libres (sin clases) que se encuentran entre 2 cursos a los cuales el alumno debe asistir.

Solución Pregunta 4

a) Variables

$$X_{n,m,t,h} = \begin{cases} 1 & \text{si el evento } n \text{ es realizado en la sala } n \text{ durante el día } t \text{ en el bloque } h. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$Y_{k,n,t,k} = \begin{cases} 1 & \text{si el alumno } k \text{ asiste al evento } n \text{ durante el día } t \text{ en el bloque } h \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$Z_m = \begin{cases} 1 & \text{si arrienda la sala } m \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Función Objetivo

$$\text{mín} \quad \sum_m cf_m Z_m + \sum_{m,n,t,h} cv_m X_{n,m,t,h}$$

Restricciones

R1) No realizar más de 1 clase en la misma sala y momento.

$$\sum_n X_{n,m,t,h} \leq 1 \qquad \forall m, t, h$$

R2) Se deben planificar todas las clases.

$$\sum_{m,t,h} X_{n,m,t,h} = 1 \qquad \forall n$$

R3) No se puede tener conflicto de horario entre los cursos del nivel.

$$\sum_{m} X_{n,m,t} + X_{n',m,t} \leq M - (M-1)B_{n,n'} \qquad \forall n, n', t, h$$

R4) El curso debe estar planificado para poder asignar un alumno a él.

$$Y_{k,n,t,h} \leq \sum_{m} X_{n,m,t,h} \qquad \forall k, n, t, h$$

R5) Se le debe asignar todas las clases a cada alumno.

$$A_{k,n} = \sum_{t,h} Y_{k,n,t,h} \qquad \forall k, n$$

R6) No asignar más de una clase a un alumno en un mismo horario.

$$\sum_{n} Y_{k,n,t,h} \leq 1 \qquad \forall k, t, h$$

R6) Las salas deben cumplir con los requisitos mínimos para poder dictar el curso en ellas.

$$\sum_{t,h} X_{n,m,t} d_{n,l} \leq c_{m,l} \qquad \forall n, m, l$$

R7) Identificar si la sala fue arrendada o no.

$$\sum_{n,t,h} X_{n,m,t,h} \leq Z_m \qquad \forall m$$

R8) Naturaleza de varaibles.

$$X_{n,m,t,h}, Y_{k,n,t,h}, Z_m \in \{0,1\} \qquad \forall m$$

b) Variables

$\alpha_{k,t,h} = \begin{cases} 1 & \text{si el alumno } k \text{ se le encuentra asignada alguna clase dentro del día } t \text{ pero previo al} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

$\beta k, t, h = \begin{cases} 1 & \text{si el alumno } k \text{ se le encuentra asignada alguna clase dentro del día } t \text{ pero posteric} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

$W_{k,t,h} = \begin{cases} 1 & \text{si el alumno } k \text{ posee una "ventana .}^{\text{en}} \text{ del día } t \text{ durante el horario } h. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Función objetivo modificada

$$\text{mín} \quad \sum_{k,t,h} W_{k,t,h}$$

Restricciones adicionales

R1) Identificar presencia de clases previas y post al horario actual

$$\sum_{n,h'<h} Y_{k,n,t,h} \leq M\alpha_{k,t,h} \qquad \forall k, t, h$$

$$\sum_{n,h'>h} Y_{k,n,t,h} \leq M\beta_{k,t,h} \qquad \forall k, t, h$$

R2) Identificar las "ventanas"para cada alumno.

$$\frac{\alpha_{k,t,h} + (1 - \sum_n Y_{k,n,t,h}) + \beta_{k,t,h}}{3} - \frac{2}{3} \leq W_{k,t,h} \qquad \forall k, t, h$$

R3) Naturaleza de nuevas varaibles.

$$\alpha_{k,t,h}, \beta_{k,t,h}, W_{k,t,h} \in \{0,1\} \qquad \forall m$$

Algunas matrices y sus inversas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -7/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & -5/4 & -1/4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/7 & 0 & 0 & 2/7 \\ 4/7 & 0 & 0 & 1/7 \\ -5/7 & 1 & 0 & -3/7 \\ -4/7 & 0 & 1 & -1/7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4/7 & 0 & 0 & 1/7 \\ -5/7 & 1 & 0 & -3/7 \\ -4/7 & 0 & 1 & -1/7 \\ 1/7 & 0 & 0 & 2/7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 4/5 & 0 & -1/5 \\ 1 & -7/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & -4/5 & 1 & 1/5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 7 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$