PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y DE SISTEMAS
ICS1113-4 Optimización
Profesor: Ricardo Guerra
Ayudante: Constanza Danés (cvdanes@uc.cl)

Pauta Interrogación 2

Parte 1

a) Total: 4 puntos.

Variables de decisión: $x_{12}, x_{23}, x_{13}, x_{34}, x_{35}, x_{54}$

Función objetivo: $Min\ (x_{12} + 5 * x_{23} + 7 * x_{13} + 2 * x_{34} + 4 * x_{35} + 5 * x_{54})$ (1punto)

s.a.

$$x_{12} + x_{13} = 10 \text{(0,5 puntos)}$$

$$5 + x_{13} = x_{12} \text{(0,5 puntos)}$$

$$x_{13} + x_{23} = x_{34} + x_{35} \text{(0,5 puntos)}$$

$$x_{34} + x_{54} = 7 \text{(0,5 puntos)}$$

$$x_{35} + 2 = x_{54} \text{(0,5 puntos)}$$

$$x_{12}, x_{23}, x_{13}, x_{34}, x_{35}, x_{54} \geq 0 \text{(0,5 puntos)}$$

b) Total: 4 puntos.

$$x_{12} = 5$$

$$x_{13} = 5$$

$$x_{34} = 5$$

$$x_{54} = 2$$

(0,5 puntos cada una)

La estructura implícita es la de un árbol generador (solución básica factible):

- Llega a todos los nodos
- No tiene ciclos

(2 puntos por explicación)

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y DE SISTEMAS
ICS1113-4 Optimización
Profesor: Ricardo Guerra
Ayudante: Constanza Danés (cvdanes@uc.cl)

c) Total: 8 puntos.

Variables duales:

$$x_{12} \rightarrow \pi_1 - \pi_2 = 1$$

$$x_{13} \rightarrow \pi_1 - 3 = 7$$

$$x_{34} \rightarrow \pi_3 - \pi_4 = 2$$

$$x_{54} \rightarrow \pi_5 - \pi_4 = 5$$

En este caso tomamos $\pi_1 = 0$ (también es válido elegir otro):

$$\rightarrow \pi_2 = -1$$

$$\rightarrow \pi_3 = -7$$

$$\rightarrow \pi_4 = -9$$

$$\rightarrow \pi_5 = -4$$

(0,5 puntos cada una)

Calculamos los costos reducidos:

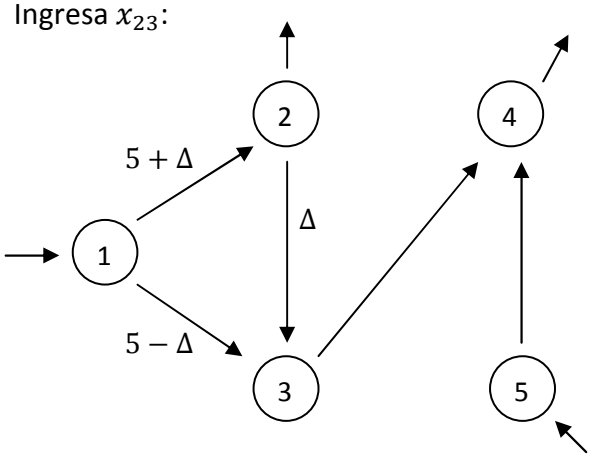
$$r_{23} = 5 - \pi_2 + \pi_3 = -1 < 0$$

$$r_{35} = 4 - \pi_3 + \pi_5 = 7 > 0$$

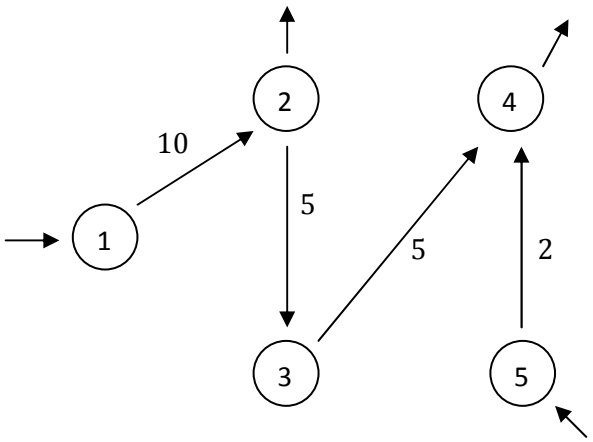
(1 punto cada una)

Como $r_{23} < 0$, no estamos en el óptimo.

Ingresa x_{23}:



Como $\Delta_{MAX} = 5$:



Nuevamente calculamos los valores duales:

$$x_{12} \rightarrow \pi_1 - \pi_2 = 1$$

$$x_{23} \rightarrow \pi_1 - 3 = 5$$

$$x_{34} \rightarrow \pi_3 - \pi_4 = 2$$

$$x_{54} \rightarrow \pi_5 - \pi_4 = 5$$

En este caso tomamos $\pi_2 = 0$ (también es válido elegir otro):

$$\rightarrow \pi_1 = 1$$

$$\rightarrow \pi_3 = -5$$

$$\rightarrow \pi_4 = -7$$

$$\rightarrow \pi_5 = -2$$

Calculamos los costos reducidos:

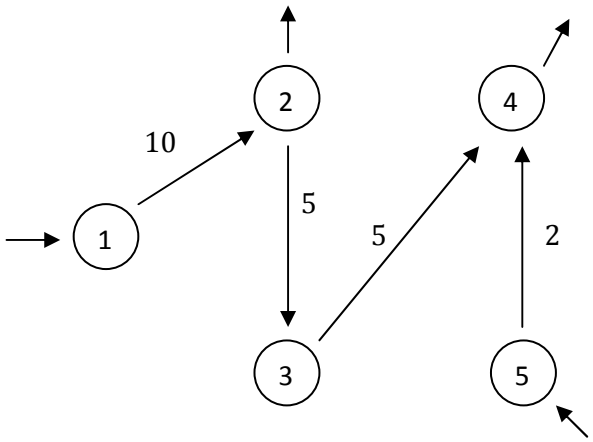
$$r_{13} = 7 - \pi_1 + \pi_3 = 1 > 0$$

$$r_{35} = 4 - \pi_3 + \pi_5 = 7 > 0$$

(1 punto cada uno)

Como ambos costos reducidos son mayores a cero, estamos en el óptimo.

Óptimo:



(1 punto)

$$Z_{óptimo} = 55$$ (1 punto)

d) Total: 5 puntos.

Para que haya soluciones múltiples: $r_{13} = 0$

$$r_{13} = 0 \rightarrow c_{13} = \pi_1 - \pi_3 = 0 + 5 = 6$$

$$\rightarrow c_{13} = 6$$

(2 puntos si sabía hacerlo, pero tiene error algebraico, 5 puntos todo bueno)

e) Calculamos los valores duales:

$$x_{12} \rightarrow \pi_1 - \pi_2 = 1$$

$$x_{23} \rightarrow \pi_1 - 3 = 5$$

$$x_{34} \rightarrow \pi_3 - \pi_4 = a$$

$$x_{54} \rightarrow \pi_5 - \pi_4 = 5$$

En este caso tomamos $\pi_2 = 0$ (también es válido elegir otro):

$$\rightarrow \pi_1 = 1$$

$$\rightarrow \pi_3 = -5$$

$$\rightarrow \pi_4 = -5 - a$$

$$\rightarrow \pi_5 = -a$$

Calculamos los costos reducidos:

$$r_{13} = 7 - \pi_1 + \pi_3 = 1 \geq 0$$

$$r_{35} = 4 - \pi_3 + \pi_5 = 4 + 5 - a \geq 0$$

$$9 - a \geq 0$$

$$a \leq 9$$

(5 puntos todo bueno)

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y DE SISTEMAS
ICS1113-4 Optimización
Profesor: Ricardo Guerra
Ayudante: Constanza Danés (cvdanes@uc.cl)

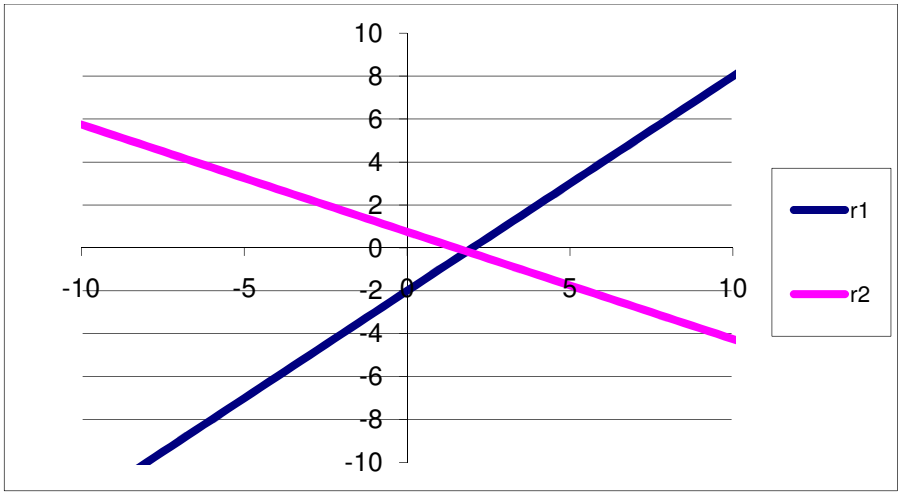
Parte 2

1.a) Total: 4 puntos.

$$
\begin{aligned}
&Dual)Min \quad 8y_1 + 28y_2 \\
&s.a. \\
&\quad y_1 - y_2 = 2 \\
&\quad 2y_1 + 4y_2 \geq 3 \\
&\quad y_1 \leq 0 \; y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

(1 punto cada "línea")

1.b) Total: 4 puntos

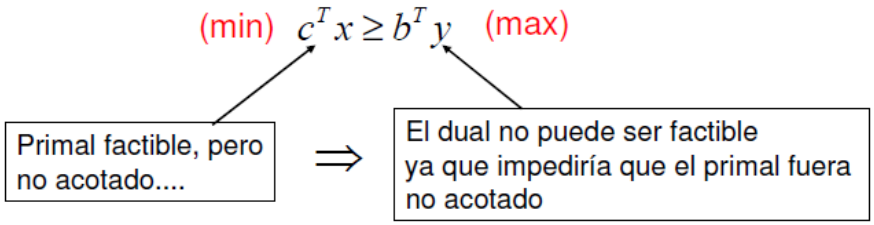


(1 punto)

Como el problema dual no es factible, el dominio del problema primal es no acotado o con dominio vacío y no tiene solución óptima. (2 puntos)

Por dualidad débil:

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y DE SISTEMAS
ICS1113-4 Optimización
Profesor: Ricardo Guerra
Ayudante: Constanza Danés (cvdanes@uc.cl)



(1 punto)

2. **Total: 6 puntos**

Para $X = 35$:

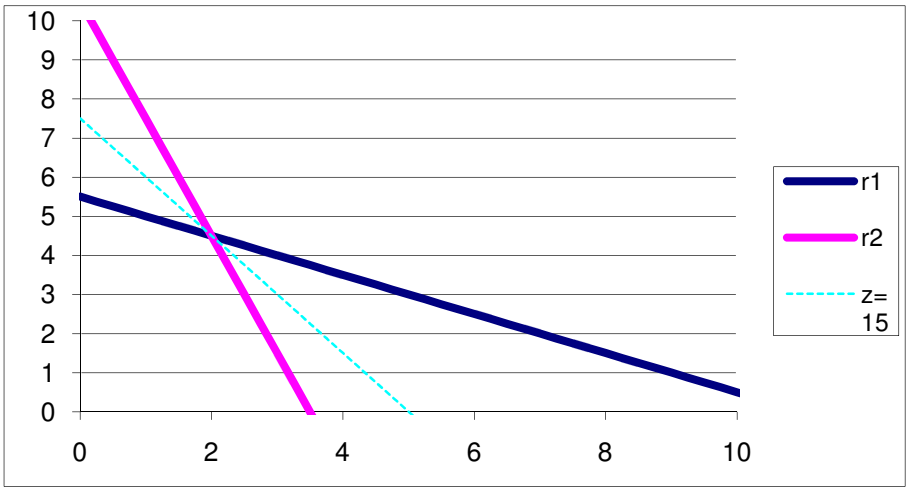
$a = 8$ (2 puntos)

$b, da\ lo\ mismo\ su\ valor$ (2 puntos)

(2 puntos por explicación)

3.a) **Total: 2 puntos.**

Resolviendo gráficamente (por ejemplo):



Óptimo:

$x_1 = 2$

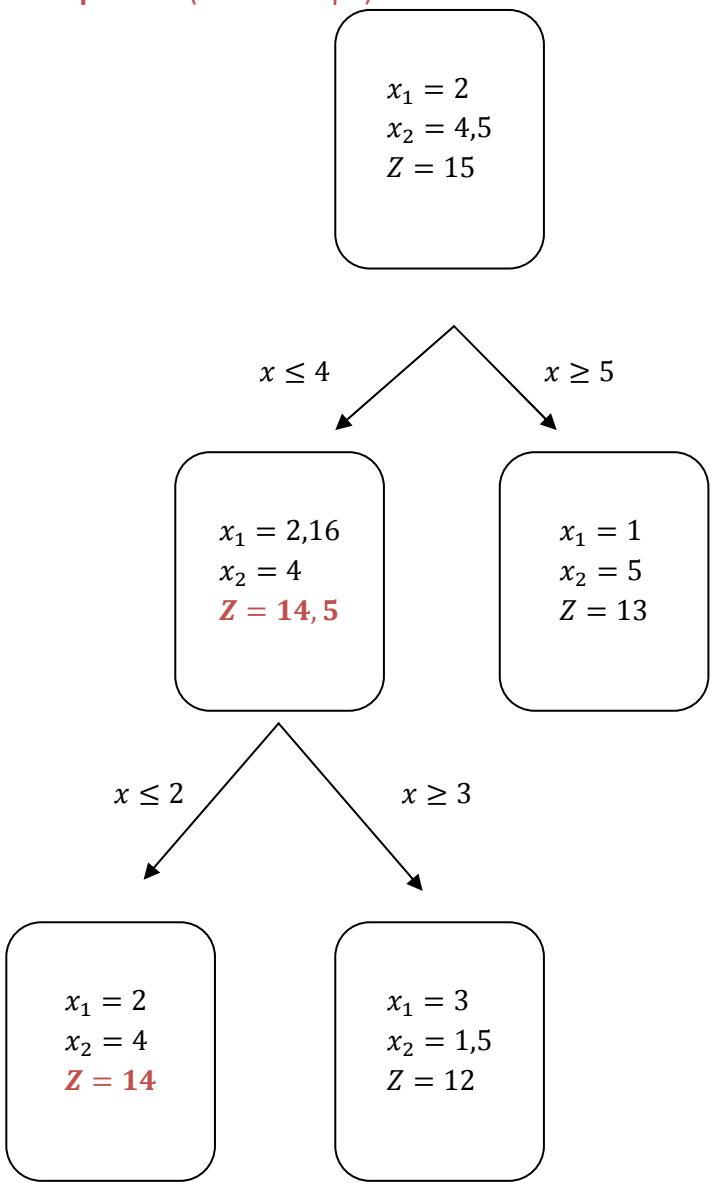
$x_2 = 4.5$

Z=15

(2 puntos)

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y DE SISTEMAS
ICS1113-4 Optimización
Profesor: Ricardo Guerra
Ayudante: Constanza Danés (cvdanes@uc.cl)

3.b) Total: 4 puntos. (1 cada etapa)



Por el método de B&B, llegamos al óptimo:

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 4$$
$$Z = 14$$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y DE SISTEMAS
ICS1113-4 Optimización
Profesor: Ricardo Guerra
Ayudante: Constanza Danés (cvdanes@uc.cl)

3.c) Total: 4 puntos

Consiste en encontrar una desigualdad valida que corta la solución decimal del problema relajado.

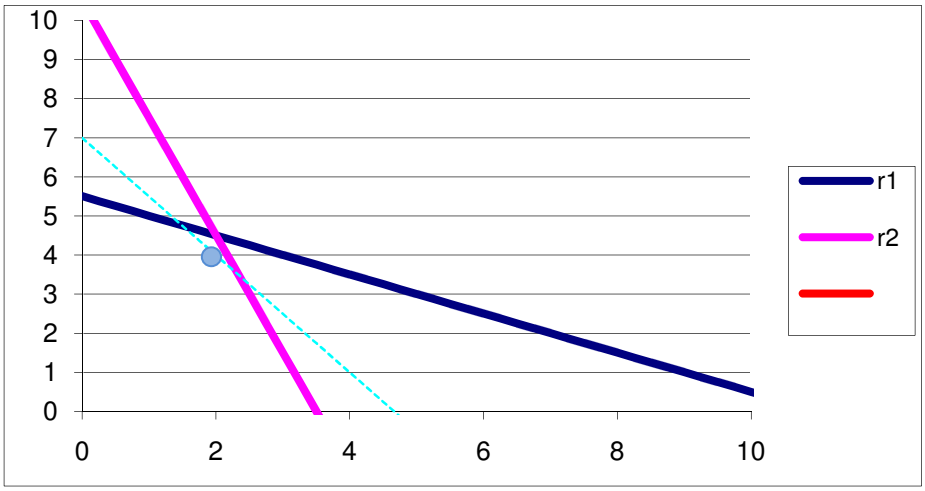
Es una restricción redundante para el problema entero, no agrega ni elimina soluciones factibles, pero elimina soluciones fraccionarias de la relajación. (3 puntos por una buena explicación)

El corte que permite resolver el problema directamente es:

$$3 * x_1 + 2 * x_2 \leq 14$$

(1 punto por el corte)

El nuevo dominio quedaría de la siguiente forma: *(sólo para que lo vean)*



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y DE SISTEMAS
ICS1113-4 Optimización
Profesor: Ricardo Guerra
Ayudante: Constanza Danés (cvdanes@uc.cl)

Parte 3: (30 pts)

El problema primal es

$$
\begin{aligned}
&Max\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 \\
&s.a \\
&x_1 + 4x_2 + 2x_4 \le 200 \\
&x_2 + 3x_3 + x_4 \le 400 \\
&2x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 \le 600 \\
&x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 \le 50 \\
&x_i \ge 0\ \forall i = 1,2,3,4
\end{aligned}
$$

Y el respectivo dual es

$$
\begin{aligned}
&Min\ 200\pi_1 + 400\pi_2 + 600\pi_3 + 50\pi_4 \\
&s.a \\
&\pi_1 + 2\pi_3 + \pi_4 \ge 2 \\
&4\pi_1 + 4\pi_3 \ge 5 \\
&3\pi_2 + \pi_3 + \frac{1}{2}x_4 \ge 3 \\
&2\pi_1 + \pi_2 + 6\pi_3 + \frac{3}{2}\pi_4 \ge 1 \\
&\pi_i \ge 0\ \forall i = 1,2,3,4
\end{aligned}
$$

a) A partir de la información disponible, se deduce lo siguiente

i) Las variables básicas del dual son π_1 y π_4. Como estas variables son básicas, se sabe que las holguras de las restricciones 2 y 3 del dual también son distintas de cero. Por descarte, queda que las variables no básicas del dual son π_2, π_3 y las holguras de las restricciones 1 y 4. Si existen holguras para las restricciones 1 y 4 del dual, significa que las variables primales x_1 y x_4 son no básicas.

Entonces se tiene que x_2 y x_3 son las variables básicas del problema primal. Así, las variables del primal en el óptimo son

$x_1 = 0$
$x_2 = 50$
$x_3 = 100$
$x_4 = 0$

ii) Las variables duales representan los precios sombra o el costo marginal asociado a su restricción respectiva (lo máximo a pagar por cada minuto adicional de la capacidad). Por ende, si una variable dual tiene valor mayor a cero, significa que la respectiva restricción está activa. Así se determina que las restricciones 1 y 4 están activas, por lo que los procesos 1 y 4 se encuentran a toda capacidad. Los procesos que no se utilizan totalmente son p2 y p3, y sus respectivas holguras son 50 y 300 minutos.

iii) El precio del producto en el óptimo es

$$200\pi_1 + 400\pi_2 + 600\pi_3 + 50\pi_4$$
$$200 \cdot 1.25 + 50 \cdot 6 = 550$$

b) Para saber qué procesos se ampliarían y con qué prioridad, se observan los "precios sombra" (es decir los π**).** Claramente no conviene modificar los procesos 2 y 3 porque no están activas sus restricciones, por lo que se ampliarían los procesos 1 y 4, pero priorizando al cuarto proceso, pues su valor es más alto.

c) Partimos por la base que se amplía el proceso 4. Para saber cuál es el máximo aumento (q), se usa que $B^{-1}(b + \Delta b) \geq 0$. Con esto se obtiene que

$$B^{-1}\begin{bmatrix} 200 \\ 400 \\ 600 \\ 50+q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 50-6q \\ 300-2q \\ 100+2q \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene que el valor máximo que puede tomar q es 50/6.

El máximo precio que alcanzaría el producto ahora es
$FO' = 200 \cdot 1.25 + (50 + 8.3) \cdot 6 = 599.8$

d) Como se aumentó la capacidad solamente del proceso 4 (por lo que hay un costo agregado de $4 por unidad producida por minuto), y se agregaron 150 minutos, se calcula el beneficio neto (incremento en el beneficio) como

$BN = 5.000.000(6-4) * 150 = \$1.500.000.000$

e) El nuevo problema planteado es semejante al dual del problema original. En este caso, las variables duales representan el precio que le cobraría la empresa por minuto usado de cada proceso, lo que se busca determinar. Esto significa que se busca el mínimo del costo de fabricación del detergente. El requisito que el ingreso percibido por el arriendo sea igual al que se deja de percibir al no producir su propio producto, son las restricciones del dual. Por ende, la solución a este problema ya está dada en el enunciado, y su valor óptimo sigue siendo 550.

Parte 4: (20 pts)

Utilizando la información del enunciado se llega a lo siguiente

-variables: **(2 pts por cada variable)**

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ el\ alumno\ i\ asiste\ a\ la\ escuela\ j \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

$$z_j = \begin{cases} 1 & si\ la\ escuela\ j\ está\ abierta \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

-Función Objetivo: **(4 pts)**

$$Max \sum_{j=1}^{E} z_j \cdot \sum_{i=1}^{N} x_{ij} (\alpha C_j + \mu T_{ij})$$

-Restricciones: **(2 pts por cada restricción)**

- El valor de la calidad de educación por escuela

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y DE SISTEMAS
ICS1113-4 Optimización
Profesor: Ricardo Guerra
Ayudante: Constanza Danés (cvdanes@uc.cl)

$$C_j = C^0 + Min\left(Max(0, \frac{C^1 - C^0}{50}(\sum_{i=1}^{N} x_{ij} - 50)), C^1 \right)$$

-No pueden ir alumnos a una escuela cerrada

$$x_{ij} \le z_j \quad \forall i, j$$

-Un alumno no puede ir a dos escuelas

$$\sum_{j=1}^{E} x_{ij} = 1 \quad \forall i$$

-Límite de alumnos por escuela

$$l_j \le \sum_{i=1}^{N} x_{ij} \le u_j \quad \forall j$$

-Presupuesto de la municipalidad

$$\overbrace{-(\sum_{j=1}^{E} z_j s_j + \sum_{j=1}^{E}\sum_{i=1}^{N} x_{ij} m_j)}^{ingresos} \overbrace{-\sum_{j=1}^{E}(1 - z_j) g_j}^{arriendo\ \ por\ cierre} + \overbrace{(\sum_{j=1}^{E} z_j f_j + \sum_{j=1}^{E}\sum_{i=1}^{N} x_{ij} p_j)}^{costos} \le P$$

-Binariedad de las variables

$$x_{ij} \in \{0,1\} \ \forall i, j$$
$$z_j \in \{0,1\} \ \forall j$$