FACULTAD DE INGENIERÍA
Departamento de Industrias
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Curso: Optimización
Semestre: Primavera 2010
Profesor: Alejandro Cataldo C.
Auxiliar: Mauricio Varas V.

Pauta Interrogación 2

Duración: 3 horas.

Cada pregunta será evaluada con una nota entre 1.0 y 7.0. La prueba cuenta con una ponderación total de 110 %. No se permite el uso de calculadora o celulares de ningún tipo.

Pregunta 1 (40 %)

Cada una de las cinco partes de esta pregunta vale lo mismo, y es independiente de las otras. La nota de la pregunta se obtendrá considerando sólo las 4 mejores notas de las 5 partes de la pregunta.

Parte A

La empresa familiar "La Abuelita" vende tres tipos de dulces típicos: chilenitos(C); empolvados(E) y calzones rotos(R). La utilidad que se obtiene por la venta de una bandeja de chilenitos es de 3 unidades monetarias, por una de empolvados es de 2 unidades monetarias y por una bandeja de calzones rotos es de 7 unidades monetarias. Se tiene certeza de que la demanda es mucho mayor que la cantidad que pueda producir "La Abuelita".

La producción diaria de estos dulces se encuentra la realiza la abuelita Yola, dueña del negocio. Ella dispone de 10 horas de su tiempo para fabricar estos dulces, y sabe que el tiempo que le consume preparar una bandeja de cada uno de estos dulces es de 3 horas para chilenitos, de 2 horas para empolvados y de 7 horas para calzones rotos.

Ahora, desde el punto de vista netamente gastronómico, los principales insumos para la producción de estos dulces son azúcar flor y manjar. Se sabe que una bandeja de chilenitos requiere de 2 kilos de manjar y no requiere azúcar flor. La producción de una bandeja de empolvados emplea 3 kilos de azúcar flor y 2 kilos de manjar. Finalmente, para producir una bandeja de calzones rotos se requiere de 2 kilos de azúcar flor y no requiere de manjar. "La Abuelita " cuenta para la producción de este día con 32 kilos de azúcar flor y 21 kilos de manjar.

Con la información anterior, y asumiendo que es posible producir y vender una fracción de una bandeja de cualquiera de los 3 dulces, responda las siguientes preguntas.

a) (1.0 punto) Construya un modelo de programación lineal en variables continuas que permita decidir la producción de este día de manera de maximizar la utilidad obtenida.

b) (1.0 punto) Construya el dual del problema formulado en la parte a).

c) (1.5 puntos) Obtenga la solución del problema dual formulado en la parte b).

d) (1.5 punto) Utilizando el teorema de holgura complementaria obtenga una solución óptima del problema primal.

e) (1.0 punto) ¿Qué característica particular tienen la solución obtenida en la parte d)?

Pauta Parte A

a) El modelo utiliza las siguientes variables:

x_C cantidad de bandejas de chilenitos a producir.
x_E cantidad de bandejas de empolvados a producir.
x_R cantidad de bandejas de calzones rotos a producir.

$$
\begin{aligned}
\text{máx } z = 3x_C + 2x_E + 7x_R & \\
3x_C + 2x_E + 7x_R \leq 10 & \quad \text{(Restricción horas Abuela Yola)} \\
3x_E + 2x_R \leq 32 & \quad \text{(Restricción azúcar flor)} \\
3x_C + 2x_E \leq 21 & \quad \text{(Restricción manjar)} \\
x_C, x_E, x_R \geq 0 &
\end{aligned}
$$

b) El dual es el siguiente.

$$\begin{aligned} \text{mín } w = 10y_1 + 32y_2 + 21y_3 \\ 3y_1 \quad + 7y_3 \geq 3 \quad \text{(Restricción dual 1)} \\ 2y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 2 \quad \text{(Restricción dual 2)} \\ 7y_1 + 2y_2 \quad \geq 7 \quad \text{(Restricción dual 3)} \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

c) La solución es obtenible directamente en el dual. La variable dual y_1 es la que tiene un menor costo asociado y 1 unidad de ella basta para satisfacer las 3 restricciones de manera simultánea. Es fácil observar que la variable y_2 y la variable y_3 requieren de más de 1 unidad para satisfacer la restricción y tienen, ambas, un costo más alto que el de la variable y_1.

Luego, la solución es $y_1^* = 1$, $y_2^* = 0$ e $y_3^* = 0$, entregando un valor óptimo de $w^* = 10$.

d) A través del teorema de holgura complementaria obtenemos que solamente la restricción 1 del primal es activa. Además, como las tres restricciones del dual se satisfacen en igualdad, las tres son activas, y por lo tanto, no podemos saber nada respecto a las variables primales.

Por otra parte, el valor de la función objetivo del dual en el óptimo es 10. Entonces, se tiene que:

$$3x_C + 2x_E + 7x_R = 10 \quad (*)$$

con lo cual, cualquier combinación de x_C, x_E y x_R que satisfaga $(*)$ es solución óptima del problema primal. En este caso, se puede tomar $x_C^* = 1$, $x_E^* = 0$ y $x_R^* = 1$, que da como valor de la función objetivo $z^* = 10$.

e) Tal y como se mencionó en la parte anterior, la característica particular de la solución del primal es que éste presenta múltiples soluciones óptimas. Por ejemplo, la solución $x_C^* = 0$, $x_E^* = 0$ y $x_R^* = \frac{10}{7}$ es solución óptima del primal, y da como valor de la función objetivo $z^* = 10$.

Parte B

Responda brevemente las siguientes preguntas.

i) Muestre mediante un ejemplo y usando la definición de convexidad que un problema lineal en variables enteras no es convexo.

ii) ¿Qué condición(es) debe cumplir la solución de la Fase I del algoritmo Simplex para que el problema original sea factible?

iii) Si el primal de un problema es no acotado, entonces el dual de este problema es infactible y viceversa. ¿Es esto cierto? Justifique su respuesta.

iv) El cálculo del precio sombra de un recurso productivo le ha dado 8. Justifique si es cierto o no que la función objetivo del problema aumentará en 24 unidades si se adquieren 3 unidades de ese recurso productivo.

Pauta Parte B

i) Basta con tomar un par de puntos, por ejemplo $x_1 = (0,0)$ y $x_2 = (1,1)$, donde $x_1, x_2 \in P$, donde $P = \{x : Ax \leq b, x \geq 0, x \text{ enteros}\}$. Luego, si tomamos un punto $x_3 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ existe al menos un valor de $\lambda \in [0,1]$ que hace que x_3 no pertenece a P. Por ejemplo $\lambda = \frac{1}{2} \mapsto x_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ no pertenece a P.

ii) Debe cumplirse que el valor de la función objetivo sea 0 $\left(\sum_{i=1}^{m} t_i^* = 0\right)$.

iii) Esto es verdadero y se desprende fácilmente del teorema débil de dualidad.

iv) Será cierto solo en el caso en que este cambio de 8 unidades mantenga la base óptima obtenida en la resolución del problema original.

Parte C

Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lrcll} \text{mín} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 & & & (P) \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 & \geq & 8 & (1) \\ & 2x_1 + x_2 & \geq & 10 & (2) \\ & x_1 \quad + x_3 & \geq & 4 & (3) \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

Se sabe que en el óptimo el valor de la función objetivo es 12,4. Además, se sabe que la variable dual de la primera restricción de (P) vale 0,8 en el óptimo. Con la información anterior obtenga el valor de las variables del primal y del dual en el óptimo.

Pauta Parte C

El dual es:

$$\begin{array}{lrcll} \text{máx} & 8y_1 + 10y_2 + 4y_3 & & & (D) \\ & y_1 + 2y_2 + y_3 & \leq & 2 & (D1) \\ & 3y_1 + y_2 & \leq & 3 & (D2) \\ & y_1 \quad + y_3 & \leq & 1 & (D3) \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

Ahora, se sabe que:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12,4 \quad (C1)$$

$$8y_1 + 10y_2 + 4y_3 = 12,4 \quad (C2)$$

$$y_1 = 0,8 (C3) \mapsto x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \quad (C4)$$

De $(C1)$ y $(C4)$ se desprende que $x_1 = 4,4 > 0$, entonces la restricción $(D1)$ del dual es activa. Luego se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$8y_1 + 10y_2 + 4y_3 = 12,4 \quad (C2)$$

$$y_1 = 0,8 \quad (C3)$$

$$y_1 + 2y_2 + y_3 = 2 \quad (C5)$$

Al resolverlo se tiene que $y_1^* = 0,8$, $y_2^* = 0,6$ e $y_3^* = 0$ obteniéndose $w^* = 12,4$. Con esto es posible construir el siguiente sistema de ecuaciones (teorema de holgura complementaria) para obtener el valor de las variables del primal.

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12,4 \quad (C1)$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \quad (C4)$$

$$2x_1 + x_2 = 10 \quad (C6)$$

$$x_3 = 0 \quad (C7)$$

La solución que es obtiene es: $x_1^* = 4,4$, $x_2^* = 1,2$ e $x_3^* = 0$ obteniéndose $z^* = 12,4$.

Parte D

Considere el siguiente problema de programación lineal con variables enteras.

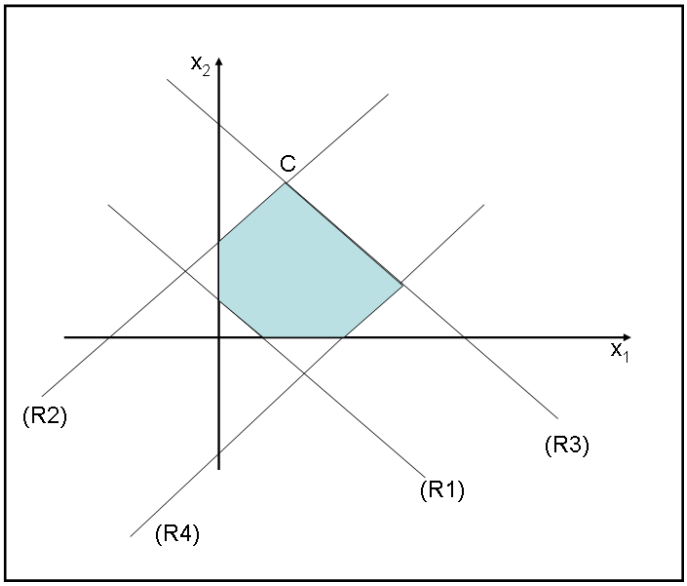
$$\begin{array}{lrcll} \text{máx} & 6x_1 + x_2 & & & (P) \\ & x_1 + x_2 & \geq & 2 & (1) \\ & -x_1 + x_2 & \leq & 2 & (2) \\ & x_1 + x_2 & \leq & 5 & (3) \\ & x_1 - x_2 & \leq & 4 & (4) \\ & x_1, \quad x_2 & \in & \mathbb{Z} & \end{array}$$

Demuestre que la matriz A del problema anterior no es unimodular.

Pauta Parte D

Una opción para demostrar que la matriz A del problema (P) no es unimodular es encontrar un punto extremo de $P = \{Ax = b\}$ que no tenga coordenadas enteras. Como b tiene solo valores enteros, entonces si A es unimodular todos sus puntos extremos serán enteros.

Si miramos el gráfico asociado al problema, se tiene que el punto $C = (\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$, que claramente no es entero. Luego, no todos los puntos extremos de P son enteros a pesar de que el vector b si lo es. Entonces, A no puede ser unimodular.



Parte E

Considere el siguiente problema de optimización lineal:

$$\begin{aligned} &\text{máx} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\leq b_i \quad i = 1, ..., m \\ x_j &\geq 0 \;\; j = 1, ..., n \end{aligned}$$

ahora, siga realice los siguiente pasos:

a) (1.0 punto) Amplifique cada restricción i por un multiplicador $y_i \geq 0$. Luego, obtenga la inecuación resultado de sumar cada una de las m restricciones.

b) (2.0 puntos) Determine bajo qué condiciones el termino $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ es cota superior de la función objetivo del problema planteado inicialmente.

c) (3.0 puntos) Escriba el problema que le permite encontrar la mínima cota superior de la función objetivo del problema inicial. ¿Con qué nombre conoce este problema?

Pauta Parte E

a) Amplifique cada restricción i por un multiplicador $y_i \geq 0$. Luego, obtenga la inecuación resultado de sumar cada una de las m restricciones.

Amplificar la restricción i por un multiplicador y_i queda:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \leq b_i y_i$$

luego, si se suman las m ecuaciones se tiene:

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)y_i \leq \sum_{i=1}^{m}b_i y_i$$

b) Determine bajo qué condiciones el termino $\sum_{i=1}^{n} b_i y_i$ es cota superior de la función objetivo del problema planteado inicialmente.

Si se intercambian las sumatorias del lado izquierdo queda:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_j\right)y_i \leq \sum_{i=1}^{m}b_i y_i$$

como el termino $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}y_i$ solamente depende de j llamémoslo d_j, quedando todo:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(d_j x_j\right)y_i \leq \sum_{i=1}^{m}b_i y_i$$

notemos que si $d_j \geq c_j$ para todo $j = 1, ..., n$, entonces se cumplirá que:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(c_j x_j\right)x_j \leq \sum_{j=1}^{n}\left(d_j x_j\right)y_i \leq \sum_{i=1}^{m}b_i y_i$$

y por lo tanto, el termino $\sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i$ será una cota superior del valor de la función objetivo del problema inicial.

c) Escriba el problema que le permite encontrar la mínima cota superior de la función objetivo del problema inicial. ¿Con qué nombre conoce este problema?

Se debe encontrar el valor mínimo de $\sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i$ bajo la condición de que $d_j \geq c_j$ para todo $j = 1, .., n$. Como se tiene que $d_j = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}y_i$, entonces el siguiente problema:

$$\begin{gathered}\text{mín}\sum_{i=1}^{m}b_i y_i \\ \sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i \geq c_j \quad j = 1, ..., n \\ y_i \geq 0 \;\; i = 1, ..., m\end{gathered}$$

Este problema es el dual del problema inicial. En el proceso se ha verificado el teorema débil de dualidad.

Pregunta 2 (25 %)

Una empresa láctea produce 2 tipos de productos: Leche Entera con un costo de \$40/kilo y un requerimiento de 2 horas-hombre por kilo, y Mantequilla con un costo de \$60/kilo y 1 hora-hombre por kilo. Se sabe que el precio de mercado de la Leche Entera es \$130/kilo y el de la mantequilla de \$200/kilo. Por otra parte suponga que la empresa vende todo lo que produce.

a) (1.0 punto) Maximice la ganancia mensual de la empresa, si esta cuenta con un capital de \$15.000 y 400 horas-hombre al mes.

b) (2.0 puntos) Entregue el valor del precio sombra de las restricciones del problema planteado (y resuelto) en a).

c) (2.0 puntos) Debido a la creciente obesidad en la población, se comienza a consumir Leche Descremada. Se sabe que la Leche Descremada le cuesta al productor \$80/kilo y 3 horas-hombre por kilo. El precio por fijar es \$X/kilo. ¿Cuánto debería ser X para que al producir Leche Descremada exista una ganancia adicional en la empresa?

d) (1.0 punto) Ahora, y volviendo al problema original (o sea, sin la parte c)), usted enfrenta una nueva limitante para determinar su nivel óptimo de producción. Los dueños de la empresa le indican que se deben producir al menos 40 kilos entre ambos productos. Dado esto, ¿cómo utilizaría la solución óptima anterior para determinar la solución óptima de este nuevo problema?

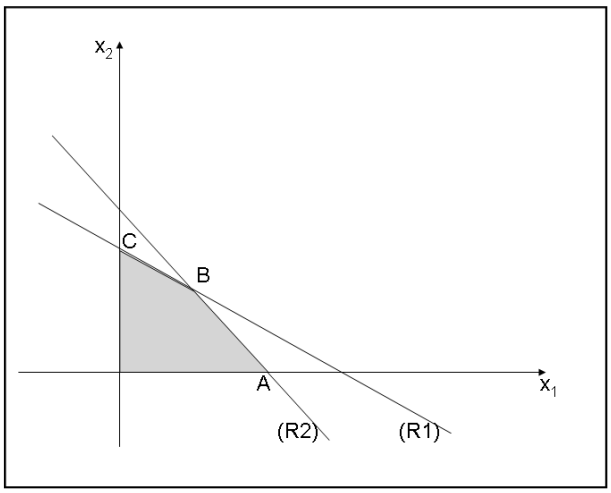
Pauta Pregunta 2

a) Maximice la ganancia mensual de la empresa, si esta cuenta con un capital de \$15.000 y 400 horas-hombre al mes.

Ojo, en esta parte no es necesario describir el modelo matemático, solamente se pide que entreguen cuál es la producción de Leche Entera (x_1) y Mantequilla (x_2) que maximiza la ganancia de la empresa. Luego, pueden obtener la solución mediante análisis gráfico, simplex, o incluso criterio. Acá está resuelto graficando el siguiente modelo matemático.

$$\begin{gathered}\text{máx } 130x_1 + 200x_2 \\ (R1)40x_1 + 60x_2 \leq 15000 \\ (R2)2x_1 + 1x_2 \leq 400 \\ x_1, x_2 \geq 0\end{gathered}$$

El gráfico es:



La solución corresponde al vértice C, coordenadas $x_1 = 0$ y $x_2 = 250$, con valor de la función objetivo de \$50.000.

b) Entregue el valor del precio sombra de las restricciones del problema planteado (y resuelto) en a).

Primero, es necesario construir el dual del problema anterior. Este queda:

$$\begin{gathered}\text{mín } 15000y_1 + 400y_2 \\ (R1)40y_1 + 2y_2 \leq 130 \\ (R2)60y_1 + 1y_2 \leq 200 \\ y_1, y_2 \geq 0\end{gathered}$$

luego, utilizando el teorema de holgura complementaria es posible encontrar el valor de las variables duales (precios sombra). Ojo, no se les pide utilizar el teorema de holgura complementaria, el mismo resultado podrían obtenerlo graficando el problema dual.

Las ecuaciones obtenidas con el teorema de holgura complementaria son:

$$\begin{gathered}(15000 - (40x_1 + 60x_2))y_1 = 0 \\ (400 - (2x_1 + 1x_2))y_2 = 0 \\ (130 - (40y_1 + 2y_2))x_1 = 0 \\ (200 - (60y_1 + 1y_2))x_2 = 0\end{gathered}$$

como se tiene la solución óptima del primal (parte a)), entonces la reemplazamos en el sistema de ecuaciones para obtener los valores óptimos de las variables duales:

$$\begin{gathered}(15000 - (40 \cdot 0 + 60 \cdot 250))y_1 = (0)y_1 = 0 \\ (400 - (2 \cdot 0 + 1 \cdot 250))y_2 = (150)y_2 = 0 \\ (130 - (40y_1 + 2y_2))x_1 = (130 - (40y_1 + 2y_2)) \cdot 0 = 0 \\ (200 - (60y_1 + 1y_2))x_2 = (200 - (60y_1 + 1y_2)) \cdot 250 = 0\end{gathered}$$

desde donde se obtiene que $y_1 = 3,333$ e $y_2 = 0$, con valor de la función objetivo del dual igual a \$50.000. Luego, el valor encontrado corresponde al precio sombra de la restricción 1 (R1 con precio sombra 1,3333) y restricción 2 (R2 con precio sombra 0).

c) Debido a la creciente obesidad en la población, se comienza a consumir Leche Descremada. Se sabe que la Leche Descremada le cuesta al productor \$80/kilo y 3 horas-hombre por kilo. El precio por fijar es \$X/kilo. ¿Cuánto debería ser X para que al producir Leche Descremada exista una ganancia adicional en la empresa?

Para poder responder esta pregunta, se debe construir la forma estándar del problema primal. Esta queda como sigue:

$$\begin{gathered}\text{mín } -130x_1 - 200x_2 - 0x_3 - 0x_4 \\ (R1) 40x_1 + 60x_2 + 1x_3 = 15000 \\ (R2) 2x_1 + 1x_2 + 1x_4 = 400 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\end{gathered}$$

La solución obtenida en a) permite determinar que en el óptimo las variables básicas son $x_2 = 250$ y $x_4 = 150$. Con esto, la base y su inversa son las siguientes matrices:

$$B = \begin{bmatrix} 60 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/60 & 0 \\ -1/60 & 1 \end{bmatrix}$$

luego, el precio \$X por kilo de leche descremada necesario para que la empresa obtenga utilidades al producirla, es tal que debe cumplir con (criterio de costos reducidos negativos):

$$\bar{c_x} = -X - \begin{bmatrix} -200 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/60 & 0 \\ -1/60 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 \\ 3 \end{bmatrix} = -X + 266,66 < 0 \Rightarrow X > 266,67$$

luego, si el precio de cada kilo de leche descremada es mayor a \$266,67 entonces la empresa producirá leche descremada obteniendo una ganancia adicional la empresa.

d) Ahora, y volviendo al problema original (o sea, sin la parte c)), usted enfrenta una nueva limitante para determinar su nivel óptimo de producción. Los dueños de la empresa le indican que se deben producir al menos 40 kilos entre ambos productos. Dado esto, ¿cómo utilizaría la solución óptima anterior para determinar la solución óptima de este nuevo problema?

En este caso se está agregando una nueva restricción al problema ($x_1 + x_2 \geq 40$). Dado esto, se debe verificar si el nuevo espacio de soluciones factibles sigue conteniendo o no a la solución óptima obtenida en la parte a). Si la sigue conteniendo, entonces la solución óptima seguirá siendo la misma. Sino la sigue conteniendo, entonces la actual solución óptima no es factible, luego, para utilizarla como punto de partida del algoritmo de simplex se debe pasar al problema dual y ejecutar el algoritmo desde el dual (donde no se ha perdido factibilidad, solo optimalidad).

Pregunta 3 (45 %)

Una empresa hace su producción diaria con dos máquinas. Se sabe que han llegado I trabajos a comienzos del día (asumamos instante 0) y todos éstos deben pasar primero por la máquina uno y después por la máquina dos. Sean U_i y D_i los tiempos que requiere el trabajo i en las máquinas 1 y 2 respectivamente. El gerente de la empresa ha decidido que la jornada laboral terminará cuando se hayan realizado los I trabajos del día.

a) (4.0 puntos) Con la información anterior desarrolle un modelo de programación lineal con variables continuas y/o enteras que permita a la empresa determinar la secuencia en que se deben procesar los I trabajos, de modo de que la jornada laboral termine lo antes posible.

b) (2.0 puntos) ¿Cómo cambia el modelo formulado en la parte a) si la empresa ha comprado una tercera máquina que usará para compartir los trabajo de la máquina 2? Asuma que la máquina 3 demora T_i unidades de tiempo en realizar el trabajo i.

Pauta Pregunta 3

a) Las variables de decisión de este modelo son:

α_{ij}^k : $\begin{cases} 1 \text{ si el trabajo } i \text{ es procesado exactamente antes que el trabajo } j \text{ en la máquina k} \\ 0 \text{ sino} \end{cases}$

te_i : tiempo en que el trabajo i entra a la máquina 1.

ts_i : tiempo en que el trabajo i sale a la máquina 1.

le_i : tiempo en que el trabajo i entra a la máquina 2.

ls_i : tiempo en que el trabajo i sale a la máquina 2.

η : máximo tiempo de salida de la máquina 2.

Las restricciones asociadas al problema son:

i) Cada trabajo tiene a lo más un sucesor en la secuencia para cada máquina.

$$\sum_{j \in I: i \neq j} \alpha_{ij}^{k} \leq 1 \qquad \forall\, i \in I,\ \forall\, k \in K$$

ii) Todos los trabajos deben pasar por todas las máquinas, que es lo mismo que decir que deben haber exactamente $I-1$ sucesores para formar la secuencia.

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in I: j \neq i} \alpha_{ij}^{k} = I - 1 \qquad \forall\, k \in K$$

iii) Instante en que el trabajo i entra en la máquina 1. Para que esto pase debe haber desocupado la máquina 1 el trabajo que está antes que el i en la secuencia de la máquina 1.

$$te_i \geq ts_j - M(1 - \alpha_{ij}^{1}) \qquad \forall\, i \in I; \forall\, j \in I : j \neq i.$$

con

$$M = \sum_{i \in I} U_i$$

iv) Instante en que el trabajo i sale de la máquina 1.

$$ts_i = te_i + U_i \qquad \forall\, i \in I$$

v) Instante en que el trabajo i entra en la máquina 2. Para que esto pase debe haber desocupado la máquina 2 el trabajo que está antes que el i en la secuencia de la máquina 2.

$$le_i \geq ls_j - G(1 - \alpha_{ij}^{2}) \qquad \forall\, i \in I; \forall\, j \in I : j \neq i.$$

con

$$G = \sum_{i \in I} U_i + D_i$$

vi) Instante en que el trabajo i sale de la máquina 2.

$$ls_i = le_i + D_i \qquad \forall\, i \in I$$

vii) Un trabajo i cualquiera debe salir primero de la máquina 1 y después puede entrar a la máquina 2.

$$le_i \geq ts_i \qquad \forall\, i \in I$$

viii) Construir el máximo tiempo de salida, que debe ser más grande o igual que el tiempo de salida de los I trabajos de la máquina 2.

$$\eta \geq ls_i \qquad \forall\, i \in I$$

ix) Naturaleza de las variables.

$$\alpha_{ij}^{k} \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i, j \in I,\ \forall\, k \in K$$

$$te_i, ts_i, le_i, ls_i \geq 0 \qquad \forall\, i \in I$$

$$\eta \geq 0$$

Función Objetivo:

$$\text{Mín Instante de Término} = \eta$$

b) Se deben agregar las siguientes variables de decisión (que entregarán información temporal sobre trabajos y máquina 3):

we_i : tiempo en que el trabajo i entra a la máquina 3.
ws_i : tiempo en que el trabajo i sale a la máquina 3.
η : máximo tiempo de salida de la máquina 2-3.

La restricciones nuevas o modificadas son:

ii-a) Todos los trabajos deben pasar por la máquina 1, que es lo mismo que decir que deben haber exactamente $I-1$ sucesores para formar la secuencia de esa máquina.

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in I: j \neq i} \alpha_{ij}^{1} = I - 1$$

ii-b) Todos los trabajos deben pasar o por la máquina 2 o la máquina 3, que es lo mismo que decir que deben haber exactamente $I-2$ sucesores entre ambas máquinas para formar las respectivas secuencias.

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in I:j\neq i}\alpha_{ij}^2+\alpha_{ij}^3=I-2$$

vi-m) Instante en que el trabajo i sale de la máquina 2, que debe existir solo si entra a la máquina 2.

$$ls_i=le_i+D_i\left(\sum_{j\in I:j\neq i}\alpha_{ij}^2\right)\qquad\forall\, i\in I$$

vii-m) Un trabajo i cualquiera debe primero salir de la máquina 1 y después puede entrar a la máquina 2, siempre que deba entrar a la máquina 2.

$$le_i+H\left(1-\sum_{j\in I:j\neq i}\alpha_{ij}^2\right)\geq ts_i\qquad\forall\, i\in I$$

con

$$H=\sum_{i\in I}U_i+D_i+T_i$$

viii-m) Construir el máximo tiempo de salida, que debe ser más grande o igual que el tiempo de salida de los I trabajos desde la máquina 2 o la máquina 3.

$$\eta\geq ls_i\qquad\forall\, i\in I$$

$$\eta\geq ws_i\qquad\forall\, i\in I$$

ix-m) Naturaleza de las variables.

$$\alpha_{ij}^k\in\{0,1\}\qquad\forall\, i,j\in I,\ \forall\, k\in K$$

$$te_i,ts_i,le_i,ls_i,we_i,ws_i\geq 0\qquad\forall\, i\in I$$

$$\eta\geq 0$$

x) Instante en que el trabajo i sale de la máquina 3, que debe existir solo si entra a la máquina 3.

$$ws_i=we_i+T_i\left(\sum_{j\in I:j\neq i}\alpha_{ij}^3\right)\qquad\forall\, i\in I$$

xi) Un trabajo i cualquiera debe primero salir de la máquina 1 y después puede entrar a la máquina 3, siempre que deba entrar a la máquina 3.

$$we_i+H\left(1-\sum_{j\in I:j\neq i}\alpha_{ij}^3\right)\geq ts_i\qquad\forall\, i\in I$$