PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2015
Profesores: G.Angulo - A.Cataldo - R.Cuadrado
S.Encina - D.Pozo - J.Vera

Pauta Examen

Pregunta 1 (14 puntos)

(a) (**4 puntos**) Indique para cada una de las siguientes afirmaciones si ésta es verdadera o falsa. Justifique sus respuestas con claridad.

(i) (**1 punto**) En un problema de optimización no lineal no pueden existir infinitos mínimos locales estrictos.

Respuesta: Falso. Un contraejemplo es $f(x) = sen(x)$.

(ii) (**1 punto**) Para estudiar la convexidad de las funciones $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sum_i |x_i - a|$ y $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \sum_i |e^{x_i}|$ podemos utilizar la matriz Hessiana de cada una de estas funciones.

Respuesta: La función $f_1(x)$ no es diferenciable en $x_i = a$, por tanto no es posible utilizar el Hessiano. En el segundo caso, la función equivalente a $f_2(x) = \sum_i e^{x_i}$, ya que $e^{x_i} \geq 0$. Esta función si es dos veces diferenciable, por lo que podemos usar la matriz Hessiana para caracterizar la función.

(iii) (**1 punto**) Tenemos un problema P) no lineal en el que podemos asegurar la existencia de óptimo global por el teorema de Bolzano-Weierstrass. Entonces, podemos asegurar que se puede encontrar un punto crítico que cumple las condicione KKT.

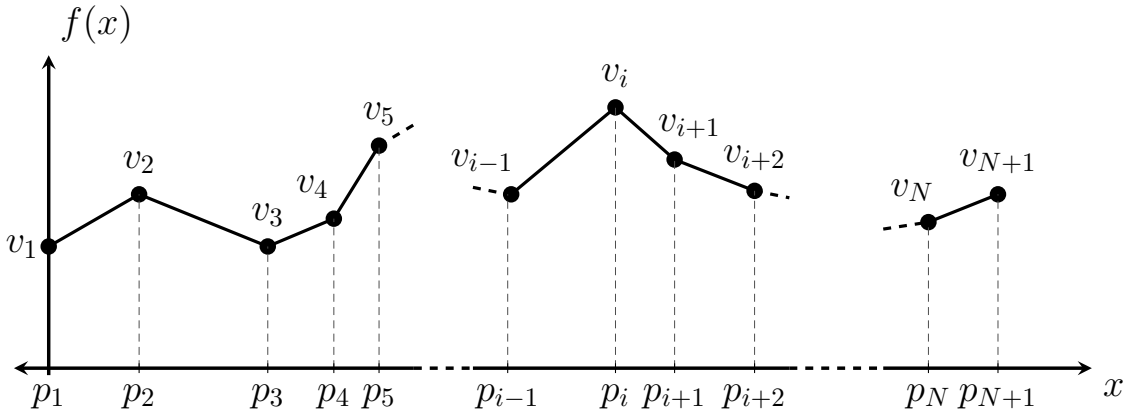
Respuesta: Falso. Podemos tener un punto crítico no regular y entonces no podemos garantizar que vaya a cumplir con KKT. Un gráfico puede servir como contraejemplo. Un ejemplo analítico :

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & x_2 \\ \text{s.a.:} \quad & x_1 - 2(1-x_2)^3 \leq 0 \\ & -x_1 - 2(1-x_2)^3 \leq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(iv) (**1 punto**) Si P) y D) representan problemas lineales donde P) es el problema primal y D) su respectivo dual, y son ambos factibles, entonces tanto el valor de ambas funciones objetivo como las variables son iguales en el óptimo.

Respuesta: La afirmación no cierta. Aunque el Teorema Fuerte de Dualidad asegura que en el óptimo los problemas P) y D) comparten el valor de su función objetivo, no tiene porque compartir siquiera el mismo número de variables de decisión (basta pensar en un problema que tenga 2 variables y 3 restricciones, cuyo dual tendrá 3 variables).

(b) (**3 puntos**) Se tiene la siguiente función $f(x)$ continua y no convexa que está definida por tramos lineales (ver siguiente figura).



Cada tramo i es definido por la función lineal $a_i + b_i x$ donde a_i y b_i son conocidos y calculados a partir de los punto (p_i, v_i) y (p_{i+i}, v_{i+1}). Por tanto,

$$f(x) = a_i + b_i x \qquad \text{si } x \in [p_i, p_{i+1}] \ , \forall i = 1, 2, 3, \ldots, N$$

Escriba $f(x)$ como un conjunto de restricciones lineales que serían aptas para incluir en un problema de programación lineal entera mixta.

Respuesta: Definimos una variable binaria δ_i, $\forall i = 1, \ldots, N$ que toma el valor 1 si $x \in [p_i, p_{i+1}]$ y 0 en otro caso. Entonces, la función puede definirse como:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} (a_i + b_i x)\delta_i = \sum_{i=1}^{N} a_i \delta_i + \sum_{i=1}^{N} b_i x \delta_i.$$

Siempre se está en un tramo de 1 a N,

$$\sum_{i=1}^{N} \delta_i = 1$$

El término $x\delta_i$ es no lineal. Este lo podemos remplazar por una variable continua r_i que tome el valor 0 si $x \notin [p_i, p_{i+1}]$ y x en caso contrario. Esta lógica se puede escribir utilizando formulación tipo big-M. Así, r_i está en $[p_i, p_{i+1}]$ si δ_i toma el valor 1, y 0 en otro caso.

$$p_i \delta_i \leq r_i \leq p_{i+1} \delta_i, \quad \forall i = 1, \ldots N$$

y r_i tiene que ser igual a x (que no depende del tramo) si $\delta_i = 1$.

$$(1 - \delta_i) M_1 \leq x - r_i \leq (1 - \delta_i) M_2, \quad \forall i = 1, \ldots N$$

con M_1 y M_2 constantes conocidas que acotan a x. Observar que M_1 puede ser reemplazada por p_1 y M_2 por p_{N+1}.

Resumiendo,

$$
\begin{aligned}
f(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \delta_i + \sum_{i=1}^{N} b_i r_i & \\
\sum_{i=1}^{N} \delta_i = 1 & \\
p_i \delta_i \leq r_i \leq p_{i+1} \delta_i & \quad \forall i = 1, \dots N \\
(1 - \delta_i) M_1 \leq x - r_i \leq (1 - \delta_i) M_2 & \quad \forall i = 1, \dots N \\
\delta_i \in \{0, 1\} & \quad \forall i = 1, \dots N
\end{aligned}
$$

(c) (**4 puntos**) Dentro del contexto del Algoritmo Simplex:

(i) (**1 punto**) ¿Qué significa que una variable sea básica?

Respuesta: Una variable es considerada básica cuando esta pertenece a la base, es decir que es parte de la solución factible estudiada y que puede tomar valores mayores o iguales a cero, mientras que las no-básicas siempre son iguales a cero.

(ii) (**1 punto**) ¿Qué representa una variable de holgura?

Respuesta: Una variable de holgura representa cuántas unidades podemos utilizar adicionalmente para llegar a la frontera de una restricción de desigualdad, todo esto, dado el valor de las variables de decisión asociadas a esa restricción.

(iii) (**1 punto**) ¿Qué significa para una restricción que su multiplicador simplex asociado sea igual a cero?

Respuesta: Significa que esta restricción no es activa en la solución básica factible estudiada.

(iv) (**1 punto**) En la solución óptima para un problema de maximización, ¿cómo debería ser el vector de costos reducidos asociados a la solución óptima?

Respuesta: El vector de costos reducidos debe ser menor o igual a cero.

(d) (**3 puntos**) Se tiene un problema entero de minimización, PE), con valor óptimo z^* y su correspondiente relajación lineal, PL), con valor óptimo z_0. ¿Qué condición se debería cumplir entre z^* y z_0?

Respuesta: Se debe cumplir que z* debe ser mayor o igual a z^0.

(e) (**Bono de 4 puntos**) Considere el polítopo $P = \text{conv}\{v_1, \dots, v_m\}$ donde $v_1, v_2 \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ son $m \geq 2$ vectores dados, no todos iguales. Queremos determinar $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ tales que la bola $B(x, r)$ sea la bola de menor radio que contiene al conjunto P, donde x es el centro de la bola y r su radio.

(i) (**2 puntos**) Explique claramente por qué el siguiente modelo resuelve el problema:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & r^2 \\
\text{s.a} \quad & \|v_i - x\|_2^2 \leq r^2 \quad \forall i = 1, \dots, m.
\end{aligned}
$$

Respuesta: La restricción define, sobre la norma dos, la distancia a la que queda cada vector (que por ser la envoltura convexa) define del origen de la bola (definido por x). Luego, el problema de optimización busca determinar la bola de menor distancia (definido por el radio r) que asegura que todos los vectores están contenidos en ella.

(ii) (**2 puntos**) Use las condiciones de KKT de este problema para probar que la solución óptima x pertenece a P, es decir, que x se escribe como combinación convexa de los vectores v_i.

Respuesta: Las condiciones de KKT para el punto x vienen dadas por:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \begin{pmatrix} 2\left(x_1 - v_{i1}\right) \\ \vdots \\ 2\left(x_n - v_{in}\right) \\ -2\bar{r} \end{pmatrix} + \mu_r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

con la condiciones de holgura complementaria:

$$\begin{aligned} \mu_1 \left(\sum_{j=1}^{m} \left(x_j - v_{1j}\right)^2 - \bar{r}^2 \right) &= 0 \\ &\vdots \\ \mu_m \left(\sum_{j=1}^{m} \left(x_j - v_{mj}\right)^2 - \bar{r}^2 \right) &= 0 \\ \mu_r \left(-1\right) &= 0 \\ \mu_i, \mu_r &\geq 0 \end{aligned}$$

de estas últimas condiciones se tiene que $\mu_r = 0$, lo que es intuitivo dado que la restricción $r \geq 0$ no es activa.

Tomando la última componente de la relación de los gradientes se tiene que:

$$1 + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \cdot (-2\bar{r}) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} 2\mu_i \bar{r} = 1$$

y con el resto se tiene:

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \begin{pmatrix} 2\left(x_1 - v_{i1}\right) \\ \vdots \\ 2\left(x_n - v_{in}\right) \end{pmatrix} = 2 \sum_{i=1}^{m} \mu_i \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{i1} \\ \vdots \\ v_{in} \end{pmatrix} \right) = 0$$

que se puede ver como:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} 2\mu_i \left(x - v_i\right) = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} 2\mu_i \bar{r} \left(x - v_i\right) = 0 \cdot \bar{r} \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} 2\mu_i \bar{r} x - \sum_{i=1}^{m} 2\mu_i \bar{r} v_i = 0 \\ &\Rightarrow x - \sum_{i=1}^{m} 2\mu_i \bar{r} v_i = 0 \\ &\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{m} 2\mu_i \bar{r} v_i = 0 \end{aligned}$$

Si se define $\alpha_i = 2\mu_i \bar{r}$ (más arriba ser probó que $\sum_{i=1}^{m} 2\mu_i \bar{r} = 1$), se tiene que x es una combinación lineal convexa de los vectores v_i, por lo que x que cumple KKT pertenece a P.

Pregunta 2 (15 puntos)

Considere el problema de optimización no lineal irrestricto:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & f(x) := \frac{1}{2}(x_1 + \alpha x_2)^2 \\ \text{s.a.} & x \in \mathbb{R}^2, \end{array}$$

donde α es un parámetro real dado.

(a) (**2 puntos**) Muestre que todo punto crítico de f satisface $x_1 + \alpha x_2 = 0$.

Respuesta: Tenemos $\nabla f(x) = (x_1+\alpha x_2, \alpha(x_1+\alpha x_2))$. Luego $\nabla f(x) = 0$ implica $x_1+\alpha x_2 = 0$.

(b) (**2 puntos**) Muestre que f es una función convexa para todo α.

Respuesta: Es claro ver que f es composición de una función lineal y una función convexa estrictamente creciente, y por lo tanto f es convexa. Alternativamente, se puede verificar que $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}$, la cual es semidefinida positiva.

Veamos ahora que el método del gradiente converge en una iteración, independientemente del punto inicial elegido. Para ello, considere $x^0 = (y_1, y_2)$, el cual asumimos no es punto crítico de f.

(c) (**2 puntos**) Muestre que el tamaño del paso óptimo es $1/(1 + \alpha^2)$.

Respuesta: Sea $d^0 = -\nabla f(x^0) = (-y_1 - \alpha y_2, -\alpha(y_1 + \alpha y_2))$.

Sea

$$\begin{aligned} g(t) = f(x^0 + td^0) &= f((y_1, y_2) + t(-y_1 - \alpha y_2, -\alpha(y_1 + \alpha y_2))) \\ &= \frac{1}{2}(y_1 + ty_1 - \alpha t y_2 + \alpha y_2 - \alpha^2 t y_1 - \alpha^3 t y_2)^2. \end{aligned}$$

Derivando y tomando $g'(t) = 0$, obtenemos $t^* = 1/(1 + \alpha^2)$.

(d) (**2 puntos**) Determine x^1 y muestre que es un punto crítico de f.

Respuesta: Tenemos $x^1 = x^0 + t^* d^0$. Luego es fácil verificar que $x_1^1 + \alpha x_2^1 = 0$, lo que implica que $\nabla f(x^1) = 0$.

Considere ahora la siguiente modificación donde se han agregado dos restricciones al problema:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & f(x) := \frac{1}{2}(x_1 + \alpha x_2)^2 & \\ \text{s.a.} & x_1 x_2 \geq 1 & (\lambda_1) \quad (1) \\ & x_1 \geq 0 & (\lambda_2) \quad (2) \end{array}$$

(e) (**2 puntos**) Escriba el lagrangeano y las condiciones de KKT de primer orden.

Respuesta: El lagrangeano es

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2}(x_1 + \alpha x_2)^2 + \lambda_1(x_1 x_2 + 1) - \lambda_2 x_1.$$

Las condiciones de primer orden corresponden a

$$\nabla_x L(x, \lambda) = 0 \Leftrightarrow (x_1 + \alpha x_2, \alpha(x_1 + \alpha x_2)) + \lambda_1(x_2, x_1) - \lambda_2(1, 0) = 0$$

$$\lambda_1(x_1 x_2 + 1) = 0$$

$$\lambda_2 x_1 = 0.$$

(f) (**2 puntos**) Argumente que se debe tener $\lambda_2 = 0$.

Respuesta: Debido a (1), tanto x_1 como x_2 deben ser distintos de 0. Por lo tanto, (2) no puede ser activa y luego $\lambda_2 = 0$.

(g) (**3 puntos**) Analice los conjuntos de mínimos locales (si existen) para los casos $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ y $\alpha > 0$. Puede serle útil graficar los casos $\alpha = -1$, $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$.

Respuesta: Las condiciones de KKT implican que $\lambda_1 x_1 = \alpha\lambda_1 x_2 - \alpha\lambda_2$, lo cual se reduce a $\lambda_1 x_1 = \alpha\lambda_1 x_2$ puesto que $\lambda_2 = 0$.

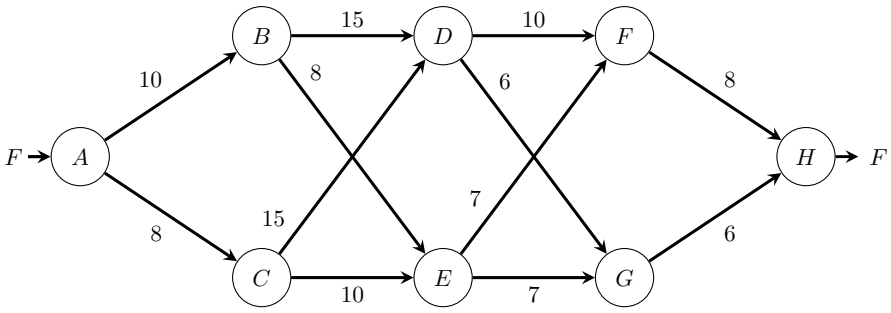
Si $\alpha < 0$, entonces se debe tener $\lambda_1 = 0$ pues $x_1 x_2 \geq 1$. Luego tenemos $\nabla_x L(x, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(x) = 0$, es decir, la soluciones son puntos críticos de f que son factibles para el problema con restricciones. Dados que estos últimos satisfacen $x_1 + \alpha x_2 = 0$, de $x_1 x_2 \geq 1$ concluimos que $-\alpha x_2^2 \geq 1$.

Si $\alpha = 0$, entonces se debe tener $\lambda_1 = 0$ pues $x_1 x_2 \geq 1$. Sin embargo, esto a su vez implica $x_1 = 0$, lo cual no se puede tener.

Si $\alpha > 0$, entonces se debe tener $\lambda_1 > 0$ y $x_1 x_2 = 1$. Por lo tanto de $x_1 = \alpha x_2$ y $x_1 x_2 = 1$ concluimos que $\alpha x_2^2 = 1$. Luego $(\sqrt{\alpha}, 1/\sqrt{\alpha})$ satisface las condiciones.

Pregunta 3 (16 puntos)

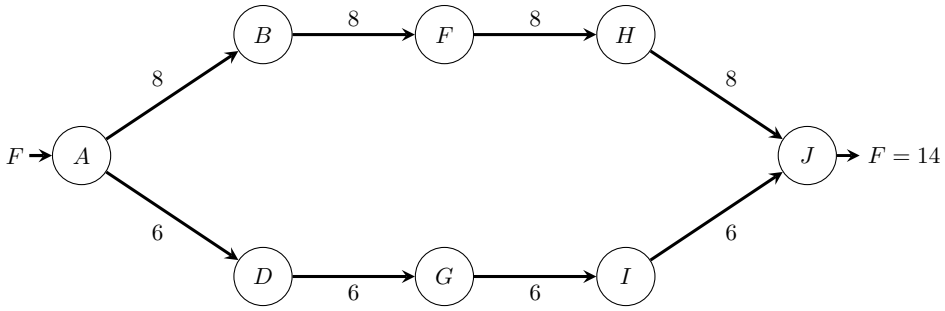
(a) (**8 puntos**) La red de alcantarillado de su ciudad se encuentra funcionando a su máxima capacidad desde hace algunos años. La red actual de la ciudad se muestra en el siguiente grafo, que representa cañerías que transportan aguas servidas entre distintos puntos de bombeo, partiendo en A y terminando en H. En el grafo, los números que acompañan a cada arco indican la capacidad correspondiente:



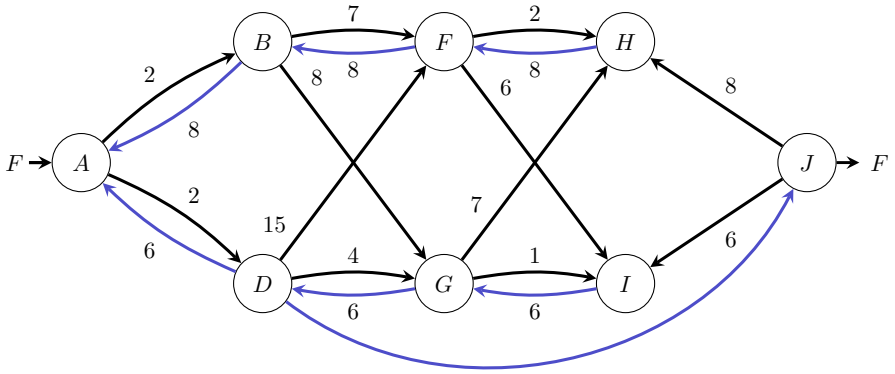
El alcalde de su ciudad, a modo de ganarse la simpatía de sus votantes, ha anunciado con bombos y platillos la construcción de una nueva cañería que una los puntos C y H, la cual contará con una capacidad de 10 m^3 de agua. Según los datos presentados por el alcalde, este ha determinado que por cada m^3 de agua que se transporte desde A a H se genera un beneficio de 2MM pesos. Sin embargo, la construcción de la cañería implicará un costo fijo de 7MM pesos por conceptos de mano de obra más un costo adicional de $0,5$MM pesos por cada m^3 de capacidad construida en la nueva cañería a instalar.

(i) (**5 puntos**) Demuestre al alcalde cuál es el real impacto en beneficios que se generarían con su propuesta, e indique de cuánto debiese realmente ser el tamaño de la cañería propuesta. Justifique con precisión sus argumentos usando contenidos de las materias del curso.

Respuesta: El primer paso es calcular cuál es el flujo actual que se está transportando entre las ciudades A y H. Para ello se calcula el flujo máximo de la red, el cual se encuentra representado en la siguiente figura.



Luego, a partir del grafo residual de la red ya saturada, se analiza el potencial aumento que podría generarse con la construcción de la cañería propuesta por el alcalde. Al realizar una nueva iteración del algoritmo, es posible darse cuenta que el aumento real del flujo que llegará a la ciudad H sería de tan solo 4 m^3 de agua adicionales. Luego los beneficios adicionales que se generarán serán de 8MM, los cuales son menores que los 12MM de costo de la cañería sugerida por el alcalde. Por lo tanto económicamente no sería una buena decisión. En caso de estar obligados a construir esa cañería, el tamaño sugerido para ésta sería de 4 m^3, en donde se generarían los mismos 8MM de beneficios pero a un costo menor de 9MM. De todas formas esta cañería tampoco sería económicamente rentable, por lo que se recomendaría no construirla.



(ii) (**3 puntos**) Si la decisión dependiese de usted, indique a cuál de todos los arcos ya existentes le aumentaría la capacidad y en cuánto exactamente de modo maximizar los beneficios. Suponga que en este caso sólo debe pagar el costo adicional de 0,5MM por m^3. Justifique con precisión.

Respuesta: Para determinar dónde conviene instalar la nueva cañería, basta con analizar donde se encuentran los arcos saturados de la red, para así encontrar por dónde se encuentra el corte mínimo de ésta. Haciendo esto, nos podemos dar cuenta que el corte mínimo se encuentra representado por A-B-C-D-F-G, en donde precisamente la capacidad de ese corte son los $14m^3$ del flujo máximo de la red.

Analizando la red, nos damos cuenta que nos convendría aumentar la capacidad del arco F-H en $4m^3$, apareciendo un nuevo corte mínimo representado por A con una capacidad de 18 m^3 de agua. Los beneficios luego serían de un aumento de 4 m^3 de agua, lo que se traduce en un beneficio de 8MM por un costo total de 2MM.

Nota: Cualquier aumento superior en este arco no reportaría mayores beneficios, ya que el corte mínimo se ha trasladado a un nuevo punto, luego el flujo máximo se encuentra acotado por éste.

(b) (**8 puntos**) Un ayudante de un curso tiene N parejas. Un día, luego de cobrar los P [$] que le correspondía por hacer sus clases (este es el único ingreso que tiene), decidió ir a visitar a sus

pretendientes en las T unidades de tiempo que le quedaban ese día. La pareja i puede recibir a este ayudante en el horario $[a_i, b_i]$, considerando que la visita no puede comenzar antes de la hora a_i y no puede terminar después de la hora b_i (a cada pareja la puede visitar a lo más una vez y siempre en el horario antes estipulado). Por cada unidad de tiempo que este individuo le dedique a su pareja i le significará un costo de p_i [$/u.t] y si le dedica t unidades de tiempo sentirá una utilidad de $u_i(t)$ [unidades de satisfacción].

(I) (**5 puntos**) Formule un modelo de programación dinámica que permita al ayudante planificar su día de modo de maximizar su utilidad total.

Respuesta: Definimos:

Etapas: i : cada una de sus N parejas.

Variables de Estado:

s_i : presupuesto disponible después de visitar a su pareja i

g_i : horas disponibles después de visitar a su pareja i

Variables de Decisión:

x_i : cantidad de horas que dedicará a la visita a su pareja i

Recurrencias de las variables de estado:

$$s_{i+1} = s_i - p_i x_i \geq 0$$
$$g_{i+1} = g_i - x_i \geq 0$$

Función recursiva:

$$V(i) = u_i(x_i) + V_{i+1}(s_{i+1}, g_{i+1})$$

con valor residual $V_{N+1} = 0$.

(II) (**3 puntos**) Considere que $N = 3$, $T = 5$ y que no hay restricciones de presupuesto. Suponga además que los bloques horarios vienen dados por [0,2],[1,3],[2,5]. Si $u_i(t) = i^2 - (i-t)^2 \; \forall i$ ¿Cuál es la planificación óptima para el ayudante del curso? Asuma que los costos (p_i) son todos cero.

Respuesta: Construimos las tablas como sigue:

Tabla $i = 3$:

s_3	$V_3(3)$	$V_3(2)$	$V_3(1)$	$V_3(0)$	V_3^*	x_3^*
5	9	8	5	0	9	3
4	9	8	5	0	9	3
3	9	8	5	0	9	3
2	inf	8	5	0	8	2
1	inf	inf	5	0	5	1
0	inf	inf	inf	0	0	0

Tabla $i = 2$:

s_2	$V_2(2)$	$V_2(1)$	$V_2(0)$	V_2^*	x_2^*
4	12	12	9	12	2,1
3	9	11	9	11	1
2	4	8	8	8	1
1	inf	3	0	3	1

Tabla $i = 1$:

s_1	$V_1(2)$	$V_1(1)$	V_1^*	x_1^*
5	11	13	13	1

De acuerdo a los resultados obtenidos, existen dos planificaciones óptimas, ambas entregando una utilidad total de 13. En una de ellas dedica 1 hora a la visita a su pareja 1, 1 hora a la visita a su pareja 2 y 3 horas a su pareja 3, y la otra implica dedicar 1 hora a su pareja 1, 2 a su pareja 2 y 2 a su pareja 3.

Pregunta 4 (15 puntos)

En una empresa del sector minero existe una red de transporte de mineral entre la mina y la planta chancadora. Esta red se puede representar por un grafo dirigido $G = (N, A)$, donde N son los nodos y $A \subset N \times N$ son los arcos dirigidos que conecta algunos nodos. El nodo $r \in N$ corresponde a la mina y el nodo $s \in N$ corresponde a la planta. Cada conexión $(i, j) \in A$ tiene una capacidad igual a $u_{ij} > 0$ toneladas mensuales. La empresa quiere determinar cuánto es la máxima cantidad de mineral que puede enviar desde la mina a la planta en un mes ya que por eso obtiene una utilidad. Digamos que α es la utilidad (en US$) por cada tonelada enviada desde la mina a la planta. El problema que se produce es que por efecto de congestión de las conexiones de transporte, hay un deterioro del mineral que se traduce en ua pérdida de valor del mineral que se incrementa mientras mayor sea la saturación de la conexión. Específicamente, si por el arco (i, j) está transportando una cierta cantidad de mineral, entonces hay una pérdida en el valor de este que se puede estimar por lo siguiente: $\beta_{ij}[\$/ton]$ por cada tonelada transportada en la conexión (i, j) y además una cantidad proporcional al cuadrado de la cantidad transportada en la conexión (i, j), donde la constante de proporcionalidad de esto último es igual a $\gamma_{ij}[\$/(ton)^2]$. Además, si una conexión es usada, por razones físicas, esta debe transportar una cantidad de al menos l_{ij} toneladas en el mes.

(a) (**9 puntos**) Escriba un modelo de Optimización que permita determinar cuánta es la cantidad de mineral que se puede enviar desde la mina a la planta de modo que se maximice la utilidad neta y se cumplan las condiciones indicadas.

Respuesta: El mismo enunciado ya da la clave de que la variable de decisión es x_{ij}. Adicionalmente se requiere de una variable binaria para activar la cota inferior al flujo cuando se usa una conexión. El modelo es simple para los que recuerden la formulación del problema de flujo máximo como problema de optimización:

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \alpha F - \sum_{(i,j)\in A} (\beta_{ij} x_{ij} + \gamma_{ij}(x_{ij})^2) \\
s.a. \quad & \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{k:(k,i)\in A} x_{ki} = 0, \quad i \neq r, s \\
& \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{k:(k,i)\in A} x_{ki} = F, \quad i = r \\
& \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{k:(k,i)\in A} x_{ki} = -F, \quad i = s \\
& l_{ij} z_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} z_{ij}, \quad \forall (i,j) \in A \\
& z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i,j) \in A
\end{aligned}
$$

(b) (**6 puntos**) Suponga ahora que la empresa quiere usar el modelo desarrollado en (a) para estimar cuánto podrían ganar en un año completo (12 meses). La utilidad por flujo transportado, en este caso, depende del mes en cuestión y es α_t por tonelada. Esto se podría calcular resolviendo 12 veces el modelo de (a) si no fuera porque debido al deterioro de las conexiones, estas

no pueden usarse por más de dos meses seguidos. Escriba el modelo que determina la máxima utilidad neta que se podría obtener en el año, respetando todas las condiciones descritas.

Respuesta: Para esta parte, las variables toman una dimensión adicional: el tiempo: x_{ij}^t y z_{ij}^t. Además el flujo de entrada del mes t es F_t. De este modo, el modelo queda:

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \sum_{t=1}^{12} \alpha F_t - \sum_{t=1}^{12} \sum_{(i,j)\in A} (\beta_{ij} x_{ij}^t + \gamma_{ij} (x_{ij}^t)^2) \\
s.a. \quad & \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij}^t - \sum_{k:(k,i)\in A} x_{ki}^t = 0, \quad i \neq r, s, t = 1, \ldots, 12 \\
& \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij}^t - \sum_{k:(k,i)\in A} x_{ki}^t = F_t, \quad i = r, t = 1, \ldots, 12 \\
& \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij}^t - \sum_{k:(k,i)\in A} x_{ki}^t = -F_t, \quad i = s, t = 1, \ldots, 12 \\
& l_{ij} z_{ij}^t \leq x_{ij}^t \leq u_{ij} z_{ij}^t, \quad \forall (i,j) \in A, t = 1, \ldots, 12 \\
& z_{ij}^t + z_{ij}^{t+1} + z_{ij}^{t+2} \leq 2, \quad t = 1, \ldots, 10 \\
& z_{ij}^t \in \{0, 1\}, \quad \forall (i,j) \in A
\end{aligned}
$$