PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2012
Profesores: P. Álvarez, A. Cataldo
A. Lüer, G. Paredes

Pauta Examen

Se debe contestar en cuadernillos independientes: ***Pregunta 1 Partes a), b), c) y d)****;* ***Pregunta 1 Partes e) f) y Bonus****;* ***Pregunta 2 Parte A****;* ***Pregunta 2 Parte B*** *y* ***Pregunta 3****. En cada uno de ellos debe colocar su nombre y número de lista asignado.* ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras y de celulares de cualquier tipo.*

Pregunta 1 (22 puntos)

a) **(3 puntos)** Para que un problema lineal tenga óptimos alternativos, el gradiente de la función objetivo se debe poder expresar mediante un solo vector gradiente de alguna restricción.

Respuesta: Falso. Si el hiperplano que representa la función objetivo es paralelo a una arista del espacio de soluciones factibles y en ella están las soluciones óptimas, no hay un gradiente de alguna restricción que sea paralelo al gradiente de la función objetivo.

Por tanto, no se podrá expresar el gradiente de la función objetivo mediante un sólo gradiente de restricción.

b) **(4 puntos)** Dado el problema:

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{mín} & Z = c^T x \\ & s.a: & \\ & & Ax = b \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

Demuestre mediante las condiciones de KKT que una condición necesaria y suficiente para que x^* sea una solución óptima del problema (P) es que: $\bar{c}_R^T = c_R^T - c_B^T B^{-1} R \geq 0$.

Respuesta: Separemos el problema en variables básicas (x_B) y no básicas (x_R):

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{mín} & c_B^T x_B + c_R^T x_R \\ & s.a: & \\ & & Bx_B + Rx_R = b \\ & & x_B, x_R \geq 0 \end{array}$$

luego se tiene que: $Bx_B + Rx_R = b \Rightarrow x_B = B^{-1}b + B^{-1}Rx_R$, y reemplazando en la función objetivo se tiene:

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{mín} & c_B^T \left(B^{-1}b + B^{-1}Rx_R\right) + c_R^T x_R = \left(c_R^T - c_B^T B^{-1} R\right) x_R + c_B^T B^{-1} b \\ & s.a: & \\ & & -x_R \leq 0 \end{array}$$

Las condiciones de KKT para este problema son que $\nabla f(x_R) + \sum_{i \in I(x_R)} \mu_i \nabla g_i(x_R) = 0$ que específicamente quedan:

$$\left(c_R^T - c_B^T B^{-1} R\right) + \mu(-1) = 0 \Leftrightarrow \left(c_R^T - c_B^T B^{-1} R\right) = \mu$$

por lo tanto, como $\mu \geq 0$ se tiene que para asegurar esto $c_R^T - c_B^T B^{-1} R \geq 0$, con lo que se verifica que el criterio de costos reducidos cumple con la condición de KKT.

c) **(3 puntos)** Suponga un problema (PE) de programación lineal entera de dos variables: x_1 y x_2. El conjunto de soluciones factibles de (PE) está dado por los pares (0,0), (1,0), (2,0), (0,1), (1,1), (2,1), (0,2), (1,2). Plantee un conjunto de restricciones que genere el conjunto de soluciones factibles del problema (PE) y que al resolver su relajación lineal se encuentre siempre, independiente de la función objetivo, al menos una solución entera factible para (PE).

Respuesta: En este caso se debe construir la envoltura convexa de (PE). Las restricciones que hacen esto son:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \leq & 2 \\ x_2 & \leq & 2 \\ x_1 + x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

d) **(4 puntos)** Sean $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $x \in C$. Demuestre que x es un punto extremo de C si y sólo si $C \backslash \{x\}$ es convexo.

Respuesta: Primero veamos $\Rightarrow$. Sean $\lambda \in [0,1]$, $x_1, x_2 \in C$ tal que $x_1 \neq x$ y $x_2 \neq x$. Dado que C es convexo se tiene que $y = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in C$. Además, $y \neq x$ pues x es un punto extremo. Así, $C \backslash \{x\}$ es convexo.

Ahora veamos $\Leftarrow$. Si x no es un punto extremo, esto significa que $\exists \lambda \in [0,1]$ y $\exists x_1, x_2 \in C$ tal que $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ y además $x_1 \neq x$ y $x_2 \neq x$. Esto implica que $x_1, x_2 \in C \backslash \{x\}$ y x es una combinación convexa entre x_1 y x_2 que obviamente no está en $C \backslash \{x\}$, por lo tanto $C \backslash \{x\}$ no es convexo.

e) **(4 puntos)** Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Se define $Car(S)$ como el conjunto de todas las direcciones de no acotamiento de S, o sea, $Car(S) = \{y \in \mathbb{R}^n / x + \lambda y \in S, \forall x \in S, \forall \lambda \geq 0, y \neq 0\}$. Para poliedros del tipo $P = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\}$ con $A \in M_{mn}$ y $b \in \mathbb{R}^n$ se puede demostrar que $Car(P) = \{d \in \mathbb{R}^n / Ad \leq 0, d \geq 0, d \neq 0\}$. Utilice lo anterior para demostrar que el siguiente problema lineal siempre tiene solución finita para cualquier vector de costos c:

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{mín} & c^T x \\ s.a. & & 3x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 6 \\ & & 2x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 11 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Respuesta: Para el problema (P) se tiene que:

$$\begin{array}{lll} Car(P) = & \{(d_1, d_2, d_3) \in R^3 / & 3d_1 + 5d_2 + d_3 \leq 0 \\ & & 2dx_1 + d_2 + 7d_3 \leq 0 \\ & & d_1, d_2, d_3 \geq 0, d \neq 0\} \end{array}$$

Claramente $Car(P) = \emptyset$, luego (P) no posee direcciones de no acotamiento. Además el problema (P) es factible (se puede observar que el punto $(0,0,0)$ satisface todas las restricciones) y es acotado (demostrado recién que no tiene direcciones de no acotamiento). Se tiene también que el conjunto es cerrado (los poliedros son conjuntos cerrados) y $c^T x$ es una función lineal (que son trivialmente continuas). Entonces, el teorema de existencia de Bolzano-Weierstrass asegura que (P) posee solución óptima finita.

f) **(4 puntos)** Considere el siguiente problema de optimización no restringida:

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = ax^2 - 4bx^2y + 2aby^2$$

i) ¿Qué valores deben tomar a y b para que exista al menos un punto candidato a óptimo diferente al $(0,0)$?

ii) ¿Qué valores deben tomar a y b para que además el Hessiano en ese punto candidato sea positivo semidefinido?

Respuesta:

i) Calculando el gradiente de $f(x,y)$ e igualando a 0 se tiene:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2ax - 8bxy \\ 4aby - 4bx^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces:

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{4b} \\ x &= \sqrt{\frac{a^2}{4b}} \end{aligned}$$

por lo tanto, habrá un punto estacionario diferente al $(0,0)$ bajo las condiciones de que $a \neq 0$, $b > 0$.

ii) El Hessiano de $f(x,y)$ para un punto estacionario (salvo $(0,0)$ es:

$$H_{f(x,y)} = \begin{bmatrix} 2a - 8by & -8bx \\ -8bx & 4ab \end{bmatrix}$$

el primer determinante menor $\triangle_1 = 0$, por lo que hay que verificar si $\triangle_2 \geq 0$ para que $H_{f(x,y)}$. El cálculo de éste da:

$$\triangle_2 = -16a^2b$$

de donde se puede ver que con $a \neq 0$ y $b > 0$ la matriz $H_{f(x,y)}$ nunca será positiva semidefinida. Esto pues no existe valor de $b > 0$ que haga que $\triangle_2 \geq 0$.

Bonus (5 puntos)

Utilice los resultados de dualidad fuerte para demostrar que si se tiene $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, uno y sólo uno de los siguientes sistemas tiene solución:

1) $\exists x \geq 0 (x \in R^n)$ tal que $Ax = b$.

2) $\exists y \in R^m$ tal que $A^T y \leq 0$ y $b^T y > 0$.

Respuesta: Dados $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, consideremos el siguiente problema lineal:

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{mín} & z = 0 \\
& s.a: & \\
& & Ax = b \\
& & x \geq 0
\end{array}
$$

que tiene como dual:

$$
\begin{array}{lll}
(D) & \text{máx} & w = b^T y \\
& s.a: & \\
& & A^T y \leq 0 \\
& & y \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

Se puede apreciar que (D) es siempre factible ya que $y = 0$ satisface las desigualdades. Luego, como (D) es siempre factible el teorema de dualidad fuerte asegura que sucede sólo una de las siguientes situaciones:

S1) $z = w = 0 \Rightarrow (P)$ y (D) son factibles.

S2) $w = +\infty \Rightarrow (P)$ es infactible. y (D) es no acotado.

Demostremos que si el sistema 1) no tiene solución entonces 2) sí tiene:

Si 1) no tiene solución significa que (P) es infactible. Esto implica que la situación $S2$) antes planteada ocurre. Por lo tanto el dual (D) es no acotado. Esto equivale a la existencia de una dirección de no acotamiento donde la función objetivo crece indefinidamente. Si llamamos a esta dirección de no acotamiento y, ésta debe cumplir que $A^T y \leq 0$ y $b^T y > 0$, por lo tanto (2) tiene solución.

Demostremos ahora que si el sistema 2) no tiene solución entonces 1) sí tiene:

Si 2) no tiene solución, por lo anterior podemos descartar que el dual (D) sea no acotado. Luego, estamos en la situación $S1$). En particular esto implica que el primal (P) tiene solución y, por lo tanto, es factible, es decir, que 1) tiene solución.

Pregunta 2 (22 puntos)

Parte A) (11 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización:

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{máx} & f(x_1, x_2) \\
& s.a: & \\
& & x_1^2 + x_2^2 \leq 16 \\
& & (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \geq 9 \\
& & x_1 \leq 2 \\
& & x_2 \leq 2 \\
& & 2x_1 + 2x_2 \geq -9
\end{array}
$$

i) **(2 puntos)** Determine gráficamente el conjunto de soluciones factibles (dominio).

ii) **(1 punto)** ¿El Dominio es Convexo? Justifique.

iii) **(1 punto)** ¿Puede afirmar en forma teórica (condición suficiente de KKT) que este problema tiene un óptimo global?

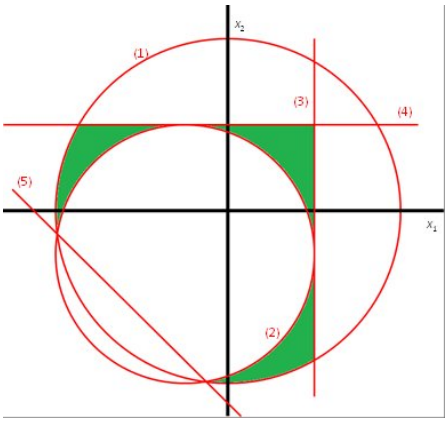
iv) **(2 puntos)** Determine la solución óptima (valor de la función objetivo y de las variables) en forma gráfica para $f_1(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$ y para $f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Además, verifique gráficamente si las soluciones óptimas obtenidas cumplen con las condiciones de KKT.

v) **(2 puntos)** Establezca las condiciones de KKT para un punto genérico.

vi) **(3 puntos)** Considere la función $f_1(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$. Verifique si los siguientes puntos cumplen (o no) las condiciones de KKT: $\left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Pauta:

i) El gráfico es:

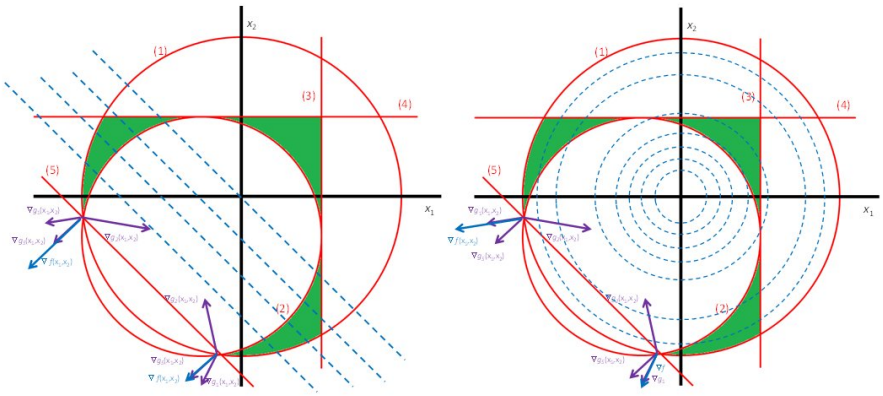


(las áreas en color verde corresponden al dominio).

ii) Se puede apreciar claramente del gráfico que el dominio no es convexo.

iii) No, ya que no se cumple la condición de que el dominio sea convexo.

iv) A continuación se muestra el gráfico para cada una de las funciones solicitadas.



se tienen dos soluciones posibles (las mismas para las 2 funciones): $x_1 \approx -1$, $x_2 \approx -4$ y $x_1 \approx -4$ y $x_2 \approx -1$. Para f_1 el valor óptimo es aproximadamente 5 y para f_2 aproximadamente 17.

Se verifica gráficamente que ambos puntos son óptimos, pues corresponden a una combinación lineal entre el gradiente de las restricciones activas en el punto y el gradiente de la función objetivo.

v) Llevamos el problema a forma estándar, quedando:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & -f(x_1,x_2) & \\ s.a: & g_1(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 16 \leq 0 & (1) \\ & g_2(x_1,x_2) = -(x_1+1)^2 - (x_2+1)^2 + 9 \leq 0 & (2) \\ & g_3(x_1,x_2) = x_1 - 2 \leq 0 & (3) \\ & g_4(x_1,x_2) = x_2 - 2 \leq 0 & (4) \\ & g_5(x_1,x_2) = -2x_1 - 2x_2 - 9 \leq 0 & (5) \end{array}$$

las condiciones de KKT (L=$\nabla f(x) + \sum_{i \in I(x)} \mu_i \nabla g_i(x) = 0$) para un punto genérico quedan:

$$\begin{array}{rcl} -\frac{\partial L}{\partial x_1} & = & \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} + (2\mu_1 x_1 - 2\mu_2(x_1+1) + \mu_3 - 2\mu_5) = 0 \\ -\frac{\partial L}{\partial x_2} & = & \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} + (2\mu_1 x_2 - 2\mu_2(x_2+1) + \mu_4 - 2\mu_5) = 0 \\ \mu_1 g_1(x_1,x_2) & = & \mu_1 \left(x_1^2 + x_2^2 - 16\right) = 0 \\ \mu_2 g_2(x_1,x_2) & = & \mu_2 \left(-(x_1+1)^2 - (x_2+1)^2 + 9\right) = 0 \\ \mu_3 g_3(x_1,x_2) & = & \mu_3 (x_1 - 2) = 0 \\ \mu_4 g_4(x_1,x_2) & = & \mu_4 (x_2 - 2) = 0 \\ \mu_5 g_5(x_1,x_2) & = & \mu_5 (-2x_1 - 2x_2 - 9) = 0 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5 & \geq & 0 \end{array}$$

vi) Para la función $f_1(x_1,x_2) = -x_1 - x_2$ se tiene que $\frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} = -1$ y $\frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} = -1$.

Se puede verificar que el punto $\left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$ no satisface las restricciones (3) y (4), pues:

$$2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1) =\nleq 0 \qquad (3)$$

$$2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1) =\nleq 0 \qquad (4)$$

en consecuencia, como no es un punto factible no cumple con la condición de KKT.

Para el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ sucede lo mismo. Luego, se verifica que no cumple con la restricción (2), ya que:

$$-\left(\frac{1}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{1}{2}+1\right)^2 + 9 = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 9 = -\frac{18}{4} + 9 = \frac{18}{4} \nleq 0$$

en consecuencia, como no es un punto factible no cumple con la condición de KKT.

Parte B (11 puntos)

Una estudiante ha decidido ocupar sus conocimientos de optimización para decidir que porcentaje de su tiempo debe asignar a las n actividades que realiza de modo de maximizar el beneficio que obtiene por éstas. Primero ordenó todas las actividades según sus preferencias personales (esto se mide en utilidad que le reportan a ella) y decidió que en cada actividad ocupará más tiempo que el que ocupa en las actividades que valora menos. Luego valorizó el beneficio (considerado en $c^T > 0$) que obtiene al realizar cada actividad y planteó el siguiente problema de programación lineal en variables continuas:

$$(\mathcal{P}_n) \begin{cases} \text{máx} & c^T x & \\ s.a & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 & \\ & x_i \leq x_{i+1} & \forall i \in \{1, \ldots, n-1\} \\ & x_i \geq 0 & \forall i \in \{1, \ldots, n\} \end{cases}$$

donde x_i representa la proporción del tiempo que dedicará a la actividad i, con $i \in \{1, \ldots, n\}$.

i) **(2 puntos)** Encuentre el dual de $(\mathcal{P}_n)$.

ii) **(2 puntos)** Demuestre que si y es un vector dual factible, entonces $y_1 \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} c_i$

iii) **(3 puntos)** Cuando $c_1 \geq \text{máx}_{i \neq 1}\, c_i$ se puede demostrar que el óptimo primal es $x_i^* = \frac{1}{n} \quad \forall i \in \{1 \ldots n\}$. Demuestre usando el Teorema de Dualidad Fuerte que si se tiene esto, entonces $y_1^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} c_i$.

iv) **(2 puntos)** Esta estudiante usó este modelo para determinar como usar su tiempo durante este semestre. Sus actividades, en orden de preferencia (partiendo por la menos preferida), son $(i = 1)$ estudiar, $(i = 2)$ trabajar, $(i = 3)$ ir de compras al mall y $(i = 4)$ asistir a matrimonios con su pareja. Considere entonces la instancia del problema $(\mathcal{P}_4)$ dada por:

$$(\mathcal{P}_4) \begin{cases} \text{máx} & 4x_1 + & 3x_2 + & 2x_3 + & x_4 & & \\ s.a & x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 & = & 1 \\ & x_1 - & x_2 + & & & \leq & 0 \\ & & x_2 - & x_3 + & & \leq & 0 \\ & & & x_3 - & x_4 & \leq & 0 \\ & & & & x & \geq & 0 \end{cases}$$

Sabemos que la solución de este problema es

$$x^* = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

Lo que confirma que ella, una persona con criterio, dedica igual cantidad de tiempo a todas sus actividades. Usando el Teorema de Holgura Complementaria encuentre la solución del dual de $\mathcal{P}_4$ (y entonces $(\mathcal{D}_4)$).

v) **(2 puntos)** ¿Cómo variaría el beneficio obtenido al imponer que debe pasar un 1 % más de tiempo asistiendo a matrimonios con su pareja que estudiando? Concluya.

Pauta:

i) El problema se reescribe como

$$(\mathcal{P}_n)\begin{cases} \text{máx} & c^T x \\ s.a & \sum_i x_i = 1 \\ & x_i - x_{i+1} \leq 0 \quad \forall i \in \{1 \dots n-1\} \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

el problema tiene n restricciones, de modo que la variable del dual será $y \in \mathbb{R}^n$

$$(\mathcal{D}_n)\begin{cases} \text{máx} & y_1 & & \\ s.a & & & \\ & y_1 + y_2 & \geq c_1 & \\ & y_1 - y_2 + y_3 & \geq c_2 & \\ & y_1 - y_3 + y_4 & \geq c_3 & \\ & \vdots & \vdots & \\ & y_1 - y_{n-1} + y_n & \geq c_{n-1} & \\ & y_1 - y_n & \geq c_n & \\ & y_1 & \in \mathbb{R} & \\ & y_i & \geq 0 & \forall i \in \{2 \dots n\} \end{cases}$$

ii) Si sumamos todas las restricciones del dual obtenemos que

$$ny_1 \geq \sum_{i=1}^{n} c_i \qquad \Rightarrow \qquad y_1 \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i$$

iii) Si $x_i^* = \frac{1}{n} \quad \forall i \in \{1 \dots n\}$ es solución factible, entonces se tiene que ambos problemas (primal y dual) son finitos, factibles y que $c^T x^* = b^T y^*$. Luego, se tiene que:

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^* = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i^*$$

finalmente, reemplazando x^* y b se tiene que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i = y_1^*$$

.

iv) Llamemos h a la holgura del primal y s a la holgura del dual. Usando los valores de x^* en las restricciones obtenemos que $h = 0$. El Teorema de Holgura Complementaria asegura que

$$\begin{array}{rcl} h_1\ y_1^* & = & 0 \\ h_2\ y_2^* & = & 0 \\ h_3\ y_3^* & = & 0 \\ h_4\ y_4^* & = & 0 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} s_1\ x_1^* & = & 0 \\ s_2\ x_2^* & = & 0 \\ s_3\ x_3^* & = & 0 \\ s_4\ x_4^* & = & 0 \end{array}$$

De donde $s = 0$.

Luego

$$\begin{aligned} y_1^* + y_2^* &= 4 \\ y_1^* - y_2^* + y_3^* &= 3 \\ y_1^* - y_3^* + y_4^* &= 2 \\ y_1^* - y_4^* &= 1 \end{aligned}$$

Sabemos de la parte anterior que $y_1^* = 2,5$. Reemplazamos y obtenemos que

$$\begin{aligned} y_2^* &= 1,5 \\ y_3^* &= 2 \\ y_4^* &= 1,5 \end{aligned}$$

v) Esta condición equivale a considerar $x_1 + 0{,}01 \leq x_4$. Pero se tiene por enunciado que $x1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4$. La solución actual es $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0{,}25$. Por lo tanto, no es posible aumentar en un 1 % la cantidad de tiempo que dedique a asistir al matrimonio.

Pregunta 3 (16 puntos)

Los proveedores de servicio de Internet (ISPs) han comenzado un proceso progresivo de migración hacia redes de datos usando fibra óptica para sus clientes domiciliarios y empresariales.

Como parece un buen negocio, una nueva empresa (Casta Broadband) quiere entrar en el mercado, diseñando su propia red de datos basada en fibra óptica.

La estructura de la red de Casta Broadband tendrá una conexión de fibra desde cada cliente $i \in C$, hasta un concentrador de conexiones j, cuyas ubicaciones deberán determinarse de entre un conjunto de lugares posibles L.

Puede instalarse más de un concentrador en cada ubicación, hasta un máximo de R_j concentradores en la ubicación $j \in L$.

El cliente $i \in C$ requiere manejar un ancho de banda B_i. Los concentradores tienen un ancho de banda máximo que pueden manejar desde los clientes, denotada K. Todos los clientes en C deben quedar conectados a un concentrador.

Todas las ubicaciones de concentradores estarán conectadas entre si, de instalarse al menos un concentrador y de existir un ducto que los comunique, para darle mayor confiabilidad al sistema. El conjunto de pares de ubicaciones para concentradores que están comunicados entre sí forman el conjunto $P \subset L \times L$.

Los datos viajarán por la red de comunicaciones formada por los enlaces cliente-concentrador, y entre concentradores, hasta un punto central, que tiene acceso a internet. La ruta de los datos en la red no son relevantes en esta etapa de la planificación.

La utilización de una ubicación $j \in L$ para concentradores implica un costo fijo F_j, mientras que la instalación de un concentrador tiene un costo unitario H. La conexión entre un cliente $i \in C$ y el concentrador ubicado en $j \in L$ tiene un costo c_{ij}. Por otra parte, la conexión de dos ubicaciones de concentradores en los lugares $k, m \in L : (k, m) \in P$ tiene un costo d_{km}.

Por último, se ha determinado que no pueden ubicarse concentradores muy cercanos entre sí. Por esto, se ha determinado un conjunto M de pares de ubicaciones donde no pueden ubicarse concentradores simultáneamente.

Formule un modelo de programación lineal entera que determine la ubicación y cantidad de los concentradores y las conexiones a realizar entre clientes y éstos, de tal forma de minimizar el costo total de instalación.

Pauta

Cualquiera de las siguientes dos formulaciones es igualmente válida.

Formulación 1

Variables de decisión

- $W_{km} = \begin{cases} 1, \text{si se conectan las ubicaciones para concentradores } k \in L \text{ y } m \in L : (k,m) \in P \\ 0, \text{otro caso} \end{cases}$
- $X_{ij} = \begin{cases} 1, \text{si se conecta el cliente } i \in C \text{ con un concentrador ubicado en } j \in L \\ 0, \text{otro caso} \end{cases}$
- $Y_j = \begin{cases} 1, \text{si se localiza al menos un concentrador en la ubicación } j \in L \\ 0, \text{otro caso} \end{cases}$
- $Z_j =$ número de concentradores a instalar en la ubicación $j \in L$.

Función objetivo

$$\text{mín} \sum_{j \in L} F_j Y_j + \sum_{j \in L} H Z_j + \sum_{i \in C} \sum_{j \in L} c_{ij} X_{ij} + \sum_{(k,m) \in P} d_{km} W_{km}$$

Restricciones

- Asignación única de clientes a ubicaciones de concentradores.

$$\sum_{j \in L} X_{ij} = 1, \ \forall i \in C$$

- Cantidad de concentradores a localizar.

$$Z_j \leq R_j Y_j, \ \forall j \in L$$

- Capacidad de los concentradores instalados.

$$\sum_{i \in C} B_i X_{ij} \leq K Z_j, \ \forall j \in C$$

◇ Evitar conectar si no hay concentradores instalados.

$$W_{km} \leq Y_k,\ \forall (k,m) \in P$$

$$W_{km} \leq Y_m,\ \forall (k,m) \in P$$

◇ Conectar ubicaciones donde existan concentradores.

$$W_{km} \geq Y_k + Y_m - 1,\ \forall (k,m) \in P$$

◇ Ubicaciones prohibidas

$$Y_p + Y_q \leq 1,\ \forall (p,q) \in M$$

◇ Naturaleza de las variables de decisión.

$$W_{km} \in \{0,1\},\ \forall (k,m) \in P$$

$$X_{ij} \in \{0,1\},\ \forall i \in C,\ j \in L$$

$$Y_j \in \{0,1\},\ \forall j \in L$$

$$Z_j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\},\ \forall j \in L$$

Formulación 2

Variables de decisión

◇ $W_{km} = \begin{cases} 1, \text{si se conectan las ubicaciones para concentradores } k \in L \text{ y } m \in L : (k,m) \in P \\ 0, \text{en otro caso} \end{cases}$

◇ $X_{ijr} = \begin{cases} 1, \text{si se conecta el cliente } i \in C \text{ con el r-ésimo concentrador ubicado en } j \in L \\ 0, \text{en otro caso} \end{cases}$

◇ $Y_j = \begin{cases} 1, \text{si se localiza al menos un concentrador en la ubicación } j \in L \\ 0, \text{en otro caso} \end{cases}$

◇ $Z_{jr} = \begin{cases} 1, \text{si se instala el } r\text{-ésimo concentrador en la ubicación } j \in L \\ 0, \text{en otro caso} \end{cases}$

Función objetivo

$$\text{mín} \sum_{j \in L} F_j Y_j + \sum_{j \in L} \sum_{r=1}^{R_j} H Z_{jr} + \sum_{i \in C} \sum_{j \in L} \sum_{r=1}^{R_j} c_{ij} X_{ijr} + \sum_{(k,m) \in P} d_{km} W_{km}$$

Restricciones

◇ Asignación única de clientes a ubicaciones de concentradores.

$$\sum_{r=1}^{R_j} \sum_{j \in L} X_{ijr} = 1,\ \forall i \in C$$

◇ Conexiones posibles entre clientes y concentradores.

$$X_{ijr} \leq Z_{rj},\ \forall i \in C,\ \forall j \in L,\ \forall r \in 1, \ldots, R_j$$

◇ Instalar concentradores sólo si se usará la ubicación respectiva.

$$Z_{rj} \leq Y_j,\ \forall j \in L,\ \forall r = 1, \ldots, R_j$$

◇ Instalación progresiva de capacidad.

$$Z_{rj} \geq Z_{r+1,j},\ \forall j \in L,\ \forall r = 1, \ldots, R_j - 1$$

◇ Capacidad de los concentradores instalados.

$$\sum_{i \in C} B_i X_{ijr} \leq K Z_{jr},\ \forall j \in C,\ \forall r = 1, \ldots, R_j$$

◇ Evitar conectar si no hay concentradores instalados.

$$W_{km} \leq Y_k,\ \forall (k,m) \in P$$

$$W_{km} \leq Y_m,\ \forall (k,m) \in P$$

◇ Conectar ubicaciones donde existan concentradores.

$$W_{km} \geq Y_k + Y_m - 1,\ \forall (k,m) \in P$$

◇ Ubicaciones prohibidas

$$Y_p + Y_q \leq 1,\ \forall (p,q) \in M$$

◇ Naturaleza de las variables de decisión.

$$W_{km} \in \{0,1\},\ \forall (k,m) \in P$$

$$X_{ijr} \in \{0,1\},\ \forall i \in C,\ \forall j \in L,\ \forall r = 1, \ldots, R_j$$

$$Y_j \in \{0,1\},\ \forall j \in L$$

$$Z_{jr} \in \{0,1\},\ \forall j \in L,\ \forall r = 1, \ldots, R_j$$