Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
Primer Semestre de 2011

ICS 1113, Optimización

Solución al Examen

Parte 1[25 pts.] :
Responda las siguientes preguntas en forma breve pero justificando adecuadamente sus respuesta.

1. [5 pts.] El siguiente corresponde a un Tableau de un problema de Programación Lineal de minimización con 3 restricciones y cinco variables, en alguna iteración del algoritmo Simplex. La cuarta fila corresponde a los costos reducidos. Algunos de los números está representados por parámetros a definir: a, b, c, d, e,

a	0	1	3	0	b
-1	1	0	0	0	2
0	0	0	1	1	1
c	0	0	d	0	50
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	30

   Indique valores posibles (o rangos, si quiere) para esos parámetros de modo que el Tableau corresponda a alguna de las siguientes condiciones:

   a) El Tableau actual no es óptimo.
   Respuesta: $b \geq 0, a \geq 0$, c o $d < 0$.

   b) El Tableau actual es óptimo pero existen mútiples soluciones.
   Respuesta: $b \geq 0, a \geq 0$, $c \geq 0$, $d \geq 0$ pero uno de ellos $= 0$.

   c) El Tableau actual es óptimo, pero la solución óptima es degenerada.
   Respuesta: $b = 0, a \geq 0$, $c \geq 0$, $d \geq 0$.

   d) El Tableau actual corresponde a la situación en que se detecta que el problema es no acotado.
   Respuesta: $b \geq 0, a < 0$, $c < 0$.

2. [3 pts.] "Para que un problema sea convexo, todas las funciones incluidas en las restricciones deben ser convexas." ¿Es verdad o no esta afirmación? Justifique.

   Respuesta: No necesariamente. La región factible del problema debe ser convexa, pero eso puede ser inducido aún usando funciones no convexas. Por ejemplo, la relación $\log_{10} x \leq 2$ es equivalente a $x \leq 100$, que es un intervalo convexo. Sin embargo, *log* no es una fucnión convexa.

3. [3 pts.] En un problema de optimización no lineal de la forma mín$\{f(x) : g_i(x) \leq b_i, i = 1, \ldots, m\}$, cuando estamos en una solución óptima, el valor del multiplicador de Lagrange de una restricción activa, siempre permite estimar en cuánto cambia el valor óptimo al cambiar el lado derecho respectivo. ¿Es verdad o no esta afirmación? Justifique.

   Respuesta: No es verdad, para que el multiplcador de Lagrange sirva como estimador debe estar determinado en forma única y ser no nulo.

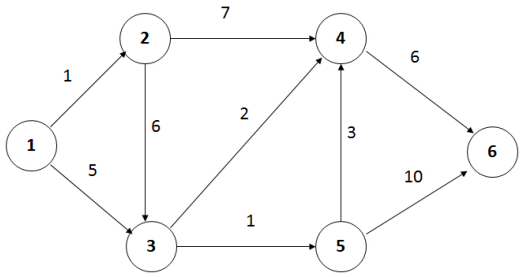
4. [3 pts.] Si tenemos un problema de programación lineal con n variables y m restricciones, entonces en la Fase I deben agregarse necesariamente m variables artificiales. ¿Es eso verdad o no? Explique.

   Respuesta: No necesariamente, si hay restricciones de la forma $\leq b$, con $b \geq 0$ a las que se han agregado variables de holgura, esas ya forman parte de una solución básica factible inicial.

5. [3 pts.] En un problema de flujo a costo mínimo, para que este problema sea factible, basta con que la suma de las ofertas totales sea igual a la suma de las demandas totales.

   Respuesta: No basta con eso, la red además debe permitir flujos factibles entre los puntos de oferta y los puntos de demanda.

6. [4 pts.] Considere la red de la figura en donde los número sobre los arcos indican el largo del arco. Interesa encontrar la ruta más corta para ir desde el nodo 1 al nodo 6.



   El algoritmo de Dijstra, visto, en clases, sirve para resolver este problema, pero le pedimos ahora que indique cómo se puede resolver el mismo problema usando alguna formulación de flujo a costo mínimo (diga con claridad cuál es el problema de flujo a costo mínimo, no tiene que resolverlo).

   Respuesta: Para esto basta definir un problema de flujo en el cual se pone una oferta igual a 1 en el nodo 1, y una demanda igual a -1 en el nodo 6. Se conservan las distancias como costos. El resultado será un árbol generador en donde el flujo de 1 unidad se transportará desde 1 a 6 sin ser dividido, entregando la ruta más corta.

7. [4 pts.] Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \prod_{j=1}^{n} x_j \\ s.a. \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j = a \\ & x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Escriba una formulación de Programación Dinámica para este problema (Tiene que definir las funciones apropiadas y escribir la recursión de Programación Dinámica, no tiene que desarrollar nada más).

Respuesta: Una forma de hacer esto es observar que las variables tienen que ser > 0 en el óptimo, y entonces transformar esto a un problema con suma mediante logaritmos:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_{j=1}^{n} \log(x_j) \\ s.a. \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j = a \\ & x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Ahora definimos:

$$\begin{aligned} f_k(b) = \text{máx} \quad & \sum_{j=k}^{n} \log(x_j) \\ s.a. \quad & \sum_{j=k}^{n} x_j = b \\ & x_j \geq 0, j = k, \ldots, n \end{aligned}$$

La recursión es, entonces:

$$f_k(b) = \max_{0<x_k\leq b} \{\log(x_k) + f_{k+1}(b - x_k)\}$$

Nos interesa calcular $f_1(a)$ y los valores $f_n(b)$ se pueden calcular como condición de borde para distintos b, cuando el problema está definido. (NOTA: La recursión también se puede escribir en forma multiplicativa, sin usar logaritmos).

Parte 2[25 pts.] :

1. [12 pts.] Una empresa del rubro de muebles se dedica a fabricar sillas, bancos y mesas de jardín. Para su fabricación, estos productos deben pasar por el taller de doblado de tubos y por el de armado. La empresa obtiene utilidades por la venta de los muebles. El tiempo unitario (en horas) requerido por cada producto en cada taller, las capacidades máximas mensuales de éstos (en horas), y la utilidad unitaria de cada producto (en miles de pesos), se indican a continuación:

	Sillas	Bancos	Mesas	Capacidad
Doblado de tubos	1,2	1,7	1,2	1000
Armado	0,8	0,7	2,3	1200
Utilidad unitaria	12	11	18	

La empresa desea determinar cuál es la combinación a producir que reporta mayores ingresos asumiendo que todo lo que fabrica se vende, y sin exceder las disponibilidades de los talleres de tubos y armado. Escriba un modelo de programación lineal que le permita a la empresa tomar esta decisión.

Respuesta: Sean x_1, x_2, x_3 las cantidades de sillas, bancos y mesas a producir respectivamente. El modelo es:

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & 12x_1 + 11x_2 + 18x_3 \\ s.a. & 1,2x_1 + 1,7x_2 + 1,2x_3 \leq 1000 \\ & 0,8x_1 + 0,7x_2 + 2,3x_3 \leq 1000 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

2. [13 pts.] Una empresa exportadora de frutas debe tomar una serie de decisiones relativas a la cosecha de sus plantaciones a lo largo de un cierto horizonte de corto plazo. Vamos a suponer que esta compañía dispone de n parcelas, las cuales pueden ser cosechados en cualquiera de T periodos de tiempo. Cada parcela tiene una cantidad B_i de fruta disponible al comienzo del horizonte, $i = 1, \ldots, n$ (medido en kilos). En cada periodo de tiempo se puede cosechar todo o sólo una parte de cada parcela. Existen m plantas procesadoras a las cuales se puede enviar la fruta cosechada en cada periodo. La planta procesadora j demanda una cantidad d_{jt} de fruta en el periodo t, $j = 1, \ldots, m;\ t = 1, \ldots, T$. Sean: α_{it} el costo unitario de cosecha en la parcela i (en \$ por kilo, por ejemplo) en el periodo t, c_{ij} el costo unitario de transporte entre la parcela i y el destino j.

Construya un modelo de programación lineal que permita a la empresa decidir cuánto cosechar en cada parcela en cada momento de tiempo y cuánto de eso transportar a los diferentes destinos de modo que se minimice el costo total de cosecha y transporte.

Respuesta: Definamos x_{it} como la cantidad cosechada en la parcela i en el instante t y y_{ijt} la cantidad despachada desde la parcela i a la planta j en el periodo t. Una formulación es:

$$\begin{array}{rll} \text{mín} & \displaystyle\sum_{t=1}^{T} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_{it} x_{it} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} y_{ijt} \right\} & \\ s.a. & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} y_{ijt} = x_{it} & i = 1, \ldots, n; t = 1, \ldots, T \quad (1) \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_{ijt} \geq d_{jt} & j = 1, \ldots, m; t = 1, \ldots, T \quad (2) \\ & x_{it} \leq B_i - \displaystyle\sum_{k=1}^{t-1} x_{ik} & i = 1, \ldots, n; t = 2, \ldots, T \quad (3) \\ & x_{i1} \leq B_i & i = 1, \ldots, n \quad (4) \\ & x_{it} \geq 0, y_{ijt} \geq 0, & i = 1, \ldots, n; t = 2, \ldots, T; j = 1, \ldots, m \quad (5) \end{array}$$

Parte extra: Suponga ahora que le dicen que debe considerar el hecho que cada vez que se cosecha una parcela (todo o en parte), se incurre en un costo fijo K_i, para la parcela $i = 1, \ldots, n$, debido a la instalación de las cuadrillas de cosecha y el equipamiento auxiliar. Haga las extensiones a su modelo de a) que permitan ahora considerar la minimización de los costos anteriores más los costos de instalación de faenas.

Respuesta: Para esto se puede definir una variables binaria z_{it} que vale 1 si se cosecha en la parcela i en t y 0 si no. El modelo extendidio es:

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{t=1}^{T}\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_{it}x_{it}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}y_{ijt}\right\}+\sum_{i=1}^{n}K_i z_{it} & & \\
s.a. \quad & \sum_{j=1}^{m} y_{ijt} = x_{it} & i=1,\ldots,n; t=1,\ldots,T & (1)\\
& \sum_{i=1}^{n} y_{ijt} \geq d_{jt} & j=1,\ldots,m; t=1,\ldots,T & (2)\\
& x_{it} \leq B_i - \sum_{k=1}^{t-1} x_{ik} & i=1,\ldots,n; t=2,\ldots,T & (3)\\
& x_{i1} \leq B_i & i=1,\ldots,n & (4)\\
& x_{it} \leq B_i z_{it} & i=1,\ldots,n; t=2,\ldots,T & (5)\\
& x_{it} \geq 0, y_{ijt} \geq 0, z_{it} \in \{0,1\} & i=1,\ldots,n; t=2,\ldots,T; j=1,\ldots,m & (6)
\end{aligned}$$

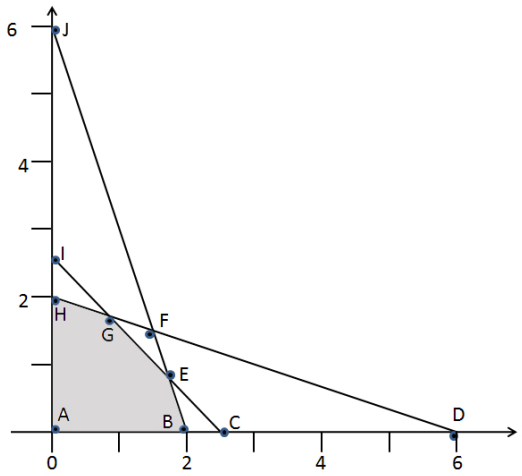
(NOTA: No es necesario escribir todo el modelo nuevamente, basta explicar cuáles son los elementos adicionales).

Parte 3[25 pts.] : Considere el siguiente problema de optimización lineal:

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & 2x_1 + x_2\\
s.a. \quad & 2x_1 + 2x_2 \leq 5\\
& 3x_1 + x_2 \leq 6\\
& x_1 + 3x_2 \leq 6\\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

1. [4 pts.] Haga un gráfico de la región factible e indique en él todas las soluciones básicas asociadas a este problema.

Respuesta: La figura muestra un gráfico con las restricciones, la región factible y todas las soluciones básicas (incluyendo las infactibles). ´Si bien son varios puntos, hay simetría en la figura así que eso simplifica determinarlos.



Tenemos:

$$\begin{aligned} A &= (0,0) \\ B &= (2,0) \\ C &= (2{,}5,0) \\ D &= (6,0) \\ E &= (1{,}75,0{,}75) \\ F &= (1{,}5,1{,}5) \\ G &= (0{,}75,1{,}75) \\ H &= (0,2) \\ I &= (0,2{,}5) \\ J &= (0,6) \end{aligned}$$

No es realmente necesario detallart las coordenadas, basta indicar correctamenter los puntos en el dibujo.

2. [9 pts.] Resuelva el problema usando el método SIMPLEX con el Tableau (Ind: No necesita hacer Fase I, parta de una solución básica factible "obvia").

Respuesta: Se le deben agregar al problema tres variables artificiales, una por cada desigualdad. El Tableau inicial es:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
2	2	1	0	0	5
3	1	0	1	0	6
1	3	0	0	1	6
2	**1**	**0**	**0**	**0**	0

Podemos partir de inmediato ya que la solución básica en las variables artificiales es factible. Elegimos la variable x_1 para entrar a la base. Los cuocientes son 5/2, 6/3, 6/1, así que el pivote está en la segunda fila. El nuevo Tableau es:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
0	4/3	1	−2/3	0	1
1	1/3	0	1/3	0	2
0	8/3	0	−1/3	1	4
0	**1/3**	**0**	**−2/3**	**0**	−4

Ahora entra la variables x_2 a la base. El menor cuociente se alcanza en la fila 1. El nueva Tableau es:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
0	1	3/4	−1/2	0	3/4
1	0	−1/4	1/2	0	7/4
0	0	−2	1	1	2
0	**0**	**−1/4**	**−1/2**	**0**	−17/4

Como ahora las costos reducidos son todos ≤ 0, estamos en el óptimo (para un problema de maximización).

3. [4 pts.] Una vez resuelto el problema, haga un análisis de sensibilidad para el coeficiente del lado derecho de la primera restricción.

Respuesta: El análisis de sensibilidad se hace determinando los límites de variación de una perturbación δ del lado derecho. Esta perturbación debe satisfacer:

$$(B^{-1})_1 \delta \geq -x_B$$

donde $(B^{-1})_1$ denota la primera columna de la inversa de la base. La inversa de la base la determinamos del Tableau óptimo, una vez que esté ordenado. Para esto hay que intercambiar la primera y segunda fila:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	0	$-1/4$	$1/2$	0	$7/4$
0	1	$3/4$	$-1/2$	0	$3/4$
0	0	-2	1	1	2
0	**0**	$\mathbf{-1/4}$	$\mathbf{-1/2}$	**0**	$-17/4$

La inversa de la base corresponde a las tres columnas de este Tableau, las de x_3, x_4, x_5. De acá tenemos que el sistema que hay que resolver es:

$$\begin{bmatrix} -1/4 \\ 3/4 \\ -2 \end{bmatrix} \times \delta \geq \begin{bmatrix} -7/4 \\ -3/4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

de donde se deduce que $-1 \leq \delta \leq 1$. Es decir, el coeficiente puede estar entre 4 y 6.

4. [4 pts.] Escriba el dual del problema.

Respuesta:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & 5y_1 + 6y_2 + 6y_3 \\ s.a. & 2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 2 \\ & 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{array}$$

5. [4 pts.] A partir únicamente de la solución óptima obtenida por usted en el punto 3), determine la solución óptima del problema dual (No resuelva el dual con SIMPLEX). Justifique.

Respuesta: Esto se puede abordar de dos formas: por un lado, se puede decir que ya sabemos que los valores de las variables duales están disponibles bajo la inversa de la base en el el Tableau óptimo, y esos son $(1/4, 1/2, 0)$ (están en negativo). La otra posibilidad es ver que, por holguras

complementarias (dado que en el óptimo x_1 y x_2 son > 0 y la terera restricción es inactiva), entonces:

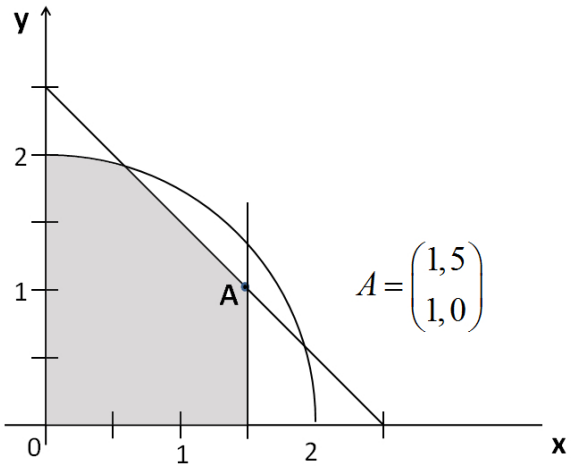
$$2y_1 + 3y_2 + y_3 = 2$$
$$2y_1 + y_2 + 3y_3 = 1$$

de donde se deduce que $y_1 = 1/4$ y $y_2 = 1/2$.

Parte 4[25 pts.] : Considere el siguiente problema de optimización no lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & (x-5/2)^2 + (y-3/2)^2 \\ s.a. & x^2 + y^2 \leq 4 \\ & 2x + 2y \leq 5 \\ & 2x \leq 3 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

La siguiente figura muestra la región factible e indica las coordenadas de un punto específico, A.



1. [4 pts.] ¿Se cumple alguna condición de regularidad para el punto A? ¿Cuál?, Explique.

   Respuesta: El problema es convexo, más aún, con restricciones lineales y factible, así que cumple la condición de Slater-Uzawa.

2. [7 pts.] Verifique que en el punto A se cumplen las condiciones KKT y muestre que es la solución óptima del problema.

   respuesta: Para esto, denotemos por f la función objetivo y por g_1, g_2, g_3 las restricciones en ese orden. Tenemos entonces que:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x-5/2) \\ 2(y-3/2) \end{pmatrix}, \nabla g_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \nabla g_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \nabla g_3(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y en el punto $A = (1{,}5, 1)$ se tiene que

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Luego, si se cumple KKT debemos encontrar multiplicadores $\lambda_i \geq 0, i = 1, ..., 3$ tales que

$$\nabla f(x, y) + \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 + \lambda_3 \nabla g_3$$

Observemos que en ese punto la restricción 1 es inactiva, así que por holguras complementarias se tiene que $\lambda_1 = 0$. Luego, hay que resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde se deduce que $\lambda_2 = 1/2$, $\lambda_3 = 1/2$. Luego, se cumple KKT. Como además el problema es convexo (restriccionesl lineales y función objetivo evidentemente convexa) las condiciones KKT son necesarias y suficientes, así que el punto es óptimo global.

3. [3 pts.] A partir de lo que calculó en 2), ¿puede escribir una estimación de cuánto cambiará el valor óptimo del problema si se cambia el lado derecho de la segunda restricción de 5 a $4,8$? Explique con claridad y escriba su estimación.

   Respuesta: Efectivamente sí se puede ya que los multiplicadores están bien determinados. Tenemos en este caso que el cambio es

   $$\delta z = \lambda_2 \times (0, 2) = 1/2 \times 0, 2 = 0, 1$$

   Así que la función objetivo aumentará aproximadamente en 0,1.

4. [7 pts.] Suponga ahora que la función objetivo del problema es reemplazada por:

   $$f(x, y) = (x - 3/2)^2 + (y - 1/2)^2$$

   Determine el óptimo del problema con la nueva función objetivo y verifique que cumple las condiciones KKT.

   Respuesta: Es fácil ver que el mínimo no erstringido de f es el punto $(3/2, 1/2)$ que se encuentra exactamente sobre la restricción 3. Luego, ese punto es también solución del problema restringido. Las condiciones KKT se cumplen trivialmente ya que en este caso $\nabla f =$ y se cumple KKT con $\lambda_i = 0, i = 1, \ldots, 3$.

5. [4 pts.] A partir de lo que calculó en 4), ¿puede escribir una estimación de cuánto cambiará el valor óptimo del problema si se cambia el lado derecho de la tercera restricción de 3 a $2,8$? Explique con claridad.

   Respuesta: En este caso no se puede. Lo que ocurre es que los multiplicadores son nulos, y esto pareciera indicar que el cambio en valor óptimo es nulo. Sin embargo esto no es verdad ya que al moverle el lado derecho a 2,8, la restricción se mueve hacia la izquierda haciendo cambiar el punto solución óptimo (en este caso el óptimo no restringido ya no será el óptimo del problema restringido).