Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
Primer Semestre de 2009

ICS 1102, Optimización

Interrogación 2

INSTRUCCIONES: No se permite el uso de calculadoras. La prueba durará exactamente 150 minutos y consta de 100 puntos, 95 de ellos repartidos entre 5 partes y 5 puntos de bonificación si cumple totalmente las siguientes instrucciones obligatorias: cada parte en hojas separada, nombre y número de lista en todas las hojas, no separar las hojas del cuadernillo.

Parte 1[15 pts.] : Un productor de agua embotellada debe decidir la cantidad y calidad óptimas a producir de agua de forma tal que maximice el beneficio. Se cuenta con la siguiente información:

- La cantidad a producir no puede exceder los 10.000 litros.
- El precio de venta unitario del litro de agua es de $100.
- Para poder comercializar el agua, ésta debe someterse a un tratamiento de remoción de materia orgánica. Si la cantidad de materia orgánica original es L_0 (gr/lt), la cantidad después de t días de tratamiento es:
$$L(t) = L_0 e^{-Kt}$$
donde K es una constante conocida. La materia orgánica en el agua comercializable no debe ser mayor a L_c (gr/lt).
- Hay un costo por transportar el agua a áreas comercializables y presenta economías de escala. Para una cantidad q [lts.] de agua, el costo *unitario* de transporte está dado por la siguiente relación:
$$C_T(q) = 60 - \sqrt{\frac{q}{5}} \quad [\$/lt]$$
- El costo de tratamiento del agua es de $4 por litro por día.
- Para procesar una cantidad q de agua se requiere energía eléctrica según la siguiente relación:
$$DE = 20q^2 + 40qt$$

1. [10 pts.] Construya un modelo que determine la cantidad óptima a procesar de agua y por cuánto tiempo de modo que se maximice el beneficio (ingreso por venta menos costos).
2. [5 pts.] Plantee las condiciones KKT para este problema (no tiene que calcular la solución óptima).

Parte 2[20 pts.] : Solver de Excel. Las siguientes dos preguntas son independientes:

1. [12 pts.] Considere un taller que produce mesas, sillas y bancas, utilizando como únicos recursos madera y metal. Para producir una mesa necesita 8kg de madera y 4kg de metal, para producir una silla necesita 1kg de madera y 2kg de metal, y para producir una banca necesita 18kg de madera y 1kg de metal. Los precios a los cuales el taller vende sus productos son $70, $20 y $100

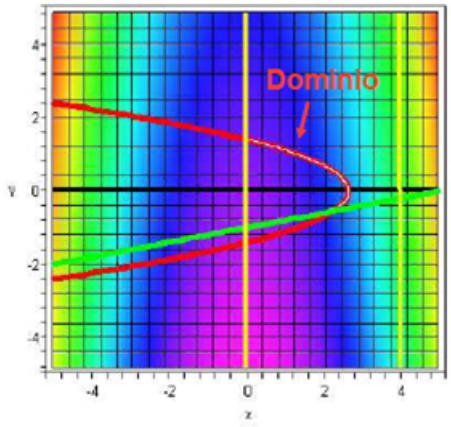
respectivamente para mesas, sillas y bancas. Suponga que un cierto día el taller dispone de 400kg de madera y 300kg de metal, y que el dueño del taller decide cerrar por lo cual desea maximizar sus ventas dados los recursos de los cuales el taller dispone.

Lo han contratado a usted para resolver este problema utilizando el Solver de Excel. Llene la hoja de Excel entregada junto con el cuadernillo con todo lo que se necesite, y los parámetros del Solver en el recuadro, de modo que al hacer click en "Resolver", se encuentre la solución al problema. Especifique claramente el significado y definición de cada celda. Puede asumir no integralidad y no negatividad de variables, y modelo lineal.

2. [8 pts.] En el Taller 2 de Solver de Excel trabajamos con el siguiente problema:

$$\begin{array}{lll} Min & 3x^2 + 2y & \\ s.a. & 3x + 4y^2 = 8 & \text{(restricción 1)} \\ & -x + 5y \geq -5 & \text{(restricción 2)} \\ & 0 \leq x \leq 4 & \text{(restricciones 3 y 4)} \end{array}$$

La siguiente figura muestra el dominio del problema:



En la siguiente hoja de Excel se puede observar la implementación del problema, con los datos de una solución obtenida por Solver:

Modelo

Función Objetivo =		2.804587726
Variable	**x =**	0.089917347
Variable	**y =**	1.390166169

Restricción

Restricciones		
Nombre	**Lado Izquierdo**	**Lado Derecho**
Rest. 1 (=)	7.999999952	8
Rest. 2 (>=)	6.860913498	-5
Rest. 3 (>=)	-0.089917347	-4
Rest. 4 (>=)	0.089917347	0

Además, al obtener Solver la solución anterior se extrae la siguiente información desde el Informe de Sensibilidad respectivo:

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Igual	Multiplicador de Lagrange
C18	Rest. 1 (=) Lado Izquierdo	7.999999952	0.179834525
C19	Rest. 2 (>=) Lado Izquierdo	6.860913498	0
C20	Rest. 3 (>=) Lado Izquierdo	-0.089917347	0
C21	Rest. 4 (>=) Lado Izquierdo	0.089917347	0

a) [2 pts.] ¿Cuál es su estimación respecto al valor de la función objetivo si cambiamos el lado derecho de la Restricción 1 desde 8 a 7.9 y nuevamente resolvemos?

b) [3 pts.] ¿Cuál es su estimación respecto al valor de la función objetivo si cambiamos el lado derecho de la Restricción 2 desde -5 a 6.860913498 y nuevamente resolvemos?

c) [3 pts.] Al utilizar como lado derecho de la Restricción 2 el valor 6.860913498 (en vez de -5) obtenemos, al resolver con Solver, los mismos valores mostrados anteriormente para la tabla de Restricciones extraida del Informe de Sensibilidad. ¿Qué esperaría que pase ahora con la función objetivo si cambiamos el lado derecho de la Restricción 2 desde 6.860913498 a 6.9 y nuevamente resolvemos?

Parte 3[20 pts.] : Las siguientes preguntas son independientes:

1. [12 pts.] Considere el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} Min & (x-1)^2+(y-1)^2 \\ s.a. & (x-2)^2+(y-2)^2 \leq 4 \\ & x+y \leq 2 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

a) [8 pts.] Determine la solución óptima y verifique que se cumplen las condiciones KKT.

b) [4 pts.] ¿Puede determinar sobre la base del multiplicador de Lagrange de la segunda restricción el cambio en el valor óptimo cuando el coeficiente 2 del lado derecho de esa segunda restricción cambia a 1.9? Explique.

2. [4 pts.] Demuestre que, dado el problema:

$$\begin{array}{ll} Min & xy \\ s.a. & y = g(x) \end{array}$$

donde g es una función dos veces diferenciable tal que $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, entonces el punto $(0, 0)$ es mínimo local del problema.

3. [4 pts.] Suponga que enfrenta un problema no lineal unidimensional de minimización que posee solamente una restricción (no negatividad de la variable). ¿Cuáles serían las condiciones necesarias de primer orden para caracterizar un punto mínimo?

Parte 4[20 pts.] : Las siguientes preguntas son independientes:

1. [8 pts.] Considere la función:
$$f(x,y) = x^2 - y^2 + 3xy$$
Muestre que el punto $(x,y) = (0,0)$ es un punto estacionario o punto crítico de la función. Muestre que NO es ni máximo ni mínimo local.

2. [12 pts.] Considere el siguiente problema de optimización:
$$\begin{array}{ll} Max & y \\ s.a. & (x-2)^2 + y^2 \geq 4 \\ & (x-2)^2 + (y+2)^2 \leq 16 \\ & y \geq 0 \end{array}$$
   a) [6 pts.] Identifique la solución óptima de este problema e indique si ese punto es regular o no. Justifique.
   b) [6 pts.] ¿Se cumplen las condiciones KKT en ese punto? Justifique.

Parte 5[20 pts.] : Las siguientes preguntas son independientes:

1. [6 pts.] Considere el siguiente problema de optimización.
$$\begin{array}{lrcl} Min & f(x) & & \\ s.a. & g(x) & \leq & 0 \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$
Este problema es posible resolverlo mediante KKT, por dos caminos alternativos, resolviendo $P1$) o $P2$), donde:
$$P1) \quad Min_{x,\mu \geq 0} \{L(x,\mu) = f(x) + \mu g(x)\}$$
$$P2) \quad Min_{\mu_1,\mu_2 \geq 0} \{L(x,\mu_1,\mu_2) = f(x) + \mu_1 g(x) - \mu_2 x\}$$
Demuestre que las condiciones de optimalidad para $P1$) son equivalentes a las de $P2$).

2. [6 pts.] Considere una variación del método del gradiente en la cual de cada tres iteraciones, en la tercera en vez de escoger la dirección contraria al gradiente se escoge la dirección $x_k - x_{k-2}$, donde x_k es el punto donde estamos parados al comenzar esta tercera iteración. Muestre un ejemplo, utilizando curvas de nivel, para el cual esta variación del método podría ser más eficiente que el método del gradiente.

3. [8 pts.] Encuentre la solución del siguiente problema no lineal con restricciones de desigualdad:
$$\begin{array}{lrcll} Min & (x-1)^2 + (y-3)^2 & & & \\ s.a. & x^2 + y^2 - 2(x+y) & \leq & 0 & \\ & x + y & \leq & 3 & \\ & -x + y & \leq & 2 & \\ & y & \geq & 0 & \\ & & & x & libre \end{array}$$