PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2013
Profesores: P. Álvarez - A. Cataldo - R.Giesen
A. Lüer - V. Valdebenito

# Pauta Examen

Duración: 2 horas y 30 minutos.

*Se debe contestar en cuadernillos independientes:* ***Pregunta 1 Parte a****;* ***Pregunta 1 Parte b y Bono****;* ***Pregunta 2****; y* ***Pregunta 3****. En cada uno de ellos debe colocar su nombre y número de lista asignado.* ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras y de celulares de cualquier tipo.*

## Pregunta 1 (20 puntos)

a) (**10 puntos**) La función de producción de Cobb-Douglas es ampliamente utilizada en Economía para representar la relación entre insumos y producción en una firma. Tiene la forma $Y = AL^{\alpha}K^{\beta}$, donde $Y$ representa la producción total, $L$ el trabajo, $K$ el capital y $A$ es una constante. Los parámetros $\alpha$ y $\beta$ determinan cómo la producción es incrementada en función del trabajo y el capital.

La función Cobb-Douglas también puede aplicada para la maximización de utilidad, tomando la forma $\prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i}$, donde $x_i$ representa la cantidad de un cierto producto $i = 1, \ldots, N$.

Considere el siguiente problema de maximización de utilidad, donde $p_i$ es el precio (positivo) del producto $i$, del que se producen $x_i$ unidades, y $w$ es el presupuesto disponible.

$$\mathcal{U}) \quad \begin{array}{rl} \max & u(x) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \\ \text{s.a.} & p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq w \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Para el problema anterior,

i) (**2 puntos**) Realice las transformaciones necesarias, para transformar el problema $\mathcal{U}$ en uno de minimización con función objetivo convexa[1].

Respuesta:

Aplicando la función logaritmo natural y cambiando el sentido de optimización, resulta,

$$\begin{array}{rl} \min & -\alpha \ln x_1 - (1-\alpha) \ln x_2 \\ \text{s.a.} & p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq w \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

ii) (**4 puntos**) Escriba las condiciones de KKT para el problema $\mathcal{U}$ transformado y encuentre una solución explícita para $(x_1, x_2)$ en función de $\alpha$, $\{p_i\}_i$ y $w$. *Sugerencia:* ¿Puede asumir que ciertas restricciones son activas o inactivas?

[1] Más específicamente, uno donde no exista multiplicación de variables en la función objetivo.

RESPUESTA:

Las condiciones de KKT para este problema son (de acuerdo a OVV),

$$\begin{aligned}
\tfrac{\alpha}{x_1} + \lambda_0 p_1 - \lambda_1 &= 0 \\
\tfrac{1-\alpha}{x_2} + \lambda_0 p_2 - \lambda_2 &= 0 \\
\lambda_0 \left(p_1 x_1 + p_2 x_2 - w\right) &= 0 \\
\lambda_1 x_1 &= 0 \\
\lambda_2 x_2 &= 0 \\
p_1 x_1 + p_2 x_2 &\leq w \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Donde el Lagrangeano considerado es,

$$\mathcal{L}\left(x_1, x_2, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\right) = -\alpha \ln x_1 - (1-\alpha) \ln x_2 + \lambda_0 \left(p_1 x_1 + p_2 x_2 - w\right) - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2$$

O equivalentemente (de acuerdo a FM),

$$\begin{aligned}
\tfrac{\alpha}{x_1} + \lambda_0 p_1 &\geq 0 \\
x_1 \left(\tfrac{\alpha}{x_1} + \lambda_0 p_1\right) &= 0 \\
\tfrac{1-\alpha}{x_2} + \lambda_0 p_2 &\geq 0 \\
x_2 \left(\tfrac{1-\alpha}{x_2} + \lambda_0 p_2\right) &= 0 \\
\lambda_0 \left(p_1 x_1 + p_2 x_2 - w\right) &= 0 \\
p_1 x_1 + p_2 x_2 &\leq w \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Donde el Lagrangeano considerado es,

$$\mathcal{L}\left(x_1, x_2, \lambda_0\right) = -\alpha \ln x_1 - (1-\alpha) \ln x_2 + \lambda_0 \left(p_1 x_1 + p_2 x_2 - w\right)$$

Y las restricciones de no negatividad no se consideran como desigualdades adicionales.

Ya que la restricción de presupuesto tiene que estar activa, por lo que se tiene $p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$. Por otra parte, para que la transformación sea válida, se debe exigir $x_1, x_2 > 0$, por lo que $\frac{\alpha}{x_1} + \lambda_0 p_1 = 0$ y $\frac{1-\alpha}{x_2} + \lambda_0 p_2 = 0$. Así, los valores óptimos serán la solución del siguiente sistema,

$$\begin{aligned}
p_1 x_1 + p_2 x_2 &= w \\
\tfrac{\alpha}{x_1} + \lambda_0 p_1 &= 0 \\
\tfrac{1-\alpha}{x_2} + \lambda_0 p_2 &= 0
\end{aligned}$$

Que tiene por solución óptima, $x_1^* = \frac{\alpha w}{p_1}$, $x_2^* = \frac{(1-\alpha)w}{p_2}$, $\lambda_0^* = -\frac{1}{w}$.

iii) (**4 puntos**) Encuentre una expresión para el valor óptimo del multiplicador de Lagrange de la restricción de presupuesto. Interprételo.

RESPUESTA:

Se obtuvo en la parte anterior: $\lambda_0^* = -\frac{1}{w}$. En términos económicos, representa aproximadamente la utilidad marginal de una unidad extra de presupuesto.

b) (**10 puntos**) Responda si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. Justifique demostrándolo, basándose en los resultados del curso o construyendo un contraejemplo.

i) (**2 puntos**) En un problema de rutas mínimas, si se añade una constante $\alpha > 0$ en el costo de todos los arcos no incidentes al origen, la solución del problema no cambia.

RESPUESTA: Falso. Esta transformación aumenta de forma no proporcional el costo de las rutas compuestas de más arcos. Es decir, no todas las rutas desde un origen a un destino aumentarían su costo en la misma cantidad. Cualquier contraejemplo donde se aprecie esto es válido.

ii) (**2 puntos**) Sea $x^*$ la solución óptima de un problema de programación lineal. Si en $x^*$ una de las restricciones de "menor o igual" es activa, entonces necesariamente la variable dual asociada es no nula.

RESPUESTA: Falso. Por el Teorema de Holguras Complementarias esto no es necesariamente cierto. Si una restricción es activa (su holgura es nula), la variable dual podrá tomar cualquier valor factible.

iii) (**2 puntos**) En el problema de flujo máximo, si se remueven las cotas inferiores de flujo en los arcos la solución no cambia.

RESPUESTA: Falso. No necesariamente, ya que al relajar estas restricciones los flujos podrían redistribuirse, entregando otra solución. Cualquier contraejemplo donde se aprecie esto es válido.

iv) (**2 puntos**) Para todo problema de programación lineal entera mixta, los cortes de Gomory pueden obtenerse de cualquier fila del tableau óptimo de la relajación lineal de éste.

RESPUESTA: Falso. Los cortes de Gomory se pueden obtener de las filas del tableau óptimo de la relajación de un problema, solo si la variable básica asociada a esa fila tiene valor fraccionario, y se pide que ésta sea entera.

v) (**2 puntos**) Suponga que el corte $s - t$ mínimo de una red $G$ tiene 500 unidades de capacidad, y se compone de 10 arcos. Suponga que se incrementa la capacidad de cada uno de los arcos del corte en 10 unidades. Entonces la capacidad del corte mínimo de la red transformada es de 600 unidades.

RESPUESTA: Falso. Al aumentar la capacidad del actual corte de capacidad mínima, otro conjunto de arcos podría pasar a ser el nuevo corte de capacidad mínima. Cualquier contraejemplo donde se aprecie esto es válido.

**Bono** Puede responder la siguiente pregunta para obtener una bonificación extra máxima de 5 puntos.

(**5 puntos**) La *distancia* entre dos vértices de un grafo no dirigido es el número de bordes (arcos no dirigidos) de la ruta más corta entre ellos. Por otra parte, la *excentricidad* de un vértice $v$ es la mayor distancia entre él y cualquier otro vértice. Formule un modelo de programación lineal entera mixta que encuentre la excentricidad de un nodo dado, en un grafo no dirigido, donde cada borde tiene asociada una distancia positiva.

RESPUESTA:

Por comodidad, se puede trabajar en el grafo dirigido que puede obtenerse de su contraparte dirigida. En éste se tienen dos arcos por cada borde, cada uno con el costo del borde, y en ambos sentidos. Sea $G(N, A)$ el grafo dirigido obtenido, donde $d_{ij}$ son las distancias entre los nodos.

- Variables de decisión
  - $X_{ij}^k$ : 1, se utiliza el arco $(i, j) \in A$ para la ruta más corta entre $v$ y $k$; 0, en otro caso.
  - $w$: excentricidad del nodo $v$.

◇ Función objetivo

$$\text{mín}\, w + \epsilon \sum_{k \in N - \{v\}} \sum_{(i,j) \in A} d_{ij} X_{ij}^k$$

Donde $\epsilon$ es una constante muy pequeña.

◇ Restricciones

- Balance de flujo

$$\sum_{j \in N:(i,j) \in A} X_{ij}^k - \sum_{j \in N:(j,i) \in A} X_{ji}^k = \begin{cases} 1, & \text{si } i = v \\ -1, & \text{si } i = k \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}, \ \forall i \in N, \ \forall k \in N - \{v\}$$

- Cálculo de la excentricidad.

$$w \geq \sum_{(i,j) \in A} X_{ij}^k, \ \forall k \in N - \{v\}$$

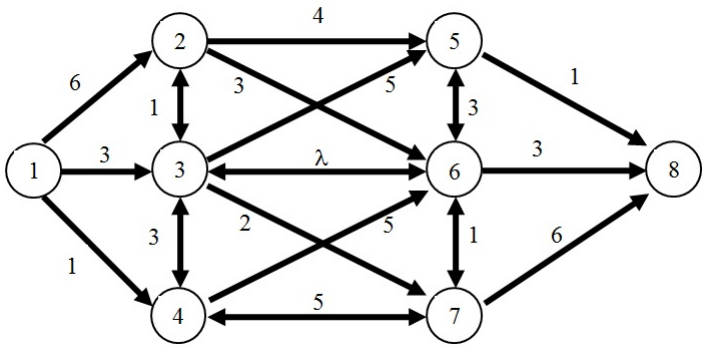
- Dominio de las variables de decisión.

$$X_{ij}^k \in \mathbb{B}, \ \forall (i,j) \in A, \ \forall k \in N - \{v\}$$
$$w \geq 0$$

## Pregunta 2 (20 puntos)

### Parte A (10 puntos)

Encuentre la ruta mínima desde el nodo 1 al nodo 8 en el siguiente grafo, como función de $\lambda$, usando una adaptación del algoritmo de Dijkstra. En cada iteración etiquete todos los nodos indicando su distancia al origen y su predecesor en la ruta mínima. *Sugerencia:* En caso de duda guarde dos etiquetas.




*Respuesta:* Se dijo durante la evaluación que se considerara que $\lambda$ es un entero no negativo.

Una alternativa es resolver la ruta mÃnima sin el arco de costo $\lambda$, luego resolver la ruta mínima de 1 a 3, y finalmente la ruta mínima de 6 a 8. Sumando el costo del arco $(3,6)$ se puede obtener la ruta mínima 1 a 8 pasando por el arco (3,6) y ver para qué valores de lambda esta ruta es mÃnima.

Otra es almacenar efectivamente dos etiquetas dobles. La primera indicaría la mejor estimación del costo de la ruta mínima del origen a un nodo, si el arco $(3,6)$ está en la ruta, así como su predecesor. La segunda indicaría las mismas cantidades, considerando que el arco $(3,6)$ no está en la ruta. Se procede con el algoritmo de Dijkstra para ambos casos.

Una última alternativa es utilizar el algoritmo de Dijkstra hasta que comiencen a aparecer expresiones en términos de $\lambda$ y luego ir viendo los casos que aparezcan. La Figura 1 muestra este "caso base".

| Caso base | Nodo / It | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | (0,-)P | (0,-)P | (0,-)P | (0,-)P |
| | 2 | - | (6,1)T | (6,1)T | (4,3)T |
| | 3 | - | (3,1)T | (3,1)T | (3,1)P |
| | 4 | - | (1,1)T | (1,1)P | (1,1)P |
| | 5 | - | | - | (8,3)T |
| | 6 | - | | (6,4)T | (6,4)T o (3+lambda,3)T |
| | 7 | - | | (6,4)T | (5,3)T |
| | 8 | - | | - | - |

Figura 1: Caso base del algoritmo propuesto

En él se observa que la etiqueta del nodo 6 en la cuarta iteración depende del valor de $\lambda$. De ahí se desprenden dos casos: $\lambda \leq 3$ y $\lambda \geq 4$. Revisando el primero, corresponde ver lo que ocurre para cada uno de los valores posibles, esperándose una suerte de "estabilidad" de la ruta de 1 a 8 para ellos. A continuación se presentan los cálculos, para $\lambda = 0$ (Figura 2), $\lambda = 1$ (Figura 3), $\lambda = 2$ (Figura 4), y $\lambda = 3$ (Figura 5).

| lambda = 0 | Nodo / It | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | (0,-)P | (0,-)P | (0,-)P | (0,-)P | (0,-)P |
| | 2 | (4,3)T | (4,3)T | (4,3)P | (4,3)P | (4,3)P |
| | 3 | (3,1)P | (3,1)P | (3,1)P | (3,1)P | (3,1)P |
| | 4 | (1,1)P | (1,1)P | (1,1)P | (1,1)P | (1,1)P |
| | 5 | (8,3)T | (6,6)T | (6,6)T | (6,6)T | (6,6)P |
| | 6 | (3,3)T | (3,3)P | (3,3)P | (3,3)P | (3,3)P |
| | 7 | (5,3)T | (4,6)T | (4,6)P | (4,6)P | (4,6)P |
| | 8 | - | (6,6)T | (6,6)T | (6,6)T | (6,6)T |

Figura 2: Resolución para el caso en que $\lambda = 0$

| lambda = 1 | Nodo / It | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | (0,-)P | (0,-)P | (0,-)P | (0,-)P | (0,-)P |
| | 2 | (4,3)T | (4,3)T | (4,3)P | (4,3)P | (4,3)P |
| | 3 | (3,1)P | (3,1)P | (3,1)P | (3,1)P | (3,1)P |
| | 4 | (1,1)P | (1,1)P | (1,1)P | (1,1)P | (1,1)P |
| | 5 | (8,3)T | (8,3)T | (7,6)T | (7,6)T | (7,6)P |
| | 6 | (4,3)T | (4,3)T | (4,3)P | (4,3)P | (4,3)P |
| | 7 | (5,3)T | (5,3)T | (5,3)P | (5,3)P | (5,3)P |
| | 8 | - | | (7,6)T | (7,6)T | (7,6)T |

Figura 3: Resolución para el caso en que $\lambda = 1$

Luego, queda por ver el caso $\lambda \geq 4$, que se resuelve como se muestra en la Figura 6.

De los resultados obtenidos se observa que la ruta más corta entre 1 y 8 es $1 \to 3 \to 6 \to 8$ para $\lambda = \{0, 1, 2\}$, $1 \to 3 \to 7 \to 8$ para $\lambda = 3$ y $1 \to 4 \to 6 \to 8$ para $\lambda = 4$.

Durante este proceso se podrían haber encontrado otras rutas, de acuerdo a la regla utilizada para decidir qué etiqueta hacer permanente, en caso de empates. Se evalúa que los costos de dichas rutas encontradas coincidan con el resultado esperado.

| lambda = 2 | Nodo / It | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | (0,-)P | (0,-)P | (0,-)P | (0,-)P | (0,-)P |
| | 2 | (4,3)T | (4,3)T | (4,3)P | (4,3)P | (4,3)P |
| | 3 | (3,1)P | (3,1)P | (3,1)P | (3,1)P | (3,1)P |
| | 4 | (1,1)P | (1,1)P | (1,1)P | (1,1)P | (1,1)P |
| | 5 | (8,3)T | (8,3)T | (8,3)T | (8,3)T | (8,3)P |
| | 6 | (5,3)T | (5,3)T | (5,3)P | (5,3)P | (5,3)P |
| | 7 | (5,3)T | (5,3)T | (5,3)P | (5,3)P | (5,3)P |
| | 8 | - | | (8,6)T | (8,6)T | (8,6)T |

Figura 4: Resolución para el caso en que $\lambda = 2$

| lambda = 3 | Nodo / It | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | (0,-)P | (0,-)P | (0,-)P | (0,-)P | (0,-) |
| | 2 | (4,3)T | (4,3)P | (4,3)P | (4,3)P | (4,3)P |
| | 3 | (3,1)P | (3,1)P | (3,1)P | (3,1)P | (3,1)P |
| | 4 | (1,1)P | (1,1)P | (1,1)P | (1,1)P | (1,1)P |
| | 5 | (8,3)T | (8,3)T | (8,3)T | (8,3)T | (8,3)P |
| | 6 | (6,4)T | (6,4)T | (6,4)T | (6,4)P | (6,4)P |
| | 7 | (5,3)T | (5,3)T | (5,3)P | (5,3)P | (5,3)P |
| | 8 | - | - | (11,7)T | (9,6)T | (9,6)T |

Figura 5: Resolución para el caso en que $\lambda = 3$

**Parte B (10 puntos)**

Para el siguiente problema $\mathcal{NL}$),

$$\mathcal{NL}) \quad \begin{array}{ll} \min & x_1^2 - x_2 \\ \text{s.a.} & x_1^2 + 9\left(x_2 - 1\right)^2 \leq 9 \\ & x_1 \geq 0 \end{array}$$

a) (**2 puntos**) Grafique el conjunto de soluciones factibles de $\mathcal{NL}$).

*Respuesta:* La Figura 7 representa el conjunto de soluciones factibles de $\mathcal{NL}$).

b) (**2 puntos**) Escriba las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para $\mathcal{NL}$).

*Respuesta:* Las condiciones de KKT quedan como sigue, o de una forma equivalente si se considera $x_1 \geq 0$ como una restricción adicional, y no como una de cota inferior.

$$\begin{array}{rcl} 2x_1\left(1+\lambda\right) & \geq & 0 \\ 2x_1^2\left(1+\lambda\right) & = & 0 \\ -1 + 18\lambda\left(x_2 - 1\right) & = & 0 \\ \lambda\left(x_1^2 + 9\left(x_2 - 1\right)^2 - 9\right) & = & 0 \\ x_1^2 + 9\left(x_2 - 1\right)^2 & \leq & 9 \\ x_1 & \geq & 0 \\ \lambda & \geq & 0 \end{array}$$

c) (**3 puntos**) Encuentre los puntos estacionarios regulares de $\mathcal{NL}$).

| lambda ≥ 4 | Nodo / It | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | (0,-)P | (0,-)P | (0,-)P | (0,-)P | (0,-)P |
| | 2 | (4,3)T | (4,3)P | (4,3)P | (4,3)P | (4,3)P |
| | 3 | (3,1)P | (3,1)P | (3,1)P | (3,1)P | (3,1)P |
| | 4 | (1,1)P | (1,1)P | (1,1)P | (1,1)P | (1,1)P |
| | 5 | (8,3)T | (8,3)T | (8,3)T | (8,3)T | (8,3)P |
| | 6 | (6,4)T | (6,4)T | (6,4)T | (6,4)P | (6,4)P |
| | 7 | (5,3)T | (5,3)T | (5,3)P | (5,3)P | (5,3)P |
| | 8 | - | - | (11,7)T | (9,6)T | (9,6)T |

Figura 6: Resolución para el caso en que $\lambda \geq 4$

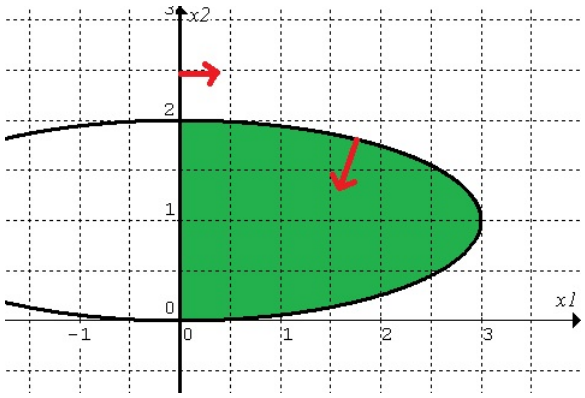



Figura 7: Conjunto de soluciones factibles de $\mathcal{NL}$).

*Respuesta:* De la segunda condición se ven dos casos. El primero, $\lambda = -1$, es infactible. El otro, $x_1 = 0$ entrega las siguientes condiciones,

$$\begin{aligned} -1 + 18\lambda\,(x_2 - 1) &= 0 \\ \lambda\left[(x_2-1)^2 - 1\right] &= 0 \\ (x_2-1)^2 &\leq 1 \\ x_1 &\geq 0 \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

Que a su vez lleva a evaluar dos casos: si $\lambda = 0$, las condiciones son imposibles; si $(x_2-1)^2 = 1$, entonces se tiene que $x_2 = 0$ o bien $x_2 = 2$, donde se tiene que $\lambda = -\frac{1}{18}$ o bien $\lambda = \frac{1}{18}$. Es decir, el único punto que satisface las condiciones de KKT es $(0, 2)$, cuyo multiplicador asociado es $\lambda = \frac{1}{18}$.

d) (**2 puntos**) Caracterice los puntos obtenidos en c).

*Respuesta:* La matriz Hessiana en función de las variables originales es,

$$Hf\,(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2\,(1+\lambda) & 0 \\ 0 & 18\lambda \end{pmatrix}$$

Al reemplazar $(x, y, \lambda) = \left(0, 2, \frac{1}{18}\right)$, se observa que ésta es definida positiva, por lo que el punto encontrado en c) es un mínimo local.

e) (**1 punto**) Aproximadamente, ¿en cuánto cambiaría el valor la función objetivo, si el lado derecho de la restricción no lineal aumenta en $0,03$ unidades, para los puntos obtenidos en c)?

*Respuesta:* Dado que el multiplicador entrega el cambio aproximado unitario en el objetivo si al variar el lado derecho de una restricción, en este caso el objetivo cambiaría en $0,03 \cdot \frac{1}{18} \approx 0,001\bar{6}$ unidades.

## Pregunta 3 (20 puntos)

El problema de comprador viajero (TPP, por sus iniciales en inglés) es una generalización interesante del problema del vendedor viajero (TSP). Puede definirse sobre un grafo dirigido $G(N, A)$, donde el conjunto de nodos $N$ corresponde a la casa del comprador y los mercados que el comprador puede visitar, mientras que el conjunto de arcos $A$ representa los caminos directos entre estos lugares.

Se busca encontrar el recorrido de costo total mínimo, que un único comprador debe realizar para adquirir $m$ productos distintos de entre $n = |N|(\geq m)$ mercados posibles, empezando y terminando en su casa, que se ubica en el nodo $O$ del grafo.

El costo total se divide en los costos de transporte y de compra. Los de transporte se representan mediante $c_{ij}$, que corresponde al costo de moverse desde $i \in N$ a $j \in N$, con $(i, j) \in A$. Los de compra dependen del mercado. Sean $B^k$ el conjunto de los mercados donde se encuentra el producto $k \in 1, \ldots, m$, y $P_i^k$ el precio del producto $k \in 1, \ldots, m$ en el mercado $i \in B^k$.

Para este problema,

a) (**15 puntos**) Formule el TPP como un modelo de programación lineal entera, indicando claramente la definición de variables, función objetivo y cada uno de los grupos de restricciones.

*Respuesta:*

- ◇ Variables de decisión
  - $Y_i^k$ : 1, si se compra el producto $k \in 1, \ldots, m$ en el mercado $i \in B^k$; 0, en otro caso. (1.5 puntos)
  - $X_{ij}$ : 1, si el comprador se mueve directamente desde $i \in N$ a $j \in N$, con $(i, j) \in A$. (1.5 puntos)
- ◇ Función objetivo (2 puntos)

$$\text{mín} \sum_{k=1}^{m} \sum_{i \in B^k} P_i^k Y_i^k + \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} X_{ij}$$

- ◇ Restricciones
  - Deben comprarse todos los productos. (1 punto)

$$\sum_{i \in B^k} Y_i^k = 1, \ \forall k \in 1, \ldots, m$$

  - Se debe salir de la casa. (1 punto)

$$\sum_{(O,j) \in A} X_{Oj} = 1$$

- Se debe llegar a la casa. (1 punto)

$$\sum_{(j,O)\in A} X_{jO} = 1$$

- Si se llega a un nodo, se debe salir de él. (2 puntos)

$$\sum_{(i,j)\in A} X_{ij} - \sum_{(j,i)\in A} X_{ji} = 0,\ \forall i \in N$$

- Si no compra en un mercado, no se debe poder llegar ni salir de él. (opcional, 2 puntos si están presentes)

$$\sum_{j\in N:(i,j)\in A} X_{ij} \leq \sum_{k:i\in B^k} Y_i^k,\ \forall i \in N - \{O\}$$
$$\sum_{j\in N:(j,i)\in A} X_{ji} \leq \sum_{k:i\in B^k} Y_i^k,\ \forall i \in N - \{O\}$$

- Si se compra en un mercado, se debe llegar y salir de él. (2 puntos)

$$\sum_{j\in N:(i,j)\in A} X_{ij} \geq Y_i^k,\ \forall k \in 1,\ldots,m,\ \forall i \in B^k$$
$$\sum_{j\in N:(j,i)\in A} X_{ji} \geq Y_i^k,\ \forall k \in 1,\ldots,m,\ \forall i \in B^k$$

- Restricciones de eliminación de subtours (basta mencionar que son requeridas) (2 puntos)
- Dominio de las variables. (1 punto)

$$X_{ij} \in \mathbb{B},\ \forall (i,j) \in A$$
$$Y_i^k \in \mathbb{B},\ \forall k \in 1,\ldots,m,\ \forall i \in B^k$$

b) (**5 puntos**) ¿A qué caso particular del TPP corresponde el problema del vendedor viajero? *Sugerencia:* Recuerde lo que se le exige a una solución factible del TSP.

*Respuesta:* El TSP corresponde a un caso en que se tiene que $m = n$ y $B^k = k, k \in N - \{O\}$.