PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 2021-2
Profesores: M. Klapp, R. Cuadrado, J. González, S. Vásquez, F. Verastegui

Tarea 1

Fecha de entrega: Martes 14 de septiembre - 23:59:00

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas podría generar una penalización en la nota de la tarea.

- La tarea se desarrolla en **parejas** que **no necesariamente** deben pertencer a la misma sección o grupo de proyecto semestral. Cada pareja entrega una sola tarea. Sin embargo, también es posible hacer la tarea individualmente.
- La entrega de la tarea es online en formato PDF a través de un **Google Form** dispuesto en Canvas. Es decisión del grupo escribirla en computador o a mano. Si es a mano, se recomienda utilizar la aplicación Cam Scanner para generar el archivo entregable. El formato de entrega del archivo es **nombre_completo_1 - nombre_completo_2.pdf o nombre_completo_1.pdf**, dependiendo de si hiceron la tarea en pareja o solos (Ej: camila_ignacia_toro_uquillas - pedro_pablo_perez_pereira.pdf o camila_ignacia_toro_uquillas.pdf).

  Se bonificará con **3 décimas sobre la nota final de la tarea** si la tarea está escrita en Latex. Se pondrá a disposición de los estudiantes una plantilla tipo y el código de fuente Latex de la tarea para incentivar este formato. También, el ayudante podrá descontar **3 décimas sobre la nota final** si la tarea está ilegible o desordenada de acuerdo a su criterio.
- El plazo de entrega es impostergable. Tarea atrasada se considera **tarea NO entregada**.
- La tarea es en pareja. No se recomienda dividir el trabajo en dos, sino que hacer un trabajo completo en conjunto. Pueden discutir los problemas con los profesores y ayudantes del curso, pero al final cada grupo es responsable de sus resultados y conclusiones. Una actitud deshonesta será sancionada de acuerdo a lo estipulado en el programa de este curso.[1].
- Cualquier duda sobre el enunciado, debe ser envíada a través del foro **Tarea 1** publicado en Canvas. Este foro centralizará las dudas de todas las secciones sobre el **enunciado de la tarea**.

  Se recomienda hacer las preguntas anticipadamente. El **día de la entrega se dejará de responder consultas**.

[1] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1. (20 puntos)

Usted es el nuevo gerente de producción de una planta de manufactura de paneles solares. En su planta existen N modelos de paneles y desea planificar la producción de los próximos T meses. Para construir cada modelo de panel, se consta con M materias primas. Además, una unidad de un modelo de panel requiere una unidad de diferentes tipos de materias primas. Esta información se detalla en el parámetro binario u_{nm}, que vale 1 si la materia prima m sirve para fabricar el panel tipo n y 0 en otro caso.

La fabricación de cada panel se realiza en alguna de las L líneas de producción. La capacidad de producción de cada línea es C_{lt} [unidades/mes] en el periodo t por linea l. Por otro lado, debido a la limitada capacidad de su proveedor, existe una cantidad máxima de unidades de materia prima que puede comprar por periodo, la cual está dada por el parámetro M_{mt}. Considere que las materias primas compradas en el periodo t están inmediatamente disponibles.

En cuanto a costos, fabricar una unidad del modelo n en la línea l cuesta P_{nl}. Además, existen costos de inventario constantes a lo largo del horizonte de evaluación, donde el parámetro I_n indica el costo de almacenar una unidad del panel tipo n un periodo y el parámetro H_m indica el costo de almacenar una unidad de materia prima m un periodo. También, se dispone de inventarios iniciales de tipos de panel, $s_{n,0}$ y de materias primas $r_{m,0}$.

La demanda de cada panel es d_{nt}, que indica la cantidad de paneles tipo n que se requieren en el periodo t. Se puede tener demanda insatisfecha a un costo F_n por panel de tipo n no entregado.

(a) (12 puntos) Formule un modelo de Programación Lineal que ayude a planificar decisiones de producción e inventario de paneles solares mes a mes, para satisfacer las condiciones mencionadas y minimizar costos.

(b) (4 puntos) Suponga que existe un costo fijo por ordenar un tipo de materia prima en cada periodo. Esto implica que debe pagar S_{mt} si pide la materia prima m en el periodo t, independiente de la cantidad solicitada. Extienda el modelo realizado en la parte a) para representar esta situación.

(c) (4 puntos) Suponga ahora que su proveedor le informa que si quiere realizar un pedido de materia prima m, entonces la cantidad solicitada debe ser igual al menos a una cantidad Q definida a priori (lote mínimo). Extienda el modelo de la parte b) para representar esta situación.

Solución Problema 1.

(a) Variables:

- x_{nlt}:= cantidad producida de producto $n \in N$ en línea $l \in L$ en periodo $t \in T$.
- y_{mt}:= cantidad de materia prima $m \in M$ que se compra en el periodo $t \in T$.
- z_{nt}:= balance de inventario del producto $n \in N$ en el periodo $t \in T \cup \{0\}$.
- z^+_{nt}:= inventario físico de producto $n \in N$ en el periodo $t \in T$.
- z^-_{nt}:= inventario faltante de producto $n \in N$ en el periodo $t \in T$.
- w_{mt}:= inventario de materia prima $m \in M$ en el periodo $t \in T \cup \{0\}$.

Función Objetivo: Minimizar costos

$$\text{mín} \sum_t \sum_m \sum_n \sum_t x_{nlt} \cdot P_{nl} + z^+_{nt} \cdot I_n + z^-_{nt} \cdot F_n + w_{mt} \cdot H_m$$

Restricciones:

- Balance de inventario de paneles.

$$z_{nt} = z_{n,t-1} + \sum_{l \in L} x_{nlt} - d_{nt}, \qquad \forall n \in N, t \in T$$

◇ Relación entre balance de inventario, inventario físico e inventario faltante.

$$z_{nt} = z^+_{nt} - z^-_{nt} \quad \forall n \in N, t \in T$$

◇ Balance de inventario de materias primas.

$$w_{mt} = w_{m,t-1} + y_{mt} - \sum_{n \in N} \sum_{l \in L} u_{nm} \cdot x_{nlt} \quad \forall m \in M, t \in T$$

◇ Inventarios iniciales.

$$z_{n,0} = s_{n,0} \quad \forall n \in N$$
$$w_{m,0} = r_{m,0} \quad \forall m \in M$$

◇ Cantidad máxima de materia prima a pedir.

$$y_{mt} \leq M_{mt} \quad \forall m \in M, t \in T$$

◇ No superar la capacidad de producción de la línea.

$$\sum_{n \in N} x_{nlt} \leq C_{lt} \quad \forall l \in L, t \in T$$

◇ Naturaleza de las variables.

$$x_{nlt} \geq 0 \quad \forall n \in N, l \in L, t \in T$$
$$y_{mt} \geq 0 \quad \forall m \in M, t \in T$$
$$z^+_{nt} \geq 0 \quad \forall n \in N, t \in T$$
$$z^-_{nt} \geq 0 \quad \forall n \in N, t \in T$$
$$w_{mt} \geq 0 \quad \forall m \in M, t \in T$$

(b) Se debe agregar la siguiente variable:

$$v_{mt} := \begin{cases} 1 & \text{Si se pide la materia prima } m \text{ en el periodo } t, \forall m \in M, t \in T \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A la función objetivo se agrega el término:

$$\sum_{m \in M} \sum_{t \in T} v_{mt} \cdot S_{mt}$$

Se agregan las siguientes restricciones:

$$y_{mt} \leq M_{mt} \cdot v_{mt} \quad \forall m \in M, t \in T$$
$$v_{mt} \in \{0, 1\} \quad \forall m \in M, t \in T$$

(c) Para cumplir con lo pedido se debe agregar la siguiente restricción:

$$y_{mt} \geq Q \cdot v_{mt} \quad \forall m \in M, t \in T$$

Problema 2. (20 puntos)

Usted está encargado de organizar un gran torneo de padel y debe determinar la mejor manera de formar grupos de jugadores de modo que todos lo pasen lo mejor posible y popularizar el torneo. Considere que hay J jugadores inscritos a distribuir en G grupos de 4 jugadores cada uno. Cada pareja de jugadores $(i;j) : i < j$ ha declarado cierta afinidad por estar en el mismo grupo representada por el parámetro a_{ij}.

Con tal de determinar la agrupación de jugadores dentro de los G grupos que entregan la máxima afinidad, usted decide construir el siguiente modelo de optimización lineal binario:

$$\text{máx} \sum_{g=1}^{G} \sum_{i=1}^{J-1} \sum_{j=i+1}^{J} a_{ij} y_{ijg}$$

$$\sum_{g=1}^{G} x_{ig} = 1 \quad \forall i \in J \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{J} x_{ig} = 4 \quad \forall g \in G \tag{2}$$

$$y_{ijg} \geq x_{ig} + x_{jg} - 1 \quad \forall i, j \in J : i < j, \forall g \in G \tag{3}$$

$$y_{ijg} \leq x_{ig} \quad \forall i, j \in J, \forall g \in G \tag{4}$$

$$x_{ig} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in J, \forall g \in G \tag{5}$$

$$y_{ijg} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in J : i < j, \forall g \in G \tag{6}$$

(a) (2 puntos) Indique cuáles son las variables de decisión y su significado.

(b) (6 puntos) Explique cuál es el propósito y significado de cada término de la función objetivo y de cada restricción del problema.

(c) (6 puntos) Ahora usted quiere hacer el torneo un poco más competitivo y justo, por lo que quiere evitar que en un mismo grupo hayan jugadores de distintos niveles de juego. Para eso, cada jugador i cuenta con una lista N_i, que contiene los jugadores con los que no puede jugar. Modifique el problema propuesto de modo que se cumpla esta nueva condición.

(d) (6 puntos) Para fomentar aún más la competitividad y justicia, ahora se determina que los grupos pueden ser solo mujeres, solo hombres o mixtos (con exactamente 2 mujeres y 2 hombres). Suponga que usted conoce los conjuntos M y H con los jugadores que son mujeres y hombres respectivamente. Modifique el problema propuesto de modo que se cumpla esta nueva condición.

Solución Problema 2.

(a) Variables de decisión:

$$x_{ig} := \begin{cases} 1 & \text{Si el jugador } i \text{ se asigna al grupo } g,\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, J\}, g \in \{1, 2, \ldots, G\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$y_{ijg} := \begin{cases} 1 & \text{Si los jugadores } i, j \text{ se asignan al mismo grupo } g,\ \forall (i, j) \in \{1, 2, \ldots, J\} : i < j, g \in \{1, 2, \ldots, G\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(b) $\diamond$ La función objetivo indica que se maximiza la afinidad existente en la creación de grupos.

- ◇ R1 : Los jugadores pueden estar en un solo grupo.
- ◇ R2: Cada grupo debe estar formado por 4 jugadores.
- ◇ R3: Es una restricción de relación de variables. Para que y_{ijg} valga 1, el jugador i y el jugador j deben pertenecer al grupo g.
- ◇ R4: Es una restricción de relación de variables. Obliga a y_{ijg} a ser 0 si el jugador i no pertenece al grupo g.
- ◇ R5 y R6: Son restricciones de naturaleza de variables.

(c) Para realizar lo pedido se añade la siguiente restricción:

$$\sum_{k \in N_i} y_{ikg} \leq M \cdot (1 - x_{ig}) \quad \forall i \in J, \quad g \in G, \quad M >> 0$$

(d) Para cumplir con lo pedido se agregan las siguientes variables:

$$z_g := \begin{cases} 1 & \text{Si el grupo } g \text{ está compuesto por solo mujeres, } \forall g \in \{1, 2, \ldots, G\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$w_g := \begin{cases} 1 & \text{Si el grupo } g \text{ está compuesto por solo hombres, } \forall g \in \{1, 2, \ldots, G\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$m_g := \begin{cases} 1 & \text{Si el grupo } g \text{ está compuesto por 2 mujeres y 2 hombres, } \forall g \in \{1, 2, \ldots, G\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Además, se agregan las siguientes restricciones:

- ◇ Definición de la variable z_g

$$4 \cdot z_g \leq \sum_{i \in M} x_{ig} \quad \forall g \in G$$

- ◇ Definición de la variable w_g

$$4 \cdot w_g \leq \sum_{i \in H} x_{ig} \quad \forall g \in G$$

- ◇ Definición de la variable m_g

$$2 \cdot m_g \leq \sum_{i \in H} x_{ig} \quad \forall g \in G$$

$$2 \cdot m_g \leq \sum_{i \in M} x_{ig} \quad \forall g \in G$$

- ◇ El grupo debe ser de solo mujeres, solo hombres o 2 mujeres y 2 hombres

$$z_g + w_g + m_g = 1 \quad \forall g \in G$$

- ◇ Naturaleza de las variables

$$z_g \in \{0, 1\} \quad \forall g \in G$$
$$w_g \in \{0, 1\} \quad \forall g \in G$$
$$m_g \in \{0, 1\} \quad \forall g \in G$$

Problema 3. (20 puntos)

Todas las mañanas, una familia de 4 integrantes (1 padre, 1 madre y 2 hijos) se va junta en auto a dejar a los niños al colegio. Cada uno de ellos se despierta a las 7:00 de la mañana, se ducha, se prepara su desayuno y lee el diario (no necesariamente en ese orden). La casa en la que viven cuenta sólo con 1 baño y llega 1 diario cada día. Por tema de gustos, todos comen y beben cosas distintas, por lo que cada persona prepara su desayuno y deja todo ordenado para cuando venga el siguiente.

La siguiente tabla muestra cuánto se demora cada integrante, en minutos, en realizar cada actividad.

Integrante	Desayuno	Ducha	Leer diario
Padre	25	10	20
Madre	20	20	10
Hijo 1	20	10	10
Hijo 2	25	20	10

Formule un modelo de programación lineal entera mixta, que determine la secuencia de actividades de cada integrante para salir lo antes posible a dejar a los niños al colegio, considerando que cada integrante debe realizar todas las actividades, que se puede realizar una a la vez y que dos personas no pueden realizar la misma actividad en el mismo instante.

Solución Problema 3.

Para simplificar la modelación, se transforma la información de la tabla al parámetro α_{ij} , que representa cuánto tiempo demora la persona i, con $i = 1, \ldots, 4$, en realizar la actividad j, con $j = 1, 2, 3$.

Variables:

- t_{ij} : tiempo en el que la persona i, con $i = 1, \ldots, 4$, comienza a realizar la actividad j, con $j = 1, \ldots, 3$.
- y_{ijk}: variable binaria que toma valor 1 si la persona i, con $i = 1, \ldots, 4$, realiza la actividad j, con $j = 1, \ldots, 3$, antes que la persona k, con $k = 1, \ldots, 4 : k \neq i$.
- z_{ijr}: variable binaria que toma valor 1 si la persona i, con $i = 1, \ldots, 4$, realiza la actividad j, con $j = 1, \ldots, 3$, antes de realizar la actividad r, con $r = 1, \ldots, 3 : r \neq j$.
- μ: variable que determina el tiempo que le toma a la familia salir de la casa.

Función Objetivo: Minimizar el tiempo que demoran en salir de la casa

$$\text{mín}\, \mu$$

Restricciones:

- Condición de secuenciamiento de actividades entre familiares.

$$t_{ij} \geq t_{kj} + \alpha_{kj} - M(1 - y_{kji}) \quad \forall i, k = 1, \ldots, 4 : i \neq k, \forall j = 1, \ldots, 3$$

- Para cada actividad solo puede haber un antecesor.

$$\sum_{i=1, i\neq k}^{4} y_{ijk} \leq 1 \quad \forall j = 1, \ldots, 3, \forall k = 1, \ldots, 4$$

- Para cada actividad solo puede haber un sucesor.

$$\sum_{k=1, i\neq k}^{4} y_{ijk} \leq 1 \quad \forall j = 1, \ldots, 3, \forall i = 1, \ldots, 4$$

◇ Como hay 4 personas, para cada actividad se debe dar 3 veces la relación antecesor-sucesor.

$$\sum_{k=1}^{4} \sum_{i=1:i\neq k}^{4} y_{ijk} = 3 \quad \forall j = 1, \ldots, 3$$

◇ Condición de secuenciamiento de las actividades realizadas por una persona.

$$t_{ir} \geq t_{ij} + \alpha_{ij} - M(1 - z_{ijr}) \quad \forall i = 1, \ldots, 4, \forall j, r = 1, \ldots, 3 : j \neq r$$

◇ Para cada persona solo puede haber una actividad antecesora.

$$\sum_{j=1, j\neq r}^{3} z_{ijr} \leq 1 \quad \forall r = 1, \ldots, 3, \forall i = 1, \ldots, 4$$

◇ Para cada persona solo puede haber una actividad sucesora.

$$\sum_{r=1, r\neq j}^{3} z_{ijr} \leq 1 \quad \forall j = 1, \ldots, 3, \forall i = 1, \ldots, 4$$

◇ Como hay 3 actividades, para cada persona se debe dar 2 veces la relación antecesor-sucesor.

$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{r=1:r\neq j}^{3} z_{ijr} = 2 \quad \forall i = 1, \ldots, 4$$

◇ Construcción de la variable μ

$$\mu \geq t_{ij} + \alpha_{ij} \quad \forall i = 1, \ldots, 4, \forall j = 1, \ldots, 3$$

◇ Naturaleza de las variables

$$t_{ij} \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, 4, \forall j = 1, \ldots, 3$$
$$y_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i, k = 1, \ldots, 4 : i \neq k, \forall j = 1, \ldots, 3$$
$$z_{ijr} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \ldots, 4, \forall j, r = 1, \ldots, 3 : j \neq r$$
$$\mu \geq 0$$