PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2017
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado - F. Palomino
A. Cataldo - J.T. Marquinez

Solución Tarea 4

Fecha de Entrega: 27 de junio.

La tarea tiene un total de 65 puntos. Se necesitan solamente 60 puntos para llegar al 7.0, pudiendo obtener un 7.5 en caso de tener el puntaje máximo.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos ya asignados para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cuatro grupos de hojas el día de la entrega.
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día martes 27 de junio a las 12:30 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta. Además, **la entrega de la tarea se debe realizar entre las 10:30 y las 12:30 el día de la entrega**. Esto, para evitar cualquier conflicto durante la mañana.
- ◇ Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta la escalación a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[2].
- ◇ Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1. (15 puntos)

a) (2 puntos) Suponga que desea resolver un problema de flujo a costo mínimo. Para ello, cuenta con el grafo $G = (V, E)$, en el cual la suma de flujos exógenos es cero (es decir, la oferta es igual a la demanda). Para obtener una base inicial factible, plantea el problema de Fase I, obteniendo un grafo $G' = (V', E')$, en donde se agregó un vértice artificial y se agregaron $|V|$ arcos, desde el nodo artificial a cada uno de los nodos originales (en el sentido que corresponda según la demanda/oferta del nodo original). Usted resuelve Fase I y su solución resulta única y no degenerada. ¿Qué puede concluir del problema original?

b) (3 puntos) Dado un grafo $G = (V, E)$, usted quiere determinar la ruta más corta desde el nodo A hasta el nodo B. Sin embargo, le dijeron que un determinado arco, que empieza y termina en dos nodos distintos a A y B, posee un costo negativo. Eso si, este arco es el de menor valor absoluto comparado con todos los otros arcos. Usted sabe además que uno de los requisitos para poder aplicar el algoritmo Dijkstra es que todos los arcos sean no negativos. Determine qué puede hacer con el grafo para usar el algoritmo Dijkstra asegurando encontrar la ruta óptima entre A y B.

c) (3 puntos) Suponga que tiene el siguiente juego: En un tablero con n espacios ordenados, parte en la casilla 1 y debe llegar a la casilla n. Se cuenta con las siguientes reglas:

- ◇ En cada jugada, usted puede avanzar un espacio.
- ◇ Si está en una casilla que es múltiplo de 3, puede elegir avanzar dos espacios en una sola jugada.
- ◇ Si está en una casilla que es múltiplo de 4, puede elegir avanzar tres espacios en una sola jugada. Sin embargo, a la siguiente jugada pierde turno.

Modele este problema como uno de optimización de flujo en redes a costo mínimo, indicando los nodos, arcos, costos y cotas (si es que hay). No es necesario que escriba las ecuaciones matemáticas, basta con realizar el grafo con todas sus partes.

d) (2 puntos) Compare el método del Gradiente con el método de Newton: mencione una ventaja que tenga cada uno con respecto al otro.

e) (2 puntos) ¿Qué condiciones deben cumplir los parámetros a y b para que un punto de la función $f(x, y) = x^2 + axy + by^2 + x + y$ cumpla con las condiciones necesarias, pero no suficientes para ser mínimo?

f) (3 puntos) Dado el problema:

$$\begin{aligned} & \text{mín } c^T x \\ s.a. & \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Demuestre mediante las condiciones de KKT que una condición necesaria y suficiente para que x^* sea una solución óptima del problema es que: $\bar{c}_R^T = c_R^T - c_B^T B^{-1} R \geq 0$

Solución Problema 1.

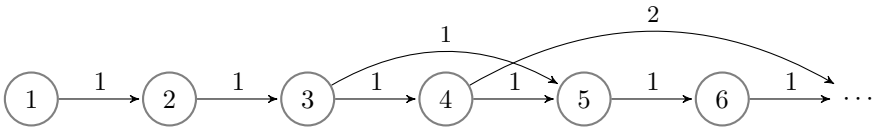
a) Para que en fase I se obtenga el valor 0 (que es lo ideal), todos los arcos artificiales deben ser cero. Sin embargo, como una base siempre forma un árbol, significa que alguno de los arcos artificiales debe estar dentro de la base (sino el nodo artificial quedaría "aislado"), por lo cual alguno de los arcos básicos debe ser nulo, haciendo la solución degenerada. Si la solución óptima de Fase I es no degenerada, significa que no estoy en el caso mencionado, por lo que mi óptimo es mayor que cero, lo cual implica que el problema original es infactible.

b) Sea $c < 0$ el costo del arco en cuestión. Lo que se puede hacer es generar un corte, en donde el nodo A esté en el conjunto de partida (S), y B esté en el conjunto de llegada (T), de tal forma que el arco con costo negativo esté dentro del corte. Así, a todos los arcos que conforman el corte (es decir, que van de S a T), hay que sumarles $|c|$. A su vez, a todos los arcos que van de T a S, hay que restarles $|c|$. El arco con valor negativo quedará igual a cero, y todos los arcos a los cuales se les resta $|c|$ seguirán siendo no

negativos, debido a que se mencionó que $|c|$ era el menor valor absoluto de entre todos los arcos. Así, están las condiciones para aplicar Dijkstra.

Se puede asegurar de que encontrará la misma solución óptima debido a que, cualquier ruta que escoja de A a B, le estaré sumando una constante $|c|$, por lo que la ruta óptima de este nuevo problema será la misma que el anterior.

c) La red con sus costos sería la siguiente:



Los costos de cada arco representan la cantidad de jugadas. Es decir, para un nodo k:

- ◇ Hay un arco hacia $k+1$ con un costo de 1.
- ◇ Si $k \in 3, 6, 9, 12, \ldots$, entonces hay un arco hacia $k+2$ con un costo de 1.
- ◇ Si $k \in 4, 8, 12, 16, \ldots$, entonces hay un arco hacia $k+3$ con un costo de 2.

Además, en el nodo 1 hay una oferta de 1 unidad, y en el nodo n hay una demanda de 1 unidad. Las cotas no es necesario especificarlas, pues no son relevantes para el problema (se asume cotas igual a 0 y ∞).

d) El método de Newton funciona mejor cuando se trata de funciones cuadráticas. El método del Gradiente en general posee un menor costo en cada iteración, pues el método de Newton debe invertir una matriz, lo cual, para grandes dimensiones, puede ser muy costoso.

e) Las condiciones de primer orden serían:

$$\nabla f(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} 2x + ay + 1 = 0 \\ ax + 2by + 1 = 0 \end{cases}$$

Además, se deben cumplir las condiciones necesarias de segundo orden, pero no las necesarias. Es decir, el Hessiano debe ser semidefinido positivo, pero no definido positivo. Calculamos el Hessiano y sus determinantes:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & a \\ a & 2b \end{bmatrix} \qquad \Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = 4b - a^2$$

Para que se cumpla la condición necesaria, se debe tener que $\Delta_1 \geq 0$ y $\Delta_2 \geq 0$. Esto ocurre si $4b \geq a^2$. Ahora, para que sea definida positiva, se debe cumplir que $\Delta_1 > 0$ y $\Delta_2 > 0$. Para que esto último no pase, se debe tener que $4b \leq a^2$.

Así, para cumplir lo pedido en el enunciado, se debe tener que $4b = a^2$.

f) Separemos el problema en variables básicas y no básicas:

$$\begin{aligned} &\text{mín } c_B^T x_B + c_R^T x_R \\ s.a. \quad & \\ & Bx_B + Rx_R = b \\ & x_B, x_R \geq 0 \end{aligned}$$

Luego, se tiene que $x_B = B^{-1}b + B^{-1}Rx_R$, y reemplazando en la función se obtiene:

$$\begin{aligned} &\text{mín}(c_R^T - c_b^T B^{-1} R)x_R + c_B^T B^{-1} b \\ s.a. \quad & \\ & -x_R \leq 0 \end{aligned}$$

Las condiciones de KKT para este problema son que

$$\nabla f(x_R) + \sum_i \mu_i \nabla g_i(x_R) = 0$$

Que especificamente quedan:

$$(c_R^T - c_b^T B^{-1} R) + \mu(-1) = 0 \Leftrightarrow (c_R^T - c_b^T B^{-1} R) = \mu$$

por lo tanto, como $\mu \geq 0$ se tiene que para asegurar esto $(c_R^T - c_b^T B^{-1} R) \geq 0$, con lo que se verifica que el criterio de costos reducidos cumple con la condición de KKT.

Problema 2. (20 puntos)

a) (8 puntos) Usted maneja una empresa que fabrica relojes en tres distintas fábricas. La fábrica A produce 3 relojes; la fábrica B produce 4; y en la fábrica C se produce 6. También, posee una demanda en tres zonas distintas: D, E y F, siendo 5, 7 y 1 reloj la demanda en cada una respectivamente. La siguiente tabla muestra los costos unitarios de transporte de cada fábrica a cada ciudad:

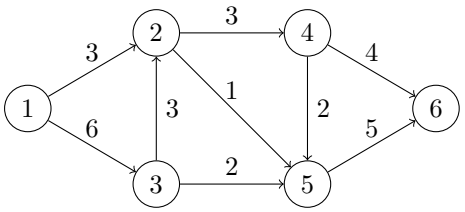
c_{ij}	D	E	F
A	2	4	3
B	3	1	1
C	6	5	7

Actualmente usted satisface la demanda enviando 3 unidades de A a E, 3 unidades de B a D, 1 unidad de B a F, 2 unidades de C a D y 4 unidades de C a E.

i) (2 puntos) Plantee un problema de flujo en redes que le permita satisfacer la demanda, usando toda la oferta que dispone, a costo mínimo. (Solo es necesario que plantee el grafo, no son necesarias las ecuaciones matemáticas)

ii) (6 puntos) Resuelva el problema mediante simplex especializado en redes.

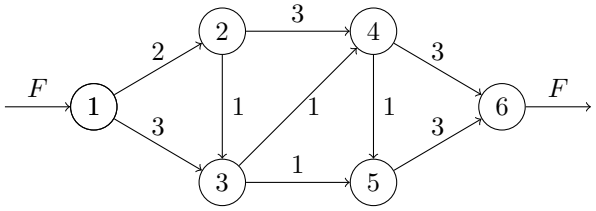
b) (5 puntos) Sea el siguiente grafo con sus respectivas distancias:



Se quiere determinar un problema de ruta mínima pero de forma distinta: se quiere determinar cuál es la distancia mínima desde cada uno de los nodos al nodo 6. Es decir, cuál es la mínima distancia del nodo 1 al nodo 6, del nodo 2 al nodo 6, etc. El algoritmo Dijkstra, al usarlo una vez, puede determinar la distancia mínima de uno a muchos. Sin embargo, para determinar la distancia mínima de muchos a uno, se requiere usar el algoritmo varias veces. Lamentablemente, solo le permitieron usar el algoritmo Dijkstra una sola vez, por lo que ve complicado este problema.

Plantee una forma en que, usando una sola vez el algoritmo Dijkstra visto en clases, pueda determinar la ruta mínima desde cada uno de los nodos hasta el nodo 6. Luego, resuelva el problema usando una vez el algoritmo Dijkstra.
(*Hint: Plantee un nuevo grafo G' a partir del grafo original*)

c) (7 puntos) Sea el siguiente grafo, en el cual se presentan las cotas superiores de cada arco:



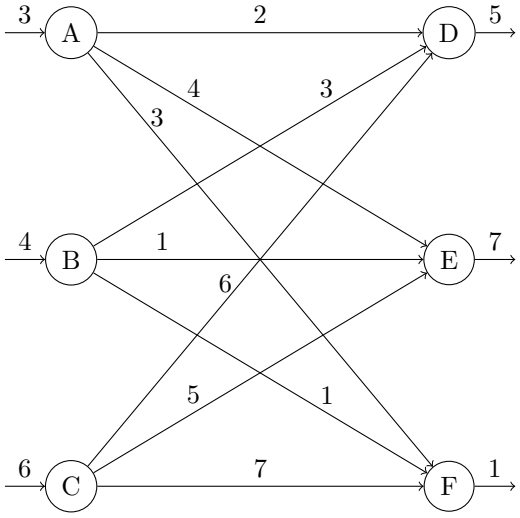
i) (2 puntos) Plantee el modelo matemático explícito para el problema de flujo máximo asociado al grafo.

ii) (3 puntos) Obtenga cuál es el flujo máximo mediante el algoritmo de Ford & Fulkerson.

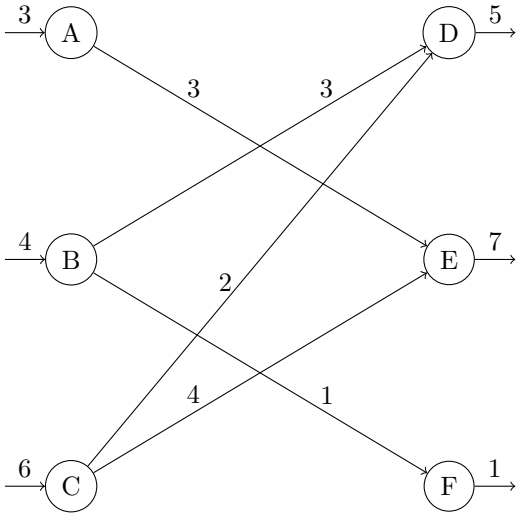
iii) (2 puntos) Compruebe que la solución obtenida en (ii) es óptima mediante el Teorema de Ford & Fulkerson. Para esto, considere que se pueden realizar en total 16 cortes en este problema.

Solución Problema 2.

a) i) El grafo, con sus respectivos costos, ofertas y demandas, sería el siguiente:



ii) Actualmente, la solución es la siguiente:



Primero debemos saber si estamos en el óptimo o no. Para ello, como sabemos que $\bar{c_{ij}} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$,

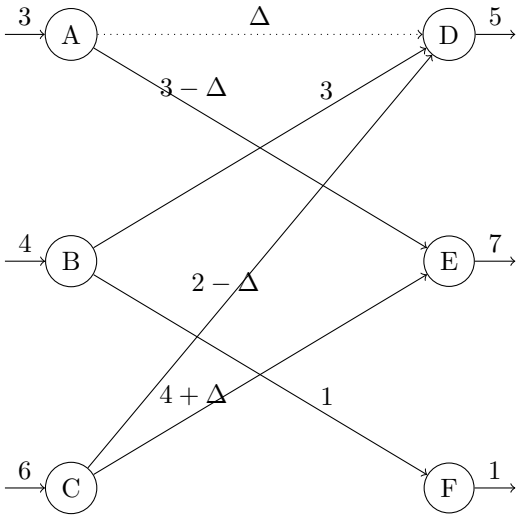
calculamos el valor de las variables duales a través de los arcos básicos:

$$\begin{array}{l} \pi_1 - \pi_5 = 4 \\ \pi_2 - \pi_4 = 3 \\ \pi_2 - \pi_6 = 1 \\ \pi_3 - \pi_4 = 6 \\ \pi_3 - \pi_5 = 5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \pi_1 = 4 \\ \pi_2 = 2 \\ \pi_3 = 5 \\ \pi_4 = -1 \\ \pi_5 = 0 \\ \pi_6 = 1 \end{array}$$

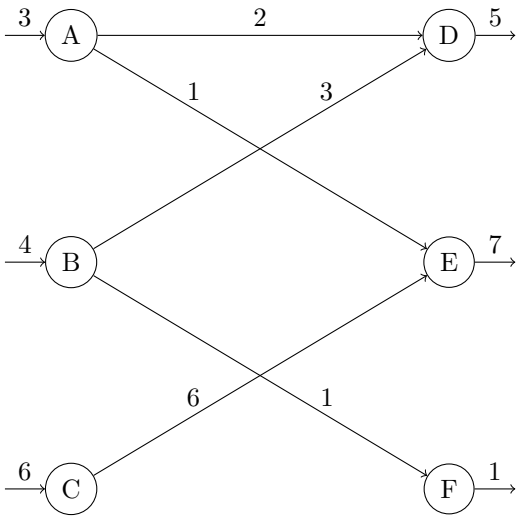
Así, los costos reducidos de los flujos no básicos quedaría:

$$\begin{array}{l} \bar{c}_{14} = 2 - \pi_1 + \pi_4 = -3 \\ \bar{c}_{16} = 3 - \pi_1 + \pi_6 = 0 \\ \bar{c}_{25} = 1 - \pi_2 + \pi_5 = -1 \\ \bar{c}_{36} = 7 - \pi_3 + \pi_6 = 3 \end{array}$$

Como hay al menos un valor negativo, no estamos en el óptimo. El arco (1,4) entrará a la base debido a su valor más negativo que el resto.
Para ver cuál arco sale de la base, veamos el siguiente grafo:



Al aumentar Δ, el primer arco que se tornará nulo es (C, D). Así, $\Delta = 2$, y la nueva base sería:



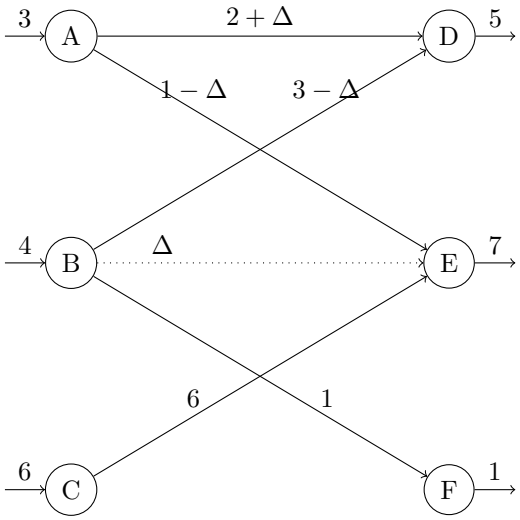
Repetimos el mismo procedimiento para ver si estamos en el óptimo:

$$\begin{array}{l} \pi_A - \pi_D = 2 \\ \pi_A - \pi_E = 4 \\ \pi_B - \pi_D = 3 \\ \pi_B - \pi_F = 1 \\ \pi_C - \pi_E = 5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \pi_A = 4 \\ \pi_B = 5 \\ \pi_C = 5 \\ \pi_D = 2 \\ \pi_E = 0 \\ \pi_F = 4 \end{array}$$

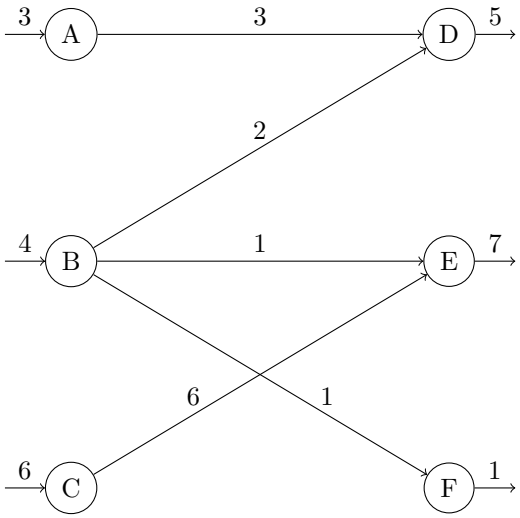
Así, los costos reducidos de los flujos no básicos quedaría:

$$\begin{array}{l} \bar{c}_{AF} = 3 - \pi_A + \pi_F = 3 \\ \bar{c}_{BE} = 1 - \pi_B + \pi_E = -4 \\ \bar{c}_{CD} = 6 - \pi_C + \pi_D = 3 \\ \bar{c}_{CF} = 7 - \pi_C + \pi_F = 6 \end{array}$$

Como hay al menos un valor negativo, no estamos en el óptimo. El arco (BE) entrará a la base debido a su valor más negativo que el resto. El arco que sale:



Al aumentar Δ, el primer arco que se tornará nulo es (A, E). Así, $\Delta = 1$, y la nueva base sería:



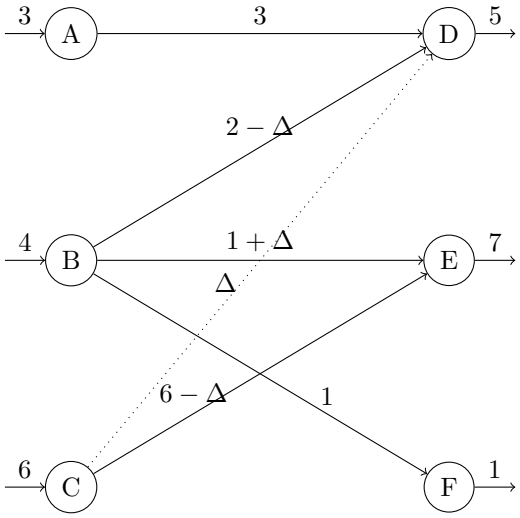
Repetimos el mismo procedimiento para ver si estamos en el óptimo:

$$\begin{array}{l} \pi_A - \pi_D = 2 \\ \pi_B - \pi_D = 3 \\ \pi_B - \pi_E = 1 \\ \pi_B - \pi_F = 1 \\ \pi_C - \pi_E = 5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \pi_A = -1 \\ \pi_B = 0 \\ \pi_C = 4 \\ \pi_D = -3 \\ \pi_E = -1 \\ \pi_F = -1 \end{array}$$

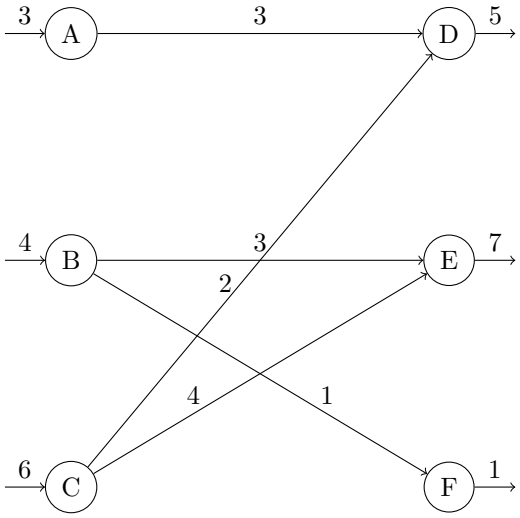
Así, los costos reducidos de los flujos no básicos quedaría:

$$\begin{array}{l} \bar{c}_{AE} = 4 - \pi_A + \pi_E = 4 \\ \bar{c}_{AF} = 3 - \pi_A + \pi_F = 3 \\ \bar{c}_{CD} = 6 - \pi_C + \pi_D = -1 \\ \bar{c}_{CF} = 7 - \pi_C + \pi_F = 6 \end{array}$$

Como hay al menos un valor negativo, no estamos en el óptimo. El arco (CD) entrará a la base debido a su valor más negativo que el resto. El arco que sale:



Al aumentar Δ, el primer arco que se tornará nulo es (BD). Así, $\Delta = 2$, y la nueva base sería:



Repetimos el mismo procedimiento para ver si estamos en el óptimo:

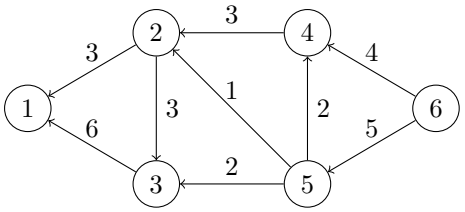
$$\begin{array}{l} \pi_A - \pi_D = 2 \\ \pi_B - \pi_E = 1 \\ \pi_B - \pi_F = 1 \\ \pi_C - \pi_D = 6 \\ \pi_C - \pi_E = 5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \pi_A = 1 \\ \pi_B = 1 \\ \pi_C = 5 \\ \pi_D = -1 \\ \pi_E = 0 \\ \pi_F = 0 \end{array}$$

Así, los costos reducidos de los flujos no básicos quedaría:

$$\begin{aligned} \bar{c}_{AE} &= 4 - \pi_A + \pi_E = 3 \\ \bar{c}_{AF} &= 3 - \pi_A + \pi_F = 2 \\ \bar{c}_{BD} &= 3 - \pi_B + \pi_D = 1 \\ \bar{c}_{CF} &= 7 - \pi_C + \pi_F = 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, estamos en el óptimo.

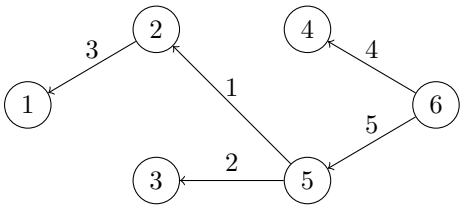
b) El grafo G' a construir sería el mismo, pero con todos los arcos en sentido contrario. Así, sería el siguiente:



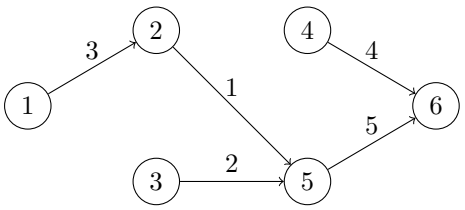
Por lo tanto, calculamos Dijkstra en este grafo a partir del nodo 6. En la siguiente tabla se muestra las iteraciones, en donde se ocupa la notación (distancia, predecesor):

Nodo/Iteración	0	1	2	3	4	5
6	$(0,-)$	$(0,-)$	$(0,-)$	$(0,-)$	$(0,-)$	$(0,-)$
5	$(\infty,-)$	$(5,6)$	$(5,6)$	$(5,6)$	$(5,6)$	$(5,6)$
4	$(\infty,-)$	$(4,6)$	$(4,6)$	$(4,6)$	$(4,6)$	$(4,6)$
3	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(7,5)$	$(7,5)$	$(7,5)$
2	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(7,4)$	$(6,5)$	$(6,5)$	$(6,5)$
1	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(9,2)$	$(9,2)$

Por lo tanto, la solución de Dijkstra sería:



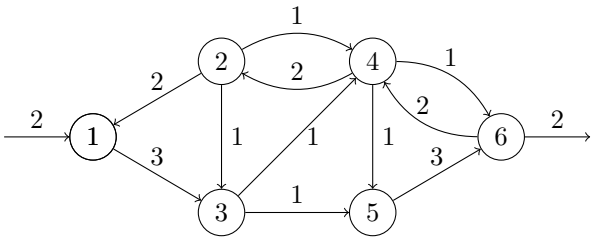
Así, el árbol de rutas mínimas desde cada nodo al nodo 6 sería:



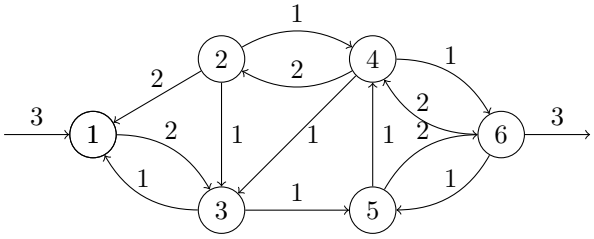
c) i) El problema sería el siguiente:

$$\begin{array}{lccl}
\text{máx} & F & & \\
s.a. & x_{12}+x_{13} & = & F \\
 & x_{23}+x_{24}-x_{12} & = & 0 \\
 & x_{34}+x_{35}-x_{13}-x_{23} & = & 0 \\
 & x_{45}+x_{46}-x_{24}-x_{34} & = & 0 \\
 & x_{56}-x_{35}-x_{45} & = & 0 \\
 & -x_{46}-x_{56} & = & -F \\
0 \leq & x_{23}, x_{34}, x_{35}, x_{45} & \leq & 1 \\
0 \leq & x_{12} & \leq & 2 \\
0 \leq & x_{13}, x_{24}, x_{46}, x_{56} & \leq & 3
\end{array}$$

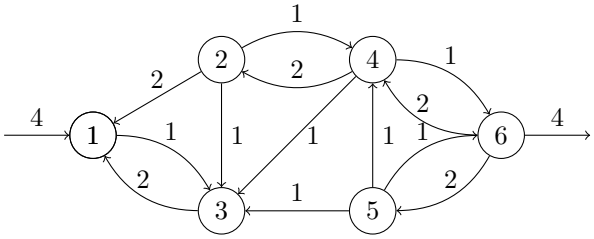
ii) Para esto, debemos empezar a mandar unidades a través del grafo e ir construyendo el grafo residual. Primero, elegimos cualquier ruta, supongamos la ruta 1-2-4-6 y mandamos dos unidades por ahí. El grafo residual sería:



Elegimos ahora la ruta 1-3-4-5-6 y nos queda:



Elegimos la ruta 1-3-5-6 y queda:



Ahora, podemos ver que no queda ninguna ruta que vaya desde 1 hasta 6. Por lo tanto, alcanzamos el flujo máximo del problema, que es igual a 4.

iii) El teorema afirma que el flujo máximo es igual al valor del corte mínimo del problema. Por lo tanto, para comprobar esto, calcularemos todos los cortes del grafo y sus valores.

nodos $\in S$	nodos $\in T$	Valor del corte
1	2,3,4,5,6	5
1,2	3,4,5,6	7
1,3	2,4,5,6	4
1,4	2,3,5,6	9
1,5	2,3,4,6	8
1,2,3	4,5,6	5
1,2,4	3,5,6	8
1,2,5	3,4,6	10
1,3,4	2,5,6	7
1,3,5	2,4,6	6
1,4,5	2,3,6	11
1,2,3,4	5,6	5
1,2,3,5	4,6	7
1,2,4,5	3,6	9
1,3,4,5	2,6	8
1,2,3,4,5	6	6

De entre todos los cortes, el de menor valor es con los nodos 1 y 3 en el conjunto de partida (S), y el resto de los nodos en el conjunto de llegada (T), con valor 4, por lo que se verifica la solución obtenida en (ii).

Problema 3. (18 puntos)

a) (6 puntos) Sea el siguiente problema de optimización no lineal:

$$\begin{array}{lllll} \text{mín} & x^2+3y^2-z^2 & & \\ s.a. & -16x+5y-3z & = & 2 \\ & 3x-y+z & \geq & 0 \\ & -3x+y-z & \geq & 0 \end{array}$$

i) (2 puntos) Verifique la regularidad del dominio.

ii) (3 puntos) Encuentre la solución óptima.

iii) (1 puntos) Si a usted le permiten aumentar en 0.01 unidades el lado derecho de alguna de las restricciones, ¿Cuál aumentaría y por qué?¿Cuánto cambiaría el valor óptimo? ¿Es exacto ese cálculo?

b) (4 puntos) Las condiciones de KKT para problemas con restricciones de desigualdad fueron analizadas en el curso. Además, si las variables son no negativas, el sistema de ecuaciones cambia con respecto a tener variables libres.

Entonces, si se tiene un problema de optimización no lineal restricto, con variables no negativas, alguien podría pensar en usar las ecuaciones de KKT para variables no negativas, o bien podría considerar que la no negatividad de las variables son restricciones del problema y trabajar como si las variables fueran libres.

¿Es lo mismo usar ambos métodos? Demuestre. Use el siguiente ejemplo para facilitar su solución:

$$\begin{array}{lllll} \text{mín} & f(x) & & \\ s.a. & g(x) & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

c) (4 puntos) Escriba las condiciones de KKT para el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lllll} \text{mín} & f(x,y) & & \\ s.a. & g(x,y) & \leq & 3 \\ & h(x,y) & = & 5 \\ & y & \geq & 1 \end{array}$$

¿Son estas condiciones suficientes para caracterizar como "mínimo" a un punto que las satisfaga?

d) (4 puntos) Considere el siguiente problema de optimización sin restricciones:

$$\text{mín}\, x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y$$

i) (2 puntos) Realice 4 iteraciones del método del Gradiente a partir del punto (0,0). Sea explícito en su primera iteración. Para el resto de las iteraciones, no es necesario que coloque todo el desarrollo.

i) (2 puntos) Encuentre una expresión general para la iteración k y concluya cuál es la solución del problema mirando el comportamiento de los puntos obtenidos por el método. Puede apoyarse en herramientas computacionales si lo desea.

Solución Problema 3.

a) i) Notemos que la segunda y tercera restricción se pueden reescribir como una de igualdad, lo que permitirá un desarrollo más fácil del ejercicio. Es decir:

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x - y + z & \geq & 0 \\ -3x + y - z & \geq & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 3x - y + z = 0$$

Para verificar si el dominio es regular, debemos ver la matriz Jacobiana de las restricciones activas. Como son ambas restricciones de igualdad, hay que analizar las dos restricciones.

$$J(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial z} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Las filas son l.i. para cualquier valor de (x, y, z). Por lo tanto, todo el dominio es regular.

ii) Planteamos el Lagrangeano:

$$L = x^2 + 3y^2 - z^2 + \lambda_1(-16x + 5y - 3z - 2) + \lambda_2(3x - y - z)$$

Y las condiciones que deben cumplirse son:

$$\begin{array}{c} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 16\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 6y - 5\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = -2z - 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -16x + 5y - 3z = 2 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 3x - y + z = 0 \end{array}$$

Resolviendo el sistema, llegamos a que $(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = (-\frac{4}{15}, \frac{1}{15}, \frac{13}{15}, \frac{2}{3}, \frac{56}{15})$.
Para saber si efectivamente corresponde a un mínimo, calculamos el Hessiando del Lagrangeano:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

No se puede decir nada a partir del Hessiano. Por lo tanto, debemos ver si se cumple:

$$\partial\vec{x}^T H \partial\vec{x} \geq 0$$

Entonces, se debe cumplir que:

$$\begin{array}{c} -16\partial x + 5\partial y - 3\partial z = 0 \\ 3\partial x - \partial y + \partial z = 0 \\ \partial x^2 + 3\partial y^2 - \partial z^2 \geq 0 \end{array}$$

De la segunda ecuación podemos obtener que:

$$\partial y = 3\partial x + \partial z \quad \rightarrow \partial y^2 = 9\partial x^2 + 6\partial x\partial z + \partial z^2$$

Reemplzando:

$$\begin{aligned}\partial x^2 + 3\partial y^2 - \partial z^2 &= \partial x^2 + 3(9\partial x^2 + 6\partial x\partial z + \partial z^2) - \partial z^2 \\ &= 28\partial x^2 + 18\partial x\partial z + 2\partial z^2 \\ &= 14\partial x^2 + 9\partial x\partial z + \partial z^2 \\ &> 14\partial x^2 + 2\sqrt{14}\partial x\partial z + \partial z^2 = (\sqrt{14}\partial x + \partial z)^2 \geq 0\end{aligned}$$

Se cumple la condición. Por lo tanto, el punto obtenido es un mínimo.

iii) Aumentaría el de la segunda restricción. Esto, porque su multiplicador de Lagrange es mayor, lo que implica que es más sensible frente a pequeños cambios. El valor óptimo cambiaría aproximadamente en $0{,}01 \cdot \lambda_2 = 0{,}0373$. Este valor no es exacto, debido a que el multiplicador representa cambios marginales que no son necesariamente lineales.

b) Obtengamos las condiciones de KKT para el problema del enunciado, considerando que solo hay una restricción.

$$L = f(x) + \mu_1(g(x) - b)$$

Las condiciones serían:

$$(1) \quad \frac{\partial L}{\partial x} = \nabla f(x) + \mu_1 \nabla g(x) \geq 0$$

$$(2) \quad x\frac{\partial L}{\partial x} = x(\nabla f(x) + \mu_1 \nabla g(x)) = 0$$

$$(3) \quad x \geq 0$$

$$(4) \quad \frac{\partial L}{\partial \mu_1} \leq 0$$

$$(5) \quad \mu_1\frac{\partial L}{\partial \mu_1} = 0$$

$$(6) \quad \mu_1 \geq 0$$

Es decir, se deben cumplir estas 6 ecuaciones. Ahora, si hubiésemos considerado la naturaleza de las variables como una restricción más:

$$L' = f(x) + \mu_1(g(x) - b) + \mu_2(-x)$$

Las condiciones serían:

$$(1') \quad \frac{\partial L'}{\partial x} = \nabla f(x) + \mu_1 \nabla g(x) - \mu_2 = 0$$

$$(2') \quad \frac{\partial L'}{\partial \mu_1} \leq 0$$

$$(3') \quad \mu_1\frac{\partial L'}{\partial \mu_1} = 0$$

$$(4') \quad \mu_1 \geq 0$$

$$(5') \quad \frac{\partial L'}{\partial \mu_2} = -x \leq 0$$

$$(6') \quad \mu_2\frac{\partial L'}{\partial \mu_2} = 0$$

$$(7') \quad \mu_2 \geq 0$$

Las escuaciones sobre la restricción $g(x) \leq b$ siguen siendo las mismas. A partir de la ecuación $(1')$,

podemos obtener que:

$$\mu_2 = \nabla f(x) + \mu_1 \nabla g(x)$$

Usando este resultado, la ecuación $(7')$ es equivalente a la ecuación (1), la ecuación $(6')$ es quivalente a la ecuación (2) y la ecuación $(5')$ es equivalente a la ecuación (3).

Por lo tanto, es equivalente usar ambas formas de las condiciones de KKT.

c) Planteamos el Lagrangeano:

$$L = f(x,y) + \mu_1(g(x,y) - 3) + \lambda_2(h(x,y) - 5) + \mu_3(-y + 1)$$

Considerando que x e y son irrestrictas y que la segunda restricción es de igualdad, se tiene que las condiciones de KKT son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \mu_1 \frac{\partial g}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \mu_1 \frac{\partial g}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial h}{\partial y} - \mu_3 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \mu_1} \leq 0 \quad &\Rightarrow \quad g(x,y) - 3 \leq 0 \\
\mu_1 \frac{\partial L}{\partial \mu_1} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \mu_1(g(x,y) - 3) = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad h(x,y) - 5 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \mu_3} \leq 0 \quad &\Rightarrow \quad -y + 1 \leq 0 \\
\mu_3 \frac{\partial L}{\partial \mu_3} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \mu_3(-y + 1) = 0 \\
\mu_1, \mu_3 \geq 0 &
\end{aligned}$$

Estas condiciones no son suficientes, sino que necesarias. Para que sean suficientes, se deben comprobar condiciones de segundo orden.

d) i) Primero, calculamos el gradiente de la función objetivo:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ 4y - 2x - 2 \end{pmatrix}$$

El gradiente en el punto $x_0 = (0,0)$ es:

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Así, $x_1 = x_0 - \lambda(0,-2) = (0, 2\lambda)$. Para encontrar el mejor λ posible, resolvemos el problema de optimización unidimensional:

$$\text{mín}\, f(0, 2\lambda) = 8\lambda^2 - 4\lambda$$

Derivando e igualando a cero, obtenemos que $\lambda = \frac{1}{4}$. Por lo tanto, $x_1 = (0, \frac{1}{2})$.

Realizando las siguientes iteraciones, podemos obtener que los próximos puntos van a ser $x_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), x_3 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), x_2 = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}), x_2 = (\frac{3}{4}, \frac{7}{8})$

ii) Generalizando, se obtienen las siguientes expresiones. Si k es par:

$$x_k = \left(\frac{2^{\frac{k}{2}} - 1}{2^{\frac{k}{2}}}, \frac{2^{\frac{k}{2}} - 1}{2^{\frac{k}{2}}} \right)$$

Y si k es impar,

$$x_k = \left(\frac{2^{\frac{k-1}{2}} - 1}{2^{\frac{k-1}{2}}}, \frac{2^{\frac{k+1}{2}} - 1}{2^{\frac{k+1}{2}}} \right)$$

Al tomar el límite de cualquiera de estas dos expresiones se tendrá que $\lim_{k \to \infty} x_k = (1, 1)$ y se comprueba que $\nabla f(1, 1) = (0, 0)$.

Problema 4. (12 puntos)

La empresa RideSantiago ofrece a sus clientes puestos con bicicletas para que sus usuarios puedan transportarse por la ciudad. Esta cuenta con un total de n estaciones repartidas en toda la ciudad. Después de un largo estudio, la empresa sabe que, al inicio de cada día, debe contar con s_i bicibletas en la estación i para cubrir la demanda de forma satisfactoria. Sin embargo, al final de cada día, debido al movimiento de sus usuarios, cada puesto de bicicletas termina con d_i bicicletas. Por lo tanto, se enfrentan al problema de reasignar las bicicletas durante la noche para que a la mañana siguiente cada puesto cuente con las bicicletas necesarias de forma exacta, tampoco se desea tener más de las que se necesitan. Para esto, sabe que trasladar una bicicleta desde una estación i a una estación j tiene un costo de c_{ij}. Además, se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i < \sum_{i=1}^{n} s_i$$

Lo que significa que durante el día se pierden algunas bicicletas, por lo que desde la sucursal central deben enviar las bicicletas faltantes al puesto que corresponda.

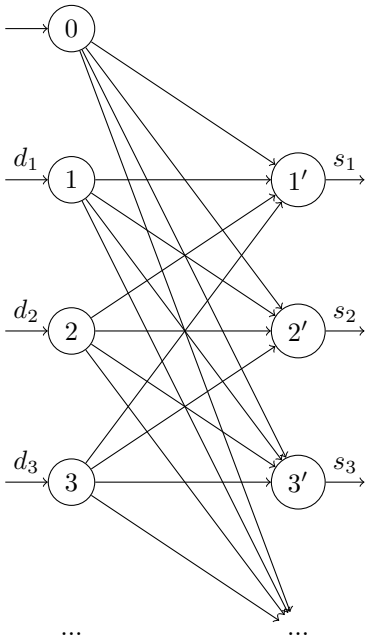
i) (6 puntos) Modele este problema como un modelo de programación lineal entera, de forma de cumplir con los requerimientos de la empresa minimizando los costos totales (Este problema puede ser visto como uno de flujo en redes. Puede obtener 3 puntos adicionales si presenta el grafo asociado, indicando los nodos, arcos, costos, ofertas y demandas, y cotas).

Suponga ahora que las bicicletas se pueden trasladar de dos formas: La primera es contratar personas que muevan cada bicicleta, lo cual tiene un sistema de costos como el descrito anteriormente, es decir, un costo unitario C_{ij} por cada bicicleta que se mueve. La segunda forma es usar un camión para trasladar desde una estación i hasta una estación j, lo cual tiene un costo de f_{ij}. La diferencia es que este costo es fijo, independiente de cuántas bicicletas se trasladen desde un punto a otro. Asuma que puede combinar ambas formas para encontrar la solución de su problema.

ii) (3 puntos) Agregue las variables y restricciones necesarias para modelar lo descrito en el último párrafo, de forma de minimizar los costos totales.

Solución Problema 4.

i) Este problema se puede modelar como un problema de flujo en redes, representado por el siguiente grafo:



Cada estación i se representa por dos nodos, siendo uno el que representa la estación al final del día, por lo que posee una oferta de d_i, y el otro nodo representa el inicio del día siguiente, con una demanda de s_i. Existen transiciones de cada nodo i a cada nodo j' a un costo c_{ij}. Se puede asumir que $c_i i = 0$, dado que no mover una bicicleta no tiene costo asociado. Además, el nodo 0 representa la sucursal central, que posee una oferta de $\sum_{i=1}^{n} s_i - \sum_{i=1}^{n} d_i$, y cada arco proveniente de ese nodo debe tener un costo c_{0j}.

Así, el modelo planteado sería el siguiente:

x_{ij} = Cantidad de bicicletas que se mueven desde la estación i a la estación j, con $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}, j \in \{1, 2, ..., n\}$

La función objetivo es

$$\text{mín} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Las restricciones son:

(1) Conservación de flujo para cada estación:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = d_i, \qquad i \in \{1, 2, ..., n\}$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_{ij} = s_j, \qquad j \in \{1, 2, ..., n\}$$

(2) Conservación de flujo para la sucursal central:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{0j} = \sum_{i=1}^{n} s_i - \sum_{i=1}^{n} d_i$$

(3) Naturaleza de las variables:

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}^+$$

ii) Se tendrían las siguientes variables:

x_{ij} = Cantidad de bicicletas que se mueven desde la estación i a la estación j a través de personas.

y_{ij} = Cantidad de bicicletas que se trasladan desde la estación i a la estación j mediante un camión.

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si se ocupa un camión para trasladar bicicletas desde } i \text{ a } j. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

La función objetivo quedaría:

$$\text{mín} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + f_{ij} z_{ij}$$

Las restricciones quedarían:

(1) Conservación de flujo para cada estación:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_{ij} = d_i, \qquad i \in \{1, 2, ..., n\}$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_{ij} + y_{ij} = s_j, \qquad j \in \{1, 2, ..., n\}$$

(2) Conservación de flujo para la sucursal central:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{0j} + y_{0j} = \sum_{i=1}^{n} s_i - \sum_{i=1}^{n} d_i$$

(3) Relación de variables:

$$y_{ij} \leq z_{ij} \cdot d_i, \qquad \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$$

$$y_{0j} \leq z_{0j} \cdot (\sum_{i=1}^{n} s_i - \sum_{i=1}^{n} d_i), \qquad \forall j \in \{1, 2, ..., n\}$$

(4) Naturaleza de las variables:

$$x_{ij}, y_{ij} \in \mathbb{Z}^+$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\}$$