PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2022 - 2
Profesores: M. Castro - R. Cuadrado - M. Favereau - M. Klapp - E. Salgado

Examen
Duración: 150 minutos.

Pregunta 1 (15 puntos):

Una organización solidaria está organizando una cena navideña para una casa de reposo y debe comprar exactamente 50 cenas para los 50 adultos mayores que atiende el establecimiento. Para cumplir su tarea, la organización debe elegir una única empresa de *catering* entre K posibles empresas disponibles ($K \geq 1$) y abastecerse únicamente desde esta. Cada empresa de *catering* ofrece diferentes tipos de cena, donde J_k es el conjunto de cenas disponibles de la empresa $k \in \{1, ..., K\}$. Cada cena $j \in J_k$ de la empresa $k \in \{1, ..., K\}$ cuesta $p_j \geq 0$ a la organización, posee un factor nutricional $f_j \geq 0$, y una etiqueta $v_j \in \{0, 1\}$ que indica si la comida es apta para diabéticos ($v_j = 1$) o no ($v_j = 0$).

La organización solidaria puede comprar cenas de diferente tipo (pero de la misma empresa) para satisfacer ciertas restricciones. Primero, se sabe que 15 adultos mayores tienen diabetes, por lo que al menos 15 de las cenas deben ser de este tipo. Además, es necesario que el valor nutricional promedio de todas las cenas compradas sea mayor o igual a un estándar $F \geq 0$. Finalmente, las empresas de *catering* no desean vender pocas cenas de un tipo, por lo que solicitan que si la organización compra alguna cena de tipo $j \in J_k$ de la empresa $k \in \{1, ..., K\}$, entonces debe comprar al menos $m_{kj} \geq 0$ cenas de ese tipo.

(a) (11p) Formule un modelo de programación lineal entera que ayude a la organización solidaria a realizar una compra de cenas que cubra a todos sus adultos mayores satisfaciendo las restricciones mencionadas al menor costo posible.

Solución: Considera las siguientes variables binarias y enteras de problema

$$x_k = \begin{cases} 1 & \text{se elige la empresa } k \in \{1, ..., K\} \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$y_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se compra alguna cena del menú } j \in J_k \text{ a la empresa } k \in \{1, ..., K\} \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$z_{jk} =$ número de cenas del menu $j \in J_k$ que se compran a la empresa $k \in \{1, ..., K\}$.

El modelo que minimiza costos está dado por:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{k=1}^{K} \sum_{j \in J_k} z_{jk} p_j & & \\
s.t. \quad & \sum_{k=1}^{K} \sum_{j \in J_k} z_{jk} = 50 & & (1) \\
& \sum_{k=1}^{K} \sum_{j \in J_k} f_j z_{jk} \geq F \cdot 50 & & (2) \\
& \sum_{k=1}^{K} \sum_{j \in J_k} v_j z_{jk} \geq 15 & & (3) \\
& \sum_{j \in J_k} y_{jk} \leq |J_k| \cdot x_k & \forall k \in \{1, ..., K\} & (4) \\
& z_{jk} \leq 50 \cdot y_{jk} & \forall j \in J_k,\ k \in \{1, ..., K\} & (5) \\
& y_{jk} \cdot m_{kj} \leq z_{jk} & \forall j \in J_k,\ k \in \{1, ..., K\} & (6) \\
& \sum_{k=1}^{K} x_k = 1 & \forall k \in \{1, ..., K\} & (7) \\
& x_k \in \{0, 1\} & \forall k \in \{1, ..., K\} & \\
& y_{jk} \in \{0, 1\} & \forall j \in J_k,\ k \in \{1, ..., K\} & \\
& z_{jk} \in \mathbb{Z}^+ & &
\end{aligned}
$$

La restricción (1) asegura que se compren exactamente 50 cenas. La restricción (2) modela los requisitos nutricionales, mientras que la restricción (3) modela los requisitos para diabéticos. La restricción (4) asegura que solo se seleccionarán menús de la empresa de catering seleccionada. La restricción (5) asegura que solo compraran cenas de los menus seleccionados y la restricción (6) asegura que se cumpla la política mínima de compra por menú. Finalmente, la restricción (7) modela que se seleccione exactamente una empresa de catering.

(b) (4p) Indique al menos dos condiciones necesaria que deben cumplir los parámetros de este problema para asegurar existencia de solución. A modo de ejemplo, una condición necesaria (que no será considerada en su respuesta), es que al menos una empresa de catering ofrezca un menú para diabéticos, es decir, existe al menos un $k \in \{1, ..., K\}$ y $j \in J_k$ tal que $v_j = 1$. Debes expresar las condiciones necesarias en palabras y ocupando notación matemáticas, similar a cómo se describe en el ejemplo.

Solución:

Hay muchas opciones posibles, aquí listo algunas opciones sencillas:

- ◇ El requerimiento mínimo de cenas sea menos de 50 para algún menu/empresa.
- ◇ Se puede cumplir la restricción de factor nutricional, es decir, al menos un menú de alguna empresa debe tener un factor nutricional mayor o igual a N. Matemáticamente: existe $k \in \{1, ..., K\}$ y $j \in J_k$ tal que $f_j \geq N$.
- ◇ Exista al menos una empresa con un conjunto de menus no vacío, es decir, existe $k \in \{1, ..., K\}$ tal que $J_k \neq \emptyset$.
- ◇ Al menos un menú de alguna empresa requiera comprar 50 o menos para poder cumplir con el requerimiento de comprar exactamente 50 cenas, es decir, existe $k \in \{1, ..., K\}$ y $j \in J_k$ tal que $m_{kj} \leq 50$.

También se pueden listar condiciones más complejas que combinen varias restricciones, por ejemplo, alguna empresa de catering que ofrecen menús diabéticos deben cumplir con la restricción nutricional considerando al menos un menú diabético.

Pregunta 2 (10 puntos):

(a) (4p) Considere el siguiente problema de optimización lineal entera en donde $c = (c_1, c_2)$ es cualquier vector de costos:

$$\begin{array}{lllll} (\mathrm{P}) & \text{máx} & c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 & & \\ & \text{s.t.} & -x_1 + x_2 & \geq & -3 \\ & & -x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ & & x_1 & \leq & 5 \\ & & x_2 & \leq & 2 \\ & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}_+. \end{array}$$

¿Cuál es la máxima cantidad posible de subproblemas linealmente relajados que tendría que resolver si ejecuta el algoritmo de Branch & Bound sobre (P)?

Solución: Solo 1, pues el problema solo posee vértices enteros. Hay dos formas de corroborarlo:

- ◇ Graficando (y calculando) todos estos vértices enteros:

$$\{(0,0), (0,2), (5,2), (3,0)\}$$

- ◇ Explicando que la matriz A es TU y que b es integral.
  Al escribir el dominio lineal equivalente relajado en formato $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2_+ : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ queda:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

  A es TU (es una matriz de incidencia junto a una identidad) y b es integral.

(b) Considere el siguiente problema de optimización no lineal irrestricta

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{2}\big(100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2\big) \\ \text{s.t.} & x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \end{array}$$

(i) (3p) ¿Es el punto $\boldsymbol{x}^\star = (1, 1)$ un mínimo local? Justifique.
Solución: Para analizar si $\boldsymbol{x}^\star$ es mínimo local debemos analizar las condiciones necesarias de primer orden y las de segundo orden (CS).
Cumple CN de 1er orden pues:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 200x_1^3 + x_1(1 - 200x_2) - 1 \\ 100(x_2 - x_1^2) \end{pmatrix} \implies \nabla f(\boldsymbol{x}^\star) = \begin{pmatrix} 200 + (1 - 200) - 1 \\ 100(1 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Revisemos condicines de 2do orden:

$$H_f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 600x_1^2 + 1 - 200x_2 & -200x_1 \\ -200x_1 & 100 \end{pmatrix} \implies H_f(\boldsymbol{x}^\star) = \begin{pmatrix} 600 + 1 - 200 & -200 \\ -200 & 100 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 401 & -200 \\ -200 & 100 \end{pmatrix}.$$

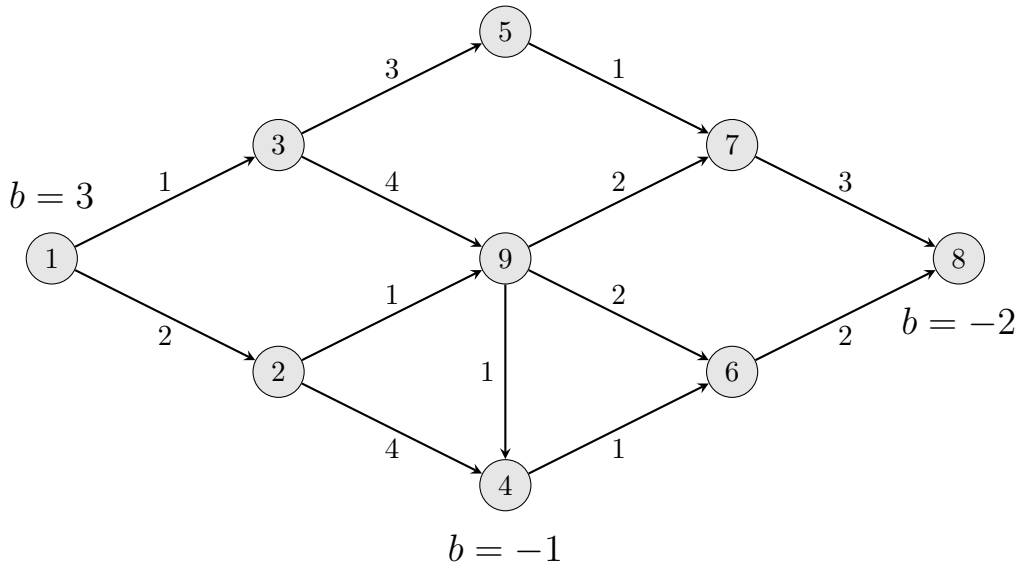
Esta matriz es definida positiva. Se puede ver de tres formas: menores principales estrictamente postivos, valores propios estrcitamentes positivos, o determinar que el término de 2do orden cumple $d^T H_f(x^*)d > 0$ para todo $d \neq 0$.

(ii) (3p) ¿Es $\boldsymbol{x}^\star = (1, 1)$ un mínimo global? Justifique.

Solución: Claramente si, pues es la única solución que cumple $\nabla f(x) = 0$ y existe solución óptima (F.O. es continuamente diferenciable y acotada (≥ 0)).

Pregunta 3 (20 puntos):

Considere el siguiente ejemplo de un problema de flujo en redes a costo mínimo (PFCM) ilustrado sobre un grafo $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$. En cada arco $a \in \mathcal{A}$ se detalla el costo c_a a pagar por unidad de flujo que lo atraviesa. El nodo 1 ofrece 3 unidades de flujo a G, el nodo 4 demanda una unidad de G y el nodo 8 demanda dos unidades de G. El resto de los nodos es de trasbordo y no hay restricciones de máximo flujo en arcos.



(a) (4p) Escriba de forma extendida el modelo de optimización lineal continua `(P)` asociado a este ejemplo de PFCM (es decir, no ocupe sumatorias en su modelo y escriba cada restricción de forma desagregada).

Solución:

$$\min_{f \geq 0} \; 2f_{12} + f_{13} + 4f_{24} + f_{29} + 3f_{35} + 4f_{39} + f_{46} + f_{57} + 2f_{68} + 3f_{78} + f_{94} + 2f_{96} + 2f_{97}$$

$$\left.\begin{aligned} f_{12} + f_{13} &= 3 \\ f_{24} + f_{29} - f_{12} &= 0 \\ f_{35} + f_{39} - f_{13} &= 0 \\ f_{46} - f_{24} - f_{94} &= -1 \\ f_{57} - f_{35} &= 0 \\ f_{68} - f_{46} - f_{96} &= 0 \\ f_{78} - f_{57} - f_{97} &= 0 \\ -f_{68} - f_{78} &= -2 \\ f_{94} + f_{96} + f_{97} - f_{29} - f_{39} &= 0 \end{aligned}\right\} \texttt{(P)}$$

(b) (4p) Considere los siguientes tres conjuntos de arcos en G candidatos a formar una base de `(P)`:

(i) $\{(1,2),(1,3),(2,9),(3,9),(6,8),(7,8),(9,6),(9,7)\}$

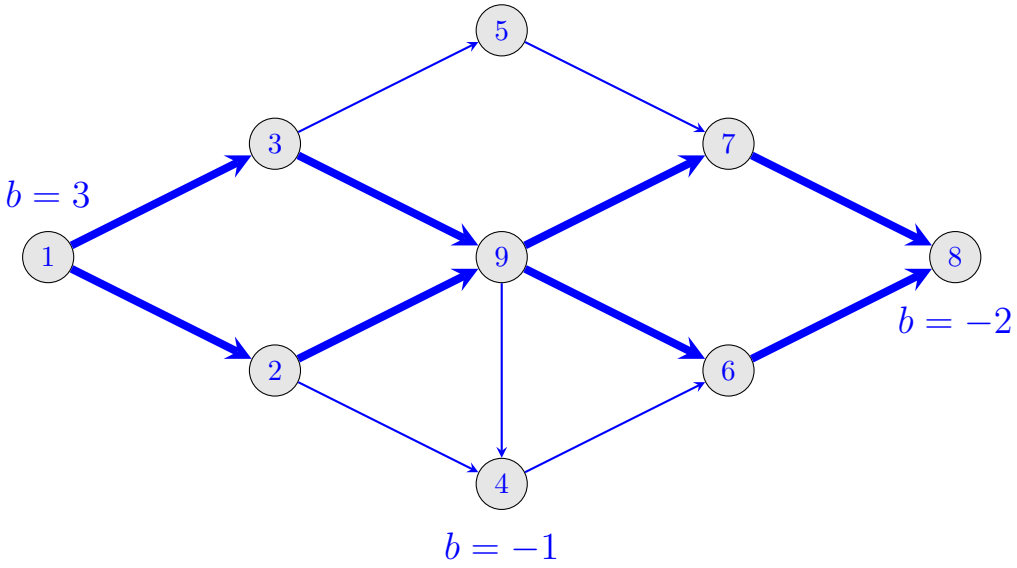
(ii) $\{(1,2),(2,9),(3,5),(5,7),(6,8),(7,8),(9,4),(9,6)\}$

(iii) $\{(1,2),(1,3),(3,5),(5,7),(7,8),(6,8),(4,6),(9,4)\}$

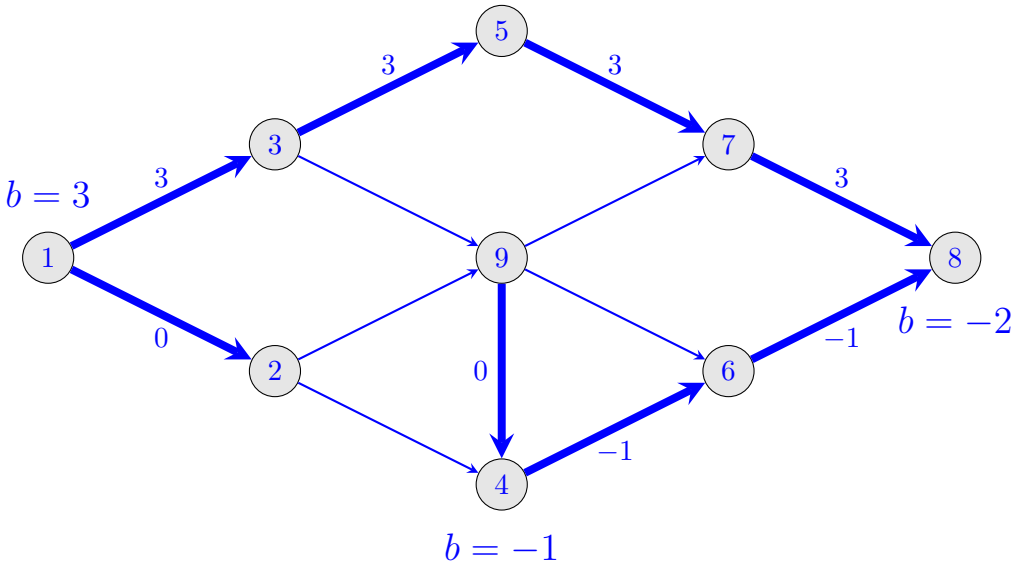
¿Cuál define una solución base factible de `(P)`? Llame B a este conjunto y calcule dicha solución.

Solución:

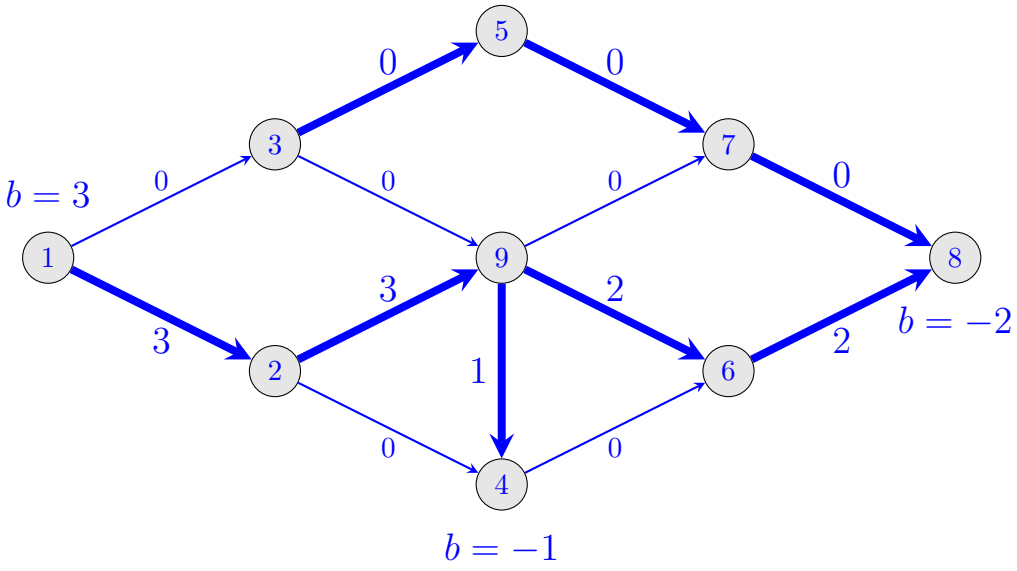
◇ El conjunto (i) no puede ser una base, pues forma ciclos y no cubre todos los nodos (no es un árbol).



◇ El conjunto (iii) define un árbol-base, pero con solución básica infactible (no se cumplen las restricciones de oferta y demanda).

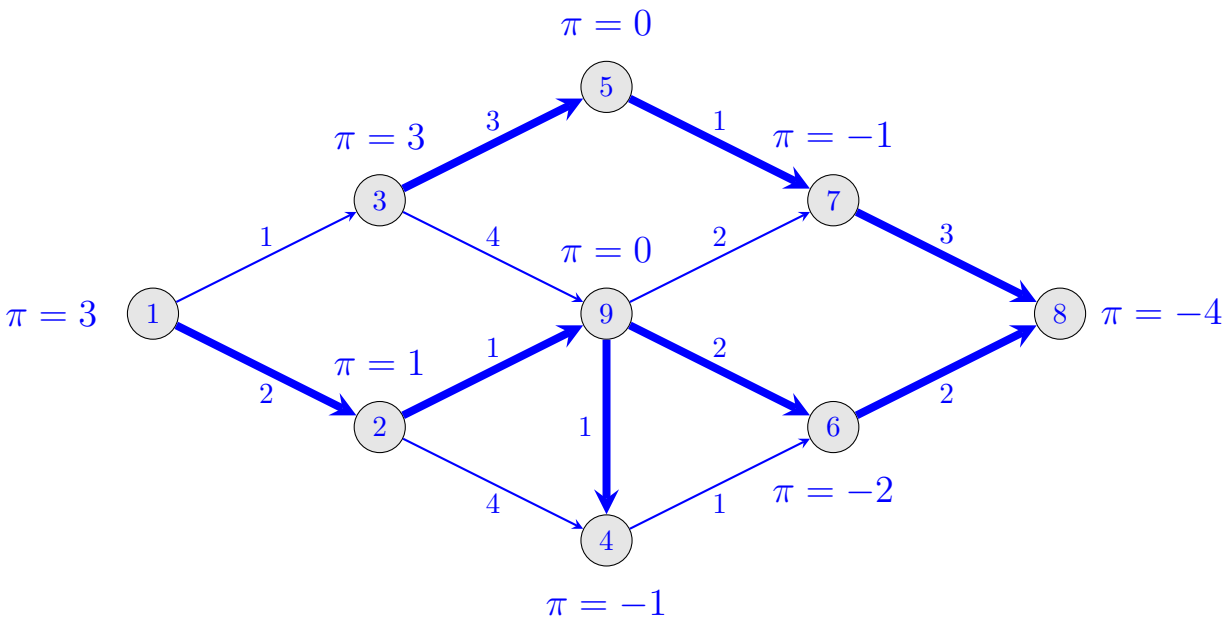


◇ Finalmente, el conjunto (ii) define un árbol-base con solución básica factible ilustrada a continuación.



(c) (4p) ¿Es la base B (encontrada en el inciso anterior) óptima? Justifique su respuesta mediante condiciones de optimalidad.

Solución: Para justificar optimalidad, primero se debe calcular el vector de variables duales asociado a B. Fijando el potencial nulo en el nodo 9 y sabiendo que $\pi_i - \pi_j = c_{ij}$ para todo arco $(i, j) \in B$ se obtiene los siguientes valores duales:



Luego, con el vector π se calculan todos los costos reducidos de arcos fuera de base:

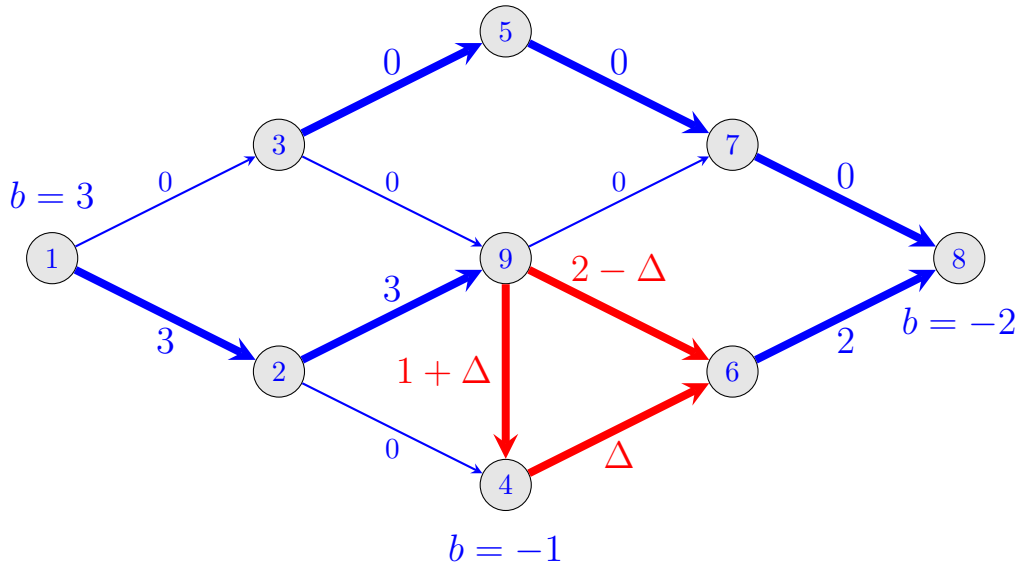
$$\begin{array}{rcrcrcl} r_{13} & = & c_{13} - \pi_1 + \pi_3 & = & 1 - 3 + 3 & = & 1 \\ r_{24} & = & c_{24} - \pi_2 + \pi_4 & = & 4 - 1 + (-1) & = & 2 \\ r_{39} & = & c_{39} - \pi_3 + \pi_9 & = & 4 - 3 + 0 & = & 1 \\ r_{46} & = & c_{46} - \pi_4 + \pi_6 & = & 1 - (-1) + (-2) & = & 0 \\ r_{97} & = & c_{97} - \pi_9 + \pi_7 & = & 2 - 0 + (-1) & = & 1 \end{array}$$

Todos los costos reducidos son no-negativos, por lo que B es óptima.

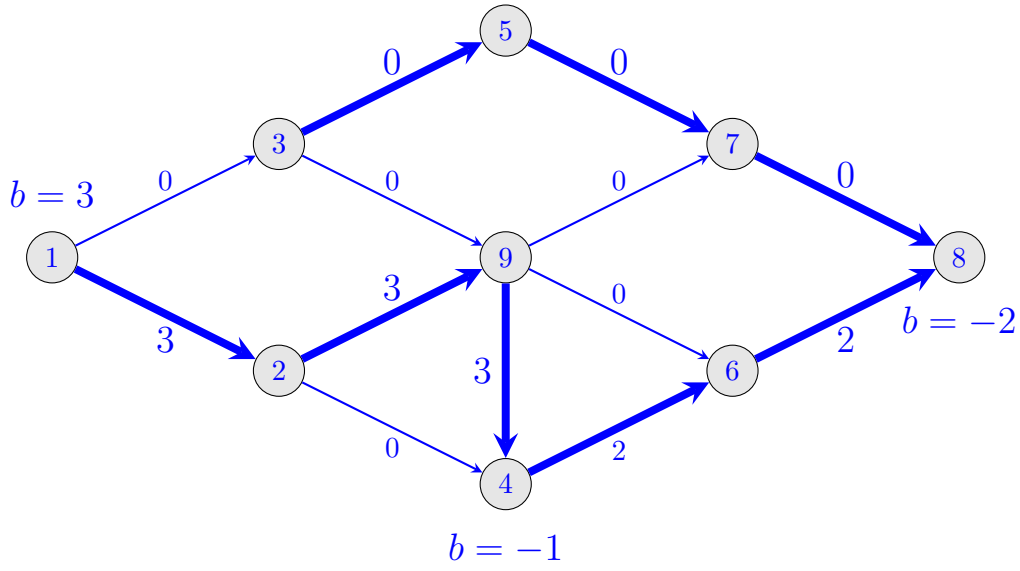
(d) (4p) Determine el conjunto de todas las soluciones óptimas del PFCM.

Solución: En el iniciso anterior hay una solución básica óptima. Llamémosla f_1^*. Sin embargo, existe un costo reducido nulo asociado a un arco no básico ($(4,6)$).

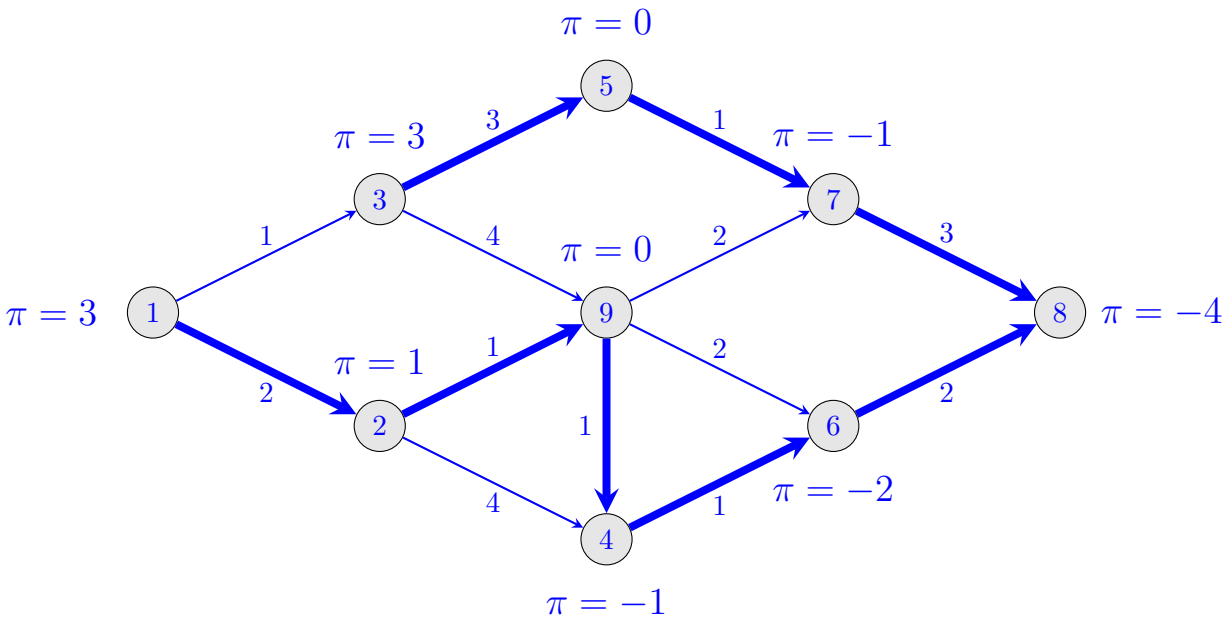
Si ingresa $(4,6)$ a la base el objetivo no debiese cambiar y tendríamos otra solución óptima. Subamos la variable desde 0 en Δ unidades. El balance es el siguiente:



Luego, es evidente que $\Delta = 2$ y se obtiene un vector de flujos óptimo f_2^* (diferente a f_1^*) dado por:



En este caso las variables duales no cambian:



Por lo que los costos reducidos serán idénticos y no existes más vértices óptimos.

Luego, el conjunto de todas las soluciones óptimas es:

$$F^* = \{f \in \mathbb{R}^{|A|} : f = \lambda \cdot f_1^* + (1-\lambda) \cdot f_2^*, \lambda \in [0,1]\}$$

(e) (4p) ¿En qué rango de valores puede estar el costo del arco $(2,9)$ (actualmente en 1) para no alterar el conjunto de soluciones óptimas del problema?

Solución: El cambio de costo en $(2,9)$ sobre la base B solo altera las variables duales asociadas a los nodos 1 y 2. Por ello, hay que revisar si dicho cambio mantiene la nonegatividad de los costos reducidos de $(2,4)$ y $(1,3)$.

Supongamos que el nuevo costo es c'_{29}, entonces $\pi_2 = c'_{29}$ y $\pi_1 = 2 + c'_{29}$.

Luego:

$$\begin{aligned} r_{13} &= 1 - (2 + c'_{29}) + 3 &&= 2 - c'_{29} \\ r_{24} &= 4 - (c'_{29}) + (-1) &&= 3 - c'_{29} \end{aligned}$$

Luego, el conjunto de soluciones óptimas no cambia si $c'_{29} \leq 2$.

Pregunta 4 (15 puntos):

Responda para cada una de las siguientes afirmaciones si es que es verdadera o falsa. Justifique su respuesta (3p cada una).

(a) Para una solución vértice óptima de un un problema de optimización lineal continua: necesariamente habrá múltiples soluciones óptimas cuando este vértice tenga un costo reducido no básico igual a cero.

Solución: Falso. No necesariamente ocurre. Este vértice puede ser degenerado y en la dirección del costo reducido igual a 0 puede no ser factible un movimiento mayor a cero.

(b) El valor óptimo de un problema lineal entero de minimización siempre es mayor que el de su relajación lineal. **Solución:** Falso, pueden ser iguales.

(c) Si el problema dual de un problema de optimización lineal es no acotado, entonces necesariamente el primal es infactible.

Solución: Verdadero. No puede existir certificado de acotamiento al dual y por ende es infactible.

(d) Necesariamente el problema dual de un problema lineal con múltiples soluciones óptimas posee vértices degenerados.

Solución: Verdadero. Costos reducidos fuera de base en primal = Variable básica dual.

(e) Si la matriz Hessiana de una función en $x \in \mathbb{R}^n$ es semi-definida positiva para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces necesariamente un punto de gradiente nulo es el minimizador de esta función sobre $\mathbb{R}^n$.

Solución: Verdadero, pues la función es convexa.

Nota de corrección: Es válido también indicar que la afirmación es Falsa, si es que la justificación es que no necesariamente es **el** minimizador, sino **un** minimizador.