Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
Ayudante: Ignacio Monardes (iamonardes@uc.cl)
Profesores: Gonzalo Mendez, Gustavo Angulo, Esteban Salgado, Gonzalo Perez, Raimundo Cuadrado

ICS1113 - Optimización
1er semestre del 2023

Tarea 3 ICS1113

Reglas de la tarea:

- La tarea se puede realizar de a pares o de forma individual (las parejas pueden ser de diferentes secciones). En caso de ser de a pares se debe inscribir con su pareja en los grupos de Canvas.
- La tarea debe ser subida **por solo uno de los integrantes** a Canvas.
- La tarea parte el día 25/05/2023 a las 00:00 horas y se entrega el día 01/06/2023 a las 23:59 horas.
- Existirá la opción de usar un cupón de atraso solamente una vez entre las tres tareas, dando la posibilidad de entregar hasta 24 horas después de finalizada la entrega. Para poder acceder a este cupón se deben inscribir con el nombre de los integrantes de la tarea en un Google Forms que será habilitado en su debido tiempo y que cierra junto a la fecha oficial de la entrega. En caso de ser de a pares ambos deben tener un cupón disponible y se usará uno por cada uno y tendrán 24 horas extra (no 48).
- Las tareas atrasadas no serán corregidas, así que recuerden entregarlas a tiempo.
- Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo y preparación individual de la interrogación a la que está asociada la tarea. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta la escalación a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso.
- Por entregar en latex se darán 3 décimas para la tarea entregada, las décimas no son transferibles a otras actividades. Para subirlo tendrá que enviar un archivo .pdf y el archivo .zip correspondientes. En caso de no entregar en latex basta con subir un archivo .pdf que contenga las respuestas. En ambos casos los .pdf tienen que contener los nombres de los integrantes.
- Se abrirá un foro en Canvas donde se responderán las dudas que puedan surgir del enunciado.

Pregunta 1 **[40 Puntos]**

(a) [15 Puntos] Considere el problema:

$$\begin{aligned} (P) \text{ mín } & c^T x \\ Ax &\geq b \end{aligned}$$

Sean x^* e y^* soluciones primal y dual óptimas y únicas, respectivamente. Suponga que agregamos la restricción $d^T x \geq k$ con $d \in \mathbb{R}^n$ y k escalar, obteniendo (P').

I. [5 Puntos] Si x^* es factible para (P'), demuestre que x^* es óptimo para (P') y construya una solución dual óptima.

Solution: 3 puntos por definir los problemas primales y duales. 2 puntos por justificar que es el punto óptimo.
Tenemos que el problema dual de (P) es

$$\begin{aligned} (D) \text{ máx } & b^T y \\ A^T y &= c \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} (P') \text{ mín } & c^T x \\ Ax &\geq b \quad (y) \\ d^T x &\geq k \quad (z), \end{aligned}$$

cuyo problema dual es

$$\begin{aligned} (D') \text{ máx } & b^T y + kz \\ A^T y + dz &= c \\ y &\geq 0 \\ z &\geq 0. \end{aligned}$$

Como y^* es factible para (D), tenemos que $A^T y^* = c$, $y^* \geq 0$. Por dualidad fuerte, tenemos $c^T x^* = b^T y^*$. Tomando $w = (y^*, 0)$, tenemos que w es factible para (D') con valor objetivo $b^T y^*$. Además, x^* es factible para (P') con valor objetivo $c^T x^*$. Como los valores objetivos coindicen, por dualidad fuerte, x^* y w^* son óptimos para (P') y (D'), respectivamente.

II. [5 Puntos] Si x^* es solución única para (P) pero infactible para (P'), demuestre que toda solución óptima para (P') satisface $d^T x = k$.

Solution: Por contradicción, asumamos que todo x^{**} solución óptima de (P') cumple que $d^T x^{**} > k$.

Usando holguras complementarias en x^{**} con la restricción agregada:

$$z \cdot (d^T x^{**} - k) = 0$$

Luego, z se ve obligado a tomar el valor de 0 ya que $d^T x^{**} > k$. Esto implica que el valor óptimo de (D) es igual al valor óptimo de (D') ya que con $z = 0$ se tiene el mismo problema. Sin embargo, se llegaría a una contradicción ya que el valor óptimo de (D) es $c^T x^*$, y por ende el valor óptimo de (D') también sería $c^T x^*$, lo cual no puede ser ya que x^* es solución única de (P).

III. [5 Puntos] Demuestre que si (P') es infactible, entonces su dual es no acotado.

Solution: Como el problema (P') es infactible el problema (D') es no acotado o infactible, pero en la parte 1 habíamos notado que $w = (y^*, 0)$ es factible para (D') por lo que el problema se ve obligado a ser no acotado.

(b) [25 Puntos] Dado el siguiente problema:

$$\begin{aligned} P)\ \text{mín}\ & 11x_1 + 14x_2 - 6x_3 + 4x_4 & & \\ s.a.\ & -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 & \geq & 6 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 & \geq & 1 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & x_3, x_4 & \leq & 0 \end{aligned}$$

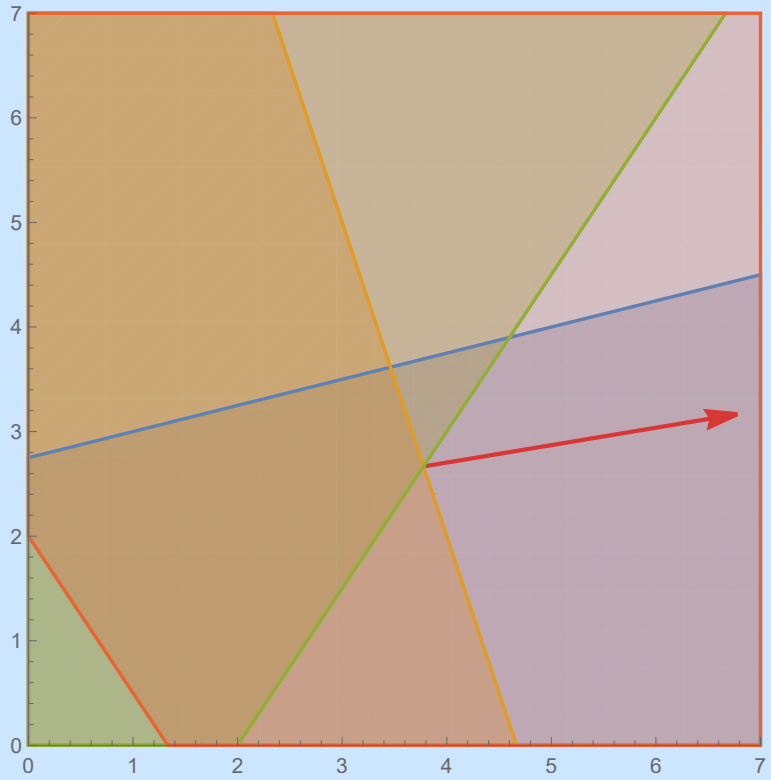
I. [10 Puntos] Calcule el óptimo mediante dualidad y obtenga la solución óptima del primal:

Solution: Para calcular la solución óptima del problema podemos calcular el óptimo del dual y luego obtener la solución del primal mediante el teorema de holguras complementarias.
El dual del problema presentado es:

$$\begin{aligned} D)\ \text{máx}\ & 6y_1 + y_2 & & \\ s.a.\ & -y_1 + 4y_2 & \leq & 11 \\ & 3y_1 + y_2 & \leq & 14 \\ & -3y_1 + 2y_2 & \geq & -6 \\ & 3y_1 + 2y_2 & \geq & 4 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{aligned}$$

Podemos observar gráficamente que la solución óptima se obtiene al intersectar la segunda y la tercera restricción, obteniendo el punto $y^* = \begin{bmatrix} 34/9 \\ 8/3 \end{bmatrix}$

Solución gráfica del dual



Luego, por el teorema de holguras complementarias, podemos notar las restricciones que no estén en igualdad tendrán su variable dual asociado igual a 0. (Por simplicidad se usará que $D = A^T$ y que d_i es la $i-$ésima fila de la matriz D).

$$\begin{aligned} x_1^*(d_1^T y^* - c_1) &= 0 \rightarrow x_1^* = 0 \\ x_4^*(d_4^T y^* - c_4) &= 0 \rightarrow x_4^* = 0 \end{aligned}$$

y también tenemos que como y_1 y y_2 son diferentes a 0 se tiene que las dos restricciones asociadas en el problema primal deben estar en igualdad.

$$\begin{aligned} y_1^*(a_1^T x^* - b_1) &= 0 \rightarrow a_1^T x^* = b_1 \\ y_2^*(a_2^T x^* - b_2) &= 0 \rightarrow a_2^T x^* = b_2 \end{aligned}$$

Finalmente, el sistema de ecuaciones que queda para resolver es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_2^* \\ x_3^* \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Que se puede reducir a:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 5/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con valor objetivo igual a $z^* = 25{,}3333$.

II. [8 Puntos] A partir del resultado anterior, haga un análisis de sensibilidad de los valores de c_3 para que valores se mantiene la misma base del problema P) y determine para que valor se obtiene múltiples soluciones.

Solution: Hay tres formas de resolver este problema, la primera es usando simplex en el problema primal. La segunda manera de resolverlo es analizando con simplex el problema dual. Y la tercera manera es usando análisis gráfico sobre el problema dual y obteniendo un punto degenerado.

Solución 1: Simplex sobre el primal
Escribimos el problema primal en forma estándar, para esto usaremos $x_3' = -x_3$ y $x_4' = -x_4$.

$$\begin{array}{rrcl} P) \text{ mín } & 11x_1 + 14x_2 - c_3x_3' - 4x_4' & & \\ s.a. & -x_1 + 3x_2 + 3x_3' - 3x_4' - h_1 & = & 6 \\ & 4x_1 + x_2 - 2x_3' - 2x_4' - h_2 & = & 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, h_1, h_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Luego, podemos notar que la base óptima es usar $\{x_2, x_3'\}$ ya que como resolvimos anteriormente tienen valores no negativos.

$$B = \{x_2, x_3'\}, N = \{x_1, x_4', h_1, h_2\}$$

$$A_B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \; A_N = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2/9 & 1/3 \\ 1/9 & -1/3 \end{bmatrix}, \; \bar{R} = \begin{bmatrix} 10/9 & -4/3 & -2/9 & -1/3 \\ -13/9 & 1/3 & -1/9 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Primero buscaremos los casos para los que la base se mantiene igual, para esto es necesario que los costos reducidos sean mayores o iguales a cero.

$$\begin{array}{rcl} \bar{c}_R^T & = & c_R^T - c_B^T \bar{R} \geq 0 \\ & = & (11, -4, 0, 0) - (14, -c_3)\bar{R} \geq 0 \\ & = & (-41/9 - 13c_3/9, 44/3 + c_3/3, 28/9 - c_3/9, 14/3 + c_3/3) \geq 0 \end{array}$$

Luego, cada entrada debe cumplir que es mayor o igual a cero.

$$\begin{array}{rcl} c_3 & \leq & -41/13 \\ c_3 & \geq & -44 \\ c_3 & \leq & 28 \\ c_3 & \geq & -14 \end{array}$$

Luego, el rango para que sea la misma base es:

$$-14 \leq c_3 \leq -41/13$$

Para que den múltiples soluciones queremos que en los costos reducidos sean mayores o iguales a 0 y que exista al menos una componente igualada a 0. Podemos notar que estos valores son iguales a los extremos del rango encontrado anteriormente, es decir, es válido usar

$c_3 \in \{-14, -41/13\}$.

Solución 2: Simplex sobre el dual Para esto podemos resolver para que casos se obtienen soluciones degeneradas en el problema dual, para esto basta ver que exista una componenente de $\bar{b} = 0$. Primero, escribiremos el problema dual en su forma estándar:

$$\begin{aligned} D)\ \text{máx}\, & 6y_1 + y_2 & & \\ s.a.\ & -y_1 + 4y_2 + h_1 &=& 11 \\ & 3y_1 + y_2 + h_2 &=& 14 \\ & -3y_1 + 2y_2 - h_3 &=& -6 \\ & 3y_1 + 2y_2 - h_4 &=& 4 \\ & y_1, y_2, h_1, h_2, h_3, h_4 &\geq& 0 \end{aligned}$$

Se puede notar que como las restricciones 1 y 4 no están en igualdad se debe tener que sus holguras deben ser no nulas, y ya habíamos obtenido del resultado anterior que $y^* = \begin{bmatrix} 34/9 \\ 8/3 \end{bmatrix}$ Por lo que base está definida por $\{y_1, y_2, h_1, h_4\}$.

$$B = \{y_1, y_2, h_1, h_4\},\ N = \{h_2, h_3\}$$

$$A_B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ A_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2/9 & -1/9 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & -10/9 & -13/9 & 0 \\ 0 & 4/3 & 1/3 & -1 \end{bmatrix}$$

Ahora, queremos que $\bar{b} \geq 0$. Es decir:

$$\begin{aligned} \bar{b} &= A_B^{-1} \begin{bmatrix} 11 \\ 14 \\ c3 \\ 4 \end{bmatrix} \geq 0 \\ &= \begin{bmatrix} 28/9 - c_3/9 \\ 14/3 + c_3/3 \\ -41/9 - 13c_3/9 \\ 44/3 + c_3/3 \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

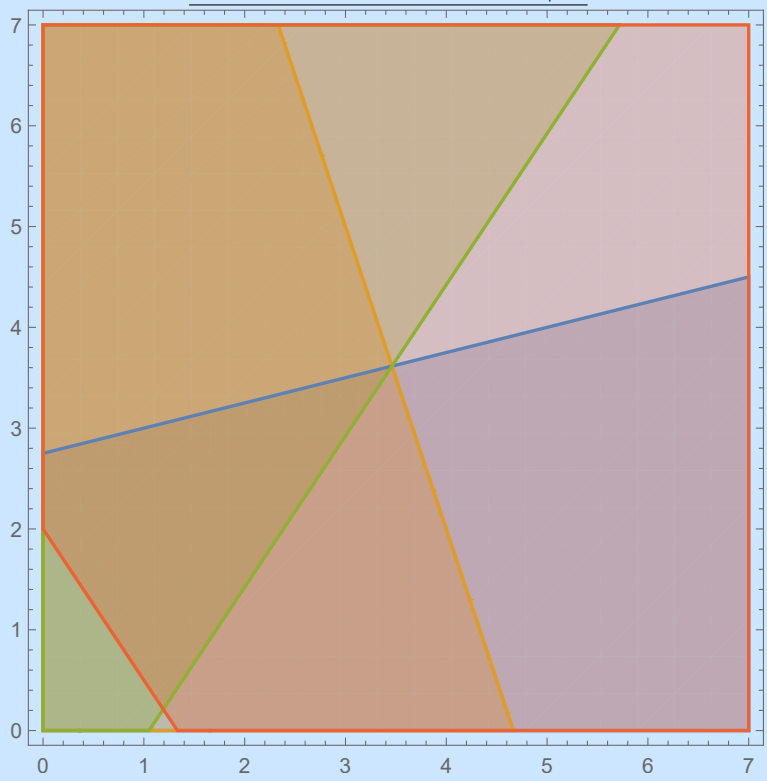
Luego, obtenemos el rango de valores:

$$-14 \leq c_3 \leq -41/13$$

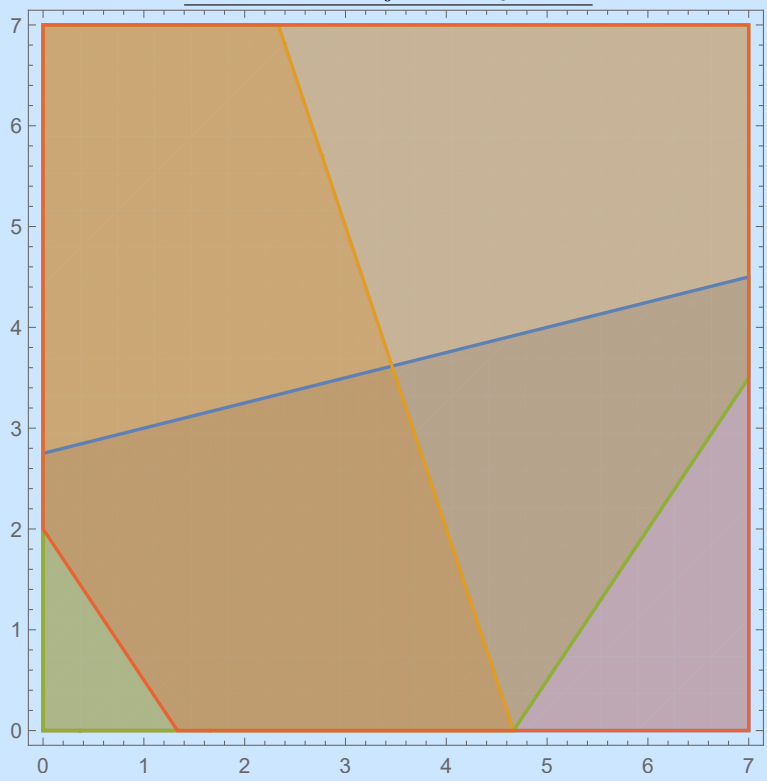
Solucion 3: Grafico del dual
Es fácil notar que cambiar el parámetro de c_3 es equivalente a desplazar la tercera restricción dentro del problema dual, ahora buscamos los valores para los que se mantiene la base.

Para que se mantenga la misma base se debe tener que la función objetivo no se encuentre en otro vértice, es decir, que no sea la combinación de otras restricciones. Para esto tenemos que al desplazar la restricción 3, no se puede 'pasar' a otras restricciones. Podemos notar que las restricciones más cercanas son $R1$ y $y_1 \geq 0$.

R3 intersecta R1 con $c_3 = -41/13$



R3 intersecta el eje x con $c_3 = -14$



Por ende, para mantener la misma base basta con usar:

$$-14 \leq c_3 \leq -41/13$$

Luego, para determinar los valores para los que el problema primal tenga múltiples soluciones se puede usar el hecho de que el problema dual es degenerado en los puntos $c_3 \in \{-41/13, -14\}$. Por lo que tendremos múltiples soluciones en esos puntos.

III. [4 Puntos] Ahora se desea aumentar c_3 (el costo asociado a la tercera variable) en 2 unidades. ¿En cuanto cambia la función objetivo?. Resuélvalo sin realizar análisis gráfico.

Solution: Para resolver esto, podemos usar precio sombra, que nos indica que:

$$\Delta z = \Delta b \cdot y$$

En este caso, podemos pensar que el dual aumenta el lado derecho de la tercera restricción en 2 unidades y podemos multiplicar por la tercera variable del problema primal asociado.

$$\begin{aligned} \Delta z &= \Delta c_3 \cdot x_3^* \\ &= 2 \cdot -1/3 \\ &= -2/3 \end{aligned}$$

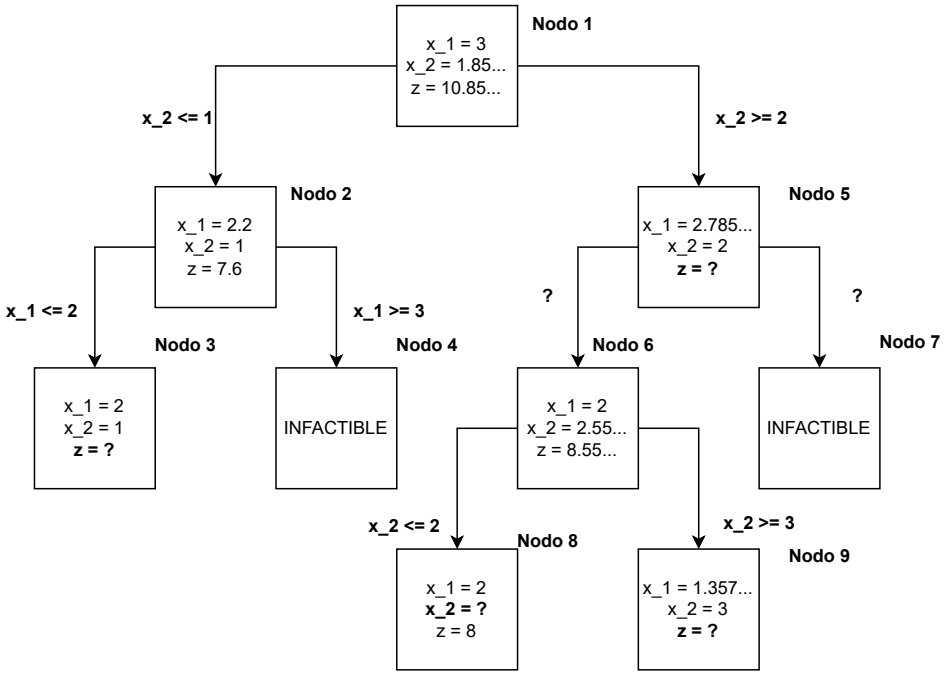
IV. [3 Puntos] Siguiendo la línea a la pregunta anterior, si podemos cambiar el costo alguna variable en una unidad (se puede aumentar como decrementar), ¿Cuál conviene cambiar? Desarrolle su respuesta.

Solution: Como se puede incrementar como decrementar en una unidad es más conveniente cambiar el índice que tenga la mayor valor absoluto de la solución primal. En este caso se tiene que el que tiene mayor solución primal es x_2, con lo que se puede disminuir en $5/3$ la función objetivo obtenida anteriormente.

Pregunta 2 **[20 Puntos]**

(a) [15 ½ Puntos] Tenemos un problema de *Branch and Bound* donde las variables x_1 y x_2 deben ser enteras, y se obtuvieron las siguientes ramificaciones:

Gráfico



I. [2 Puntos] Determine si el problema es de maximización o de minimización.

Solution: El problema es de maximización, esto se puede notar dado que al ir bajando por el árbol se va perdiendo optimalidad, en este caso va teniendo valores más bajos.

II. [3 Puntos] Determine los rangos de valores de z en los nodos 5 3 y 9.

Solution: Un punto cada rango de z.

- Para el nodo 3 se tiene que $z \leq 7{,}6$.
- Para el nodo 5 se tiene que $8{,}55 \leq z \leq 10{,}85$.
- Para el nodo 9 se tiene que $z \leq 8{,}55$.

III. [5 ½ Puntos] Determine las restricciones para la ramificación del nodo 5 y el valor de x_2 en el nodo 8.

Solution: 3 puntos por las ramificaciones, 2.5 puntos por el valor de x_2 justificado.

Como en el nodo 5 se tiene que x_1 no es entero se debe ramificar. La ramificación al nodo 6 indica que $x_1 \leq 2$ ya que el valor de x_1 toma un valor menos que 2, por ende, la ramificación al nodo 7 es $x_1 \geq 3$.

Ahora, podemos notar que para llegar al nodo 8 se debe pasar por la ramificación $x_2 \leq 2$ y $x_2 \geq 2$, por lo que $x_2 = 2$.

IV. [5 Puntos] Asumiendo que el problema tiene una función objetivo de la forma $c^T x$, determine los nodos que hay que seguir ramificando si es que existen.

Solution: 2 puntos por obtener los valores de c, 1 punto por cada hoja y porque se debe ramificar o no.
Primero, debemos encontrar los coeficientes de c, para esto podemos notar que el nodo 2 tiene valores exactos y el nodo 8 también (ya que x_2 fue calculado anteriormente). Con esto podemos hacer un sistema de ecuaciones y obtener que $c = (3, 1)$.

Para ver si hay que seguir ramificando hay que revisar los valores de las hojas y las condiciones que deben cumplir.

- Para el nodo 3 podemos notar que tiene valores enteros y que tiene de valor objetivo $z = 7$. No es necesario ramificar ya que es un nodo con valores enteros.
- Para el nodo 8 podemos notar que también tiene valores enteros por lo que no es necesario seguir ramificando y se tiene un valor objetivo de $z = 8$.
- Para el nodo 9 se tiene un valor objetivo de $z = 5{,}714$, pero el incumbente era de valor 8, por lo que se tiene que podar ya que no se encontrarán mejores valores.

(b) [4 ½ Puntos] Dado el siguiente dominio: $X = \{x \in \{0, 1\}^4 : 6x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 10\}$. Plantee sus desigualdades de cubrimientos.

Solution: 0.5 cada desigualdad.

- $x_1 + x_2 \leq 1$
- $x_1 + x_3 \leq 1$
- $x_2 + x_3 \leq 1$
- $x_2 + x_4 \leq 1$
- $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$
- $x_1 + x_2 + x_4 \leq 2$
- $x_1 + x_3 + x_4 \leq 2$
- $x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$