PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2016
Profesores: A.Cataldo - R.Cuadrado
S.Encina - F.Palominos - J.Vera

Examen

COMPROMISO DEL CÓDIGO DE HONOR

Me comprometo a no entregar ni recibir ayuda indebida en esta evaluación. Esto incluye discutir la evaluación con compañeros que aún no lo han rendido. También declaro que si me percato de que existe fraude de cualquier tipo en esta evaluación, tengo el deber de comunicárselo a los profesores del curso, quienes seguirán los procedimientos establecidos en la reglamentación de la Escuela de Ingeniería y de la Pontificia Universidad Católica de Chile para perseguir y sancionar cualquier acto de deshonestidad académica.

Nombre completo: _____

Firma: _____

Fecha: _____

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2016
Profesores: A.Cataldo - R.Cuadrado
S.Encina - F.Palominos - J.Vera

Examen

Duración: 2 horas y 30 minutos.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***

Pregunta 1 (16 puntos)

Para cada una de las siguientes afirmaciones comente si es verdadera o falsa. Fundamente su respuesta.

(a) (**2 puntos**) En Programación Lineal, si el problema dual es infactible, necesariamente el problema primal es no acotado.

RESPUESTA: Falso, puede darse el caso que ambos sean infactibles.

(b) (**2 puntos**) En un problema de Programación Lineal entera de maximización, si el problema relajado es no acotado, el problema entero también lo es.

RESPUESTA: No necesariamente, por ejemplo el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max} & x+y \\ \text{s.a:} & y = 0{,}5 \end{array}$$

Para el caso relajado la solución óptima es no acotada, cuando x tiende a infinito la función objetivo tiende a infinito. Sin embargo, el problema entero es infactible, ya que todas las soluciones factibles deben pasar por la recta definida en $y = 0{,}5$, por lo que no existiría ninguna solución entera del problema.

(c) (**2 puntos**) Si al iterar hasta el óptimo de un problema de minimización, con el método Simplex, existe un costo reducido de una variable no básica con valor igual a 0, necesariamente el problema posee múltiples soluciones óptimas.

RESPUESTA: No necesariamente, se puede dar el caso que justo en ese vértice se de una situación de degenerancia que involucre a la variable con costo reducido negativo. Con lo cual, en este caso no existiría una solución múltiple, en donde esta seguiría siendo el mismo punto en el espacio, pero que ahora se describiría por una nueva base.

(d) (**2 puntos**) En un problema de programación entera, si se cumplen las condiciones de regularidad, necesariamente la solución óptima debe cumplir las condiciones de KKT.

RESPUESTA: Falso, en un problema de programación entera el óptimo no necesariamente debe cumplir con las condiciones de KKT. Esto es porque la especificación "entero" generalmente no se ponen como restricción algebraica y si se pusiera (por ejemplo con una restricción $x(1-x) =$, aunque se pueda esribir KKT, esta no servirá de nada.

(e) (**2 puntos**) En un problema no lineal, si un punto cumple con las condiciones de KKT, necesariamente este punto es solución óptima del problema.

RESPUESTA: Falso, si el problema no es convexo, el punto KKT descrito puede tratarse de un mínimo local o también de un punto silla.

(f) (**2 puntos**) En un problema de flujo máximo, si existe un corte con capacidad finita, necesariamente el problema posee solución óptima diferente a infinito.

RESPUESTA: Verdadero, el teorema de Ford-Fulkerson nos demuestre que todo corte es una cota respecto del flujo máximo del grafo. Por ende, al existir un corte con capacidad finita inmediatamente se descarta que el problema pueda ser no acotado.

(g) (**2 puntos**) Considere un problema de programación lineal de la forma:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ \text{s.a.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Si la matriz A es unimodular, necesariamente cada una de las iteraciones del algoritmo Simplex corresponderán a soluciones enteras.

RESPUESTA: Falso, en particular si el el valor de los coeficientes b no corresponden a valores enteros, esta situación no se estaría cumpliendo.

(h) (**2 puntos**) Considere un problema de la forma mín $f(x)$. El método de Newton siempre llegará a una solución (dentro de un tolerancia establecida) de este problema en menor tiempo que el método del gradiente.

RESPUESTA: FALSO ya que el tiempo depende de la combinación entre el número de iteraciones y el tiempo por iteración y, si bien es verdad que Newton podría hacer muchas menos iteraciones, cada uno puede ser muy cara debido a la necesidad de invertir el Hessiano.

Pregunta 2 (14 puntos)

(a) (**4 puntos**)

(i) (**2 puntos**) Considere un problema de minimización con restricciones de desigualdad. Sea x^* la solución óptima del problema. Las condiciones de holgura complementaria establecen que si una restricción es activa en el punto x^* entonces el correspondiente multiplicador de Lagrange es no nulo, e inversamente, si una restricción no es activa en el punto x^*, entonces el correspondiente multiplicador de Lagrange es nulo. ¿Es válida esta afirmación? Fundamente su respuesta.

RESPUESTA: La segunda parte de la frase es verdadera, es decir, si una restricción no es activa entonces el multiplicador de Lagrange correspondiente es nulo. Sin embargo, la primera parte de la frase es falsa, ya que una restricción puede ser activa y tener un multiplicador igual a cero

(ii) (**2 puntos**) Considere una red $G(N, A)$, donde N es el conjunto de nodos y A es el conjunto de arcos, que posee más de un corte mínimo. Demuestre que si se reemplazan las capacidades u_{ij} de la red original, para los arcos $(i, j) \in A$, por capacidades definidas como $\mu_{ij} = mu_{ij} + 1$, donde m es el número de arcos de la red, el corte mínimo respecto de las capacidad μ_{ij} es un corte mínimo con respecto a las capacidad u_{ij} (ambos sobre la misma red $G(N, A)$) pero que contiene el menor número de arcos posibles.

RESPUESTA: Sean C y C' dos cortes mínimos respecto a las capacidades u_{ij} y μ_{ij}. Para cualquier corte $\bar{C}$, de estos costos mínimo, se puede definir:

$$U(\bar{C}) = \sum_{(i,j)\in\bar{C}} u_{ij} \qquad y \qquad \Lambda(\bar{C}) = \sum_{(i,j)\in\bar{C}} \mu_{ij}$$

y se tiene que: $\Lambda(\bar{C}) = mU(\bar{C}) + |\bar{C}|$.
Entonces, se debe probar que C' es también corte mínimo para las capacidades u_{ij} y que es el corte con el menor número de arcos.
Se tiene que:

$$(C') = \frac{1}{m}\Lambda(C') - \frac{|C'|}{m}$$

y por optimalidad de C' se tiene que:

$$\Lambda(C') \leq \Lambda(\bar{C}), \quad \forall \text{ que sea corte mínimo del problema original}$$

Por lo tanto,

$$U(C') \leq \frac{1}{m}\Lambda(\bar{C}) - \frac{|C'|}{m}, \quad \forall \text{ que sea corte mínimo del problema original}$$

$$\Rightarrow U(C') \leq U(\bar{C}) - \frac{|\bar{C}| - |C'|}{m}, \quad \forall \text{ que sea corte mínimo del problema original}$$

además, se sabe que cualquier corte posee al menos un arco y a lo más m, por lo tanto $|\bar{C}| - |C'| \leq m - 1$.
Entonces:

$$U(C') \leq U(\bar{C}) + \frac{m-1}{m}, \quad \forall \text{ que sea corte mínimo del problema original}$$

y por integralidad de las capacidades y puesto que $0 < 1 - \frac{1}{m} < 1$ se tiene:

$$U(C') \leq U(\bar{C}), \quad \forall \text{ que sea corte mínimo del problema original}$$

lo que significa que C' también es un corte mínimo para las capacidad u_{ij}.
Ahora se debe probar que este corte es el que tiene el menor número de arcos. De lo anterior se tiene que:

$$U(C') \leq U(\bar{C}) + \frac{|\bar{C}| - |C'|}{m}, \quad \forall \text{ que sea corte mínimo del problema original}$$

y por optimalidad se tiene que $U(C) \leq U(C') \leq U(\bar{C}) + \frac{|\bar{C}|-|C'|}{m}$, en particular se debe cumplir para $\bar{C} = C$, y se tiene:

$$U(C) \leq U(C) + \frac{|C| - |C'|}{m}$$

y entonces se puede concluir que $|C| \geq |C'|$. Por lo tanto, un corte C' mínimo con respecto a las capacidades μ_{ij} tendrá siempre un número de arcos menor o igual que cualquier corte C mínimo con respecto a las capacidades u_{ij}.

En forma alternativa, se puede argumentar a través del dual del problema de programación lineal correspondiente al problema de flujo máximo. Este dual corresponde al problema de corte mínimo y tiene función objetivo

$$\sum_{(i,j)\in A} y_{ij}u_{ij}$$

donde y_{ij} son las variables que seleccionan los arcos del corte. Al hacer el cambio de capacidades, sólo cambia esta función objetivo, y cambia a:

$$m \sum_{(i,j)\in A} y_{ij}u_{ij} + \sum_{(i,j)\in A} y_{ij}$$

que lo que hace precisamente es determinar el corte de menor capacidad pero con el menor número de elementos.

(b) (**10 puntos**) Considere el siguiente problema de Optimización Lineal:

$$P) \quad \begin{array}{lll} \text{mín} & 3x_1 - 2x_2 & \\ \text{s.a.} & -3x_1 + x_2 & \leq 1 \\ & -2x_1 + 2x_2 & \leq 3 \\ & x_1 + 3x_2 & \leq 15 \\ & x_1 \ , \ x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Este problema es llevado a la forma estándar agregando tres variables: x_3, x_4 y x_5 a la primera, segunda y tercera restricción respectivamente. El problema es resuelto mediante el Algoritmo Simplex y se obtiene una solución óptima donde las variables básicas son x_1, x_2 y x_5. De esta manera, la base en el óptimo es:

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

cuya inversa es:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 & 0 \\ -1/2 & 3/4 & 0 \\ 2 & -5/2 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) (**2 puntos**) Escriba el dual del problema P) (el original, no el de la forma estándar).

RESPUESTA: El dual es:

$$D) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & -y_1 - 3y_2 - 15y_3 \\ s.a. & 3y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 3 \\ & -y_1 - y_2 - 3y_3 \leq -2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array} \quad \text{que es equivalente a} \quad D) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & y_1 + 3y_2 + 15y_3 \\ s.a. & -3y_1 - 2y_2 + y_3 \leq 3 \\ & y_1 + y_2 + 3y_3 \leq -2 \\ & y_1, y_2, y_3 \leq 0 \end{array}$$

(ii) (**3 puntos**) Calcule la solución óptima primal y, luego, usando propiedades de dualidad determine la solución óptima dual. Justifique con precisión sus cálculos.

RESPUESTA: La solución óptima primal es $B^{-1}b$, en este caso eso es:

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 & 0 \\ -1/2 & 3/4 & 0 \\ 2 & -5/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 7/4 \\ 19/2 \end{pmatrix}$$

La solución dual se obtiene de darse cuenta que $y_3 = 0$, por holguras complementarias y las dos restricciones se cumplen en igualdad, también por lo mismo. Esto lleva al sistema

$$\begin{array}{ll} 3y_1 + 2y_2 & = 3 \\ -y_1 - y_2 & = -2 \end{array}$$

cuya solución es $y_1 = 1/2$, $y_2 = 3/4$.
Equivalentemente, si se considera el dual de la derecha de la parte (i), se tiene:

$$\begin{array}{ll} -3y_1 - 2y_2 & = 3 \\ y_1 + y_2 & = -2 \end{array}$$

cuya solución es $y_1 = -1/2$, $y_2 = -3/4$.

(iii) (**2 puntos**) ¿En cuánto puede disminuir el lado derecho de la tercera restricción sin que se vea afectada la solución óptima?

RESPUESTA: La tercera restricción no es activa y tiene holgura igual a 19/2. En eso exactamente es que puede disminuir.

(iv) (**3 puntos**) Suponga que se agrega una variable adicional al problema, que llamaremos x_6, que también debe ser ≥ 0, y cuyos coeficientes en cada una de las restricciones son $(2, 0, 1)$ respectivamente, y el costo en la función objetivo es $c_6 = 1$. Determine si acaso conviene o no usar esta nueva variable para la optimización del problema y, en caso de ser así, haga una iteración del algoritmo Simplex. En caso de no ser así, ¿hay alguna característica especial de la solución obtenida ahora en las 6 variables?

RESPUESTA: Tenemos que calcular el costo reducido de la nueva variables, que es igual a $\bar{c}_6 = c_6 - \pi^T A_6$. En este caso, esto es igual a:

$$\bar{c}_6 = 1 - (1/2) \times 2 - (3/4) \times 0 - 0 \times 1 = 1 - 1 = 0$$

Es decir, el costo reducido es nulo. Esto, sin embargo, es un indicador de que, usando la nueva variable, podrían haber soluciones alternativas.

Pregunta 3 (16 puntos)

(a) (**8 puntos**) Considere una red representada por el grafo $G(N, A)$, donde N es el conjunto de nodos y A es el conjunto de arcos. Sea c_{ij} el costo de usar el arco $(i, j) \in A$, donde alguno de estos números pueden ser negativos, pero asuma que no existen ciclos de costo negativo en la red. Suponga conocidos los costos de las rutas mínimas para ir de un nodo s a todos los nodos de la red, lo que denotaremos por $d_i^s, \forall i \in N$. Considere el problema de calcular las rutas mínimas desde otro nodo $h \in N, h \neq s$ al resto de los nodos de la red. Para resolver este problema se propone la siguiente modificación en los costos:

$$c_{ij}^s = c_{ij} + d_i^s - d_j^s, \quad \forall (i, j) \in A$$

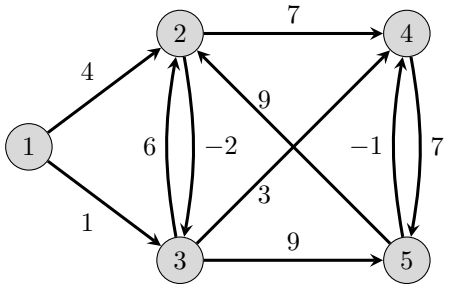
(i) (**4 puntos**) Pruebe que al resolver el problema con los costos modificados se obtienen exactamente las mismas rutas mínimas que se hubieran obtenido considerando los costos originales.

RESPUESTA: Supongamos que conocemos un camino a mínimo costo para ir desde el nodo i al nodo j. Digamos que este camino es tal que la ruta se describe como $p = i_0 = i, i_1, \ldots, i_{k-1}, i_k = j$. Calculamos el costo modificado de la ruta p entre los nodos i y j:

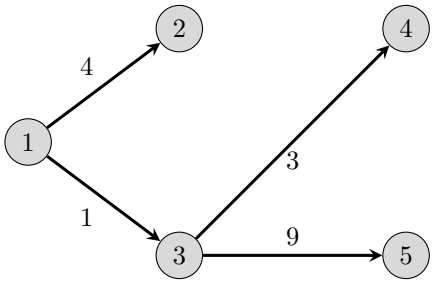
$$\begin{aligned} C^s(p) &= \sum_{e=0}^{k-1} c_{i_e i_{e+1}}^s = \sum_{e=0}^{k-1} \left(c_{i_e i_{e+1}} + d_{i_e}^s - d_{i_{e+1}}^s \right) \\ &= \sum_{e=0}^{k-1} c_{i_e i_{e+1}} + \sum_{e=0}^{k-1} \left(d_{i_e}^s - d_{i_{e+1}}^s \right) \\ &= C(p) + d_i^s - d_j^s \end{aligned}$$

Luego, se prueba que encontrar el camino más corto con los costos modificados es lo mismo que con los costos originales más una constante que dependerá de los nodos que están en el extremo de la ruta escogida y no de la ruta escogida propiamente tal.

Ahora, considere la siguiente red en la que sobre cada arco aparece el costo de recorrerlo.

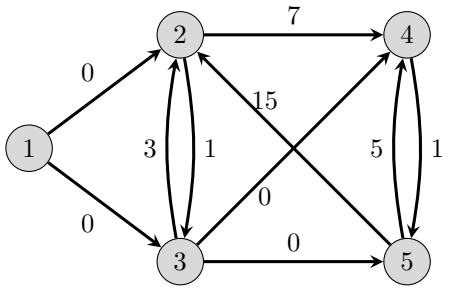


(ii) (**1 punto**) Obtenga visualmente la ruta mínima desde el nodo 1 a los demás nodos de la red.
RESPUESTA: Visualmente el siguiente es el árbol de rutas mínimas:



(iii) (**3 puntos**) Reformule los costos de la red y aplique el algoritmo de Dijkstra a la red con los costos modificados para encontrar la ruta mínima desde el nodo 2 a los demás nodos de la red. (Ind: esta parte puede hacerse aún si no ha demostrado lo propuesto en i)).

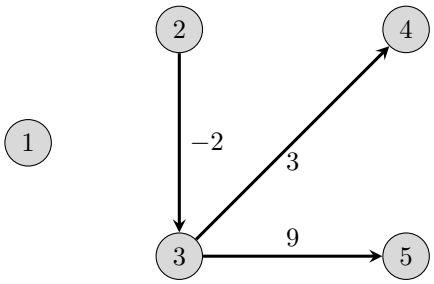
RESPUESTA: El grafo con los costos modificados queda:



La siguientes es la tabla resumen de la ejecución del algoritmo de Dijkstra:

i	It. 0	It. 1	It. 2	It. 3	It. 4	It. 5
1	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
2	(0,2)	(0,2)				
3	$(\infty, -)$	(1,2)	(1,2)			
4	$(\infty, -)$	(7,2)	(1,3)	(1,3)		
5	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	(1,3)	(1,3)	(1,3)	
V	$\emptyset$	2	2,3	2,3,4	2,3,4,5	2,3,4,5,1

Que da el siguiente árbol:



(b) (**8 puntos**) Para el siguiente problema no lineal:

$$
P) \quad \begin{array}{lrcl} \max & x^2 & + & y^2 \\ \text{s.a:} & x & \leq & 1 \\ & x & \geq & -1 \\ & y & \leq & 1 \\ & y & \geq & -1 \end{array}
$$

(i) (**6 puntos**) Encuentre todos los puntos críticos (o puntos estacionarios, es decir, puntos donde puede cumplirse KKT), sus multiplicadores asociados y valor de la función objetivo en dichos

puntos. Además, indique a qué corresponden para el problema P) (mínimo local, máximo global, punto de silla, etc.).

RESPUESTA: El lagrangeano del problema es:

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = x^2 + y^2 + \lambda_1(x-1) + \lambda_2(-x-1) + \lambda_3(y-1) + \lambda_4(-y-1)$$

Luego las condiciones de holguras complementarias son:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1(x-1) = 0 & [1] \\ \lambda_2(-x-1) = 0 & [2] \\ \lambda_3(y-1) = 0 & [3] \\ \lambda_4(-y-1) = 0 & [4] \end{array}$$

Con lo que obtenemos 16 escenarios, dependiendo de los valores de los lambdas.

Por otra parte, las condiciones estacionarias son:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \qquad [5]$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \qquad [6]$$

De [1] y [2], obtengo que los escenarios en que $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 \neq 0$ son infactibles. Asimismo, de [3] y [4], obtengo que los escenarios en que $\lambda_3 \neq 0$ y $\lambda_4 \neq 0$ son infactibles. Por lo que se descartan 7 escenarios.

Luego los escenarios validos son:

Escenario 1: con $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0$ tenemos que $x = 0$ y que $y = 0$

Escenario 2: con $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 \neq 0$ tenemos que:

De [1], obtenemos que $x = 1$ y de [5] obtenemos que $\lambda_1 = -2$ De [4], obtenemos que $y = -1$ y de [6] obtenemos que $\lambda_4 = -2$

Escenario 3: $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \neq 0, \lambda_4 = 0$ tenemos que:

De [1], obtenemos que $x = 1$ y de [5] obtenemos que $\lambda_1 = -2$ De [3], obtenemos que $y = 1$ y de [6] obtenemos que $\lambda_3 = -2$

Escenario 4: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0, \lambda_4 = 0$ tenemos que:

De [2], obtenemos que $x = -1$ y de [5] obtenemos que $\lambda_2 = -2$ De [3], obtenemos que $y = 1$ y de [6] obtenemos que $\lambda_3 = -2$

Escenario 5: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 \neq 0$ tenemos que:

De [2], obtenemos que $x = -1$ y de [5] obtenemos que $\lambda_2 = -2$ De [4], obtenemos que $y = -1$ y de [6] obtenemos que $\lambda_4 = -2$

Escenario 6: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \neq 0, \lambda_4 = 0$ tenemos que:

De [5] obtenemos que $x = 0$ De [3], obtenemos que $y = 1$ y de [6] obtenemos que $\lambda_3 = -2$

Escenario 7: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 \neq 0$ tenemos que:

De [5] obtenemos que $x = 0$ De [4], obtenemos que $y = -1$ y de [6] obtenemos que $\lambda_4 = -2$

Escenario 8: $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0$ tenemos que:

De [1], obtenemos que $x = 1$ y de [5] obtenemos que $\lambda_1 = -2$ De [6] obtenemos que $y = 0$

Escenario 9: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0$ tenemos que:

De [2], obtenemos que $x = -1$ y de [5] obtenemos que $\lambda_2 = -2$ De [6] obtenemos que $y = 0$

Luego, los puntos estacionarios encontrados podemos resumirlos en la siguiente tabla:

Escenario	(x, y)	$f(x, y)$	$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$	Tipo
1	$(0, 0)$	0	$(0, 0, 0, 0)$	Mínimo Global
2	$(1, -1)$	2	$(-2, 0, 0, -2)$	Máximo Global
3	$(1, 1)$	2	$(-2, 0, -2, 0)$	Máximo Global
4	$(-1, 1)$	2	$(0, -2, -2, 0)$	Máximo Global
5	$(-1, -1)$	2	$(0, -2, 0, -2)$	Máximo Global
6	$(0, 1)$	1	$(0, 0, -2, 0)$	Punto de Silla
7	$(0, -1)$	1	$(0, 0, 0, -2)$	Punto de Silla
8	$(1, 0)$	1	$(-2, 0, 0, 0)$	Punto de Silla
9	$(-1, 0)$	1	$(0, -2, 0, 0)$	Punto de Silla

Cabe destacar que los puntos de silla, son porque en esos puntos existen direcciones factibles en las que me puedo mover a puntos en las cercanías en que puedo mejorar la función objetivo y existen otras que la empeoran. Por ejemplo en el punto $(0, 1)$, puedo moverme hacia $(1, 1)$ o $(-1, 1)$ y mejorar la función objetivo, pero si me muevo hacia el punto $(0, 0)$, la empeoro.

Nota a la corrección: Este problema presenta mucha simetría. Es perfectamente válido desarrollar uno de los vértices y uno de los puntos tangentes y decir que todos los otros son análogos, lo cual es evidentemente cierto. Entonces, no es necesario presentar el detalle de todos los escenarios. El punto $(0, 0)$ sí debiera estar incluido. También es totalmente válido hacer todo apoyado en un gráfico, como muchos deben haberlo hecho.

(ii) (**2 puntos**) Si el problema P) fuera irrestricto, ¿tendría solución? Y si fuera irrestricto y de minimización, ¿tendría solución? Justifique con precisión.

RESPUESTA: Si el problema P) fuera irrestricto no tendría solución porque sería un problema no acotado y siempre podría encontrar un punto que mejore mi función objetivo. Por otra parte, si fuera de minimización e irrestricto, el problema sería acotado y encontraríamos el mínimo global en el punto $(0, 0)$.

Pregunta 4 (15 puntos)

La Asociación Nacional de Fútbol de Amigos está organizando un campeonato nacional en el que participarán I equipos. Dada la alta cantidad de equipos inscritos, los organizadores del torneo se han convencido que no podrán jugar todos contra todos, así que han definido arbitrariamente los partidos que se jugarán. Esta información se encuentra disponible en el parámetro α_{ij}, que tiene valor 1 si el partido entre el equipo i y el equipo j se deberá jugar, y 0 en caso de que no sea así.

Este torneo se realizará en el complejo deportivo de la asociación durante T días seguidos en las próximas vacaciones de invierno. Se sabe que la capacidad de esas instalaciones permite disputar un máximo de Q partidos por día.

Los organizadores del torneo desean que éste posea equidad deportiva, la que consiste en que un equipo juega a lo más un partido por día y que, para todo día t, la cantidad de partidos que cada equipo tiene programados desde el día 1 al día t, nunca tiene una diferencia de más de dos partidos con la cantidad de partidos programados hasta ese mismo día para cualquier otro equipo.

(a) (**10 puntos**) Basándose en la información anterior, construya un modelo de programación lineal entera que permita a los organizadores del torneo programar todos los partidos que se jugarán dentro de esos T días. Esta programación debe asegurar que se respetan todas las condiciones antes descritas con el menor número de días sin ningún partido programado.

RESPUESTA: Se definen las siguientes variables:

x_{ij}^t : variable binaria que toma valor 1 si el partido entre los equipos $i \in I$ y $j \in I$ con $i \neq j$ se programa para el día $t \in T$.

N_i^t : variable entera que indica la cantidad de partidos que se han programado para el equipo $i \in I$ has (inclusive) el día $t \in T$.

y^t : variable binaria que toma valor 1 si el día $t \in T$ no hay programado al menos un partido.

Función objetivo: Min $\sum_{t=1}^{T} y^t$

Restricciones:

(R1) Cada partido que se debe jugar se debe programar en exactamente una fecha. Dada la definición de la variable se necesita ver el caso en que i es local o j es local (asumiendo que $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$).

$$\sum_{t=1}^{T} x_{ij}^t + \sum_{t=1}^{T} x_{ji}^t = \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{2} \quad \forall i, j \in I : i \neq j.$$

(R2) No asignar más partidos a un día que la capacidad del complejo deportivo.

$$\sum_{i,j \in I : i \neq j} x_{ij}^t \leq Q \quad \forall t = 1, \ldots, T.$$

(R3) Calcular la cantidad de partidos que programados para cada equipo hasta el día t (inclusive).

$$N_i^t = \sum_{\theta=1}^{\theta} \sum_{j \in I : j \neq i} x_{ij}^{\theta} + \sum_{\theta=1}^{t} \sum_{j \in I : j \neq i} x_{ji}^t \quad \forall i \in I; t = 1, \ldots, T.$$

(R4) Garantizar que la diferencia de la cantidad de partidos programados hasta ese mismo día para cualquier par de equipos nunca es de más de dos partidos.

$$N_i^t - N_j^t \leq 2 \quad \forall i, j \in I : i \neq j; t = 1, \ldots, T.$$
$$N_i^t - N_j^t \geq -2 \quad \forall i, j \in I : i \neq j; t = 1, \ldots, T.$$

(R5) Construir variable y^t.

$$y^t \geq \frac{\sum_{i,j \in I : i \neq j} x_{ij}^t}{M} \quad \forall t = 1, \ldots, T.$$

con $M \ggg 0$ $\left(\text{específicamente para este caso se puede usar } M = \sum_{i,j \in I : i \neq j} \alpha_{ij}\right)$.

$$y^t \leq \sum_{i,j \in I : i \neq j} x_{ij}^t \quad \forall t = 1, \ldots, T.$$

(R6) Asegurar que cada partido que se debe jugar se programe a lo más una vez en los T días.

$$\sum_{j \in I : j \neq i} x_{ij}^t + \sum_{j \in I : j \neq i} x_{ji}^t \leq 1 \quad \forall i \in I; t = 1, \ldots, T.$$

(R7) Naturaleza de las variables.

$$x_{ij}^t \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in I : i \neq j; t = 1, \ldots, T.$$
$$N_i^t \in \mathbb{Z}_0^+ \quad \forall i \in I; t = 1, \ldots, T.$$
$$y^t \in \{0, 1\} \quad \forall t = 1, \ldots, T.$$

Lo que viene a continuación debe analizarse en forma independiente a su desarrollo de modelo de a).

Ahora, la organización del torneo, de manera más ambiciosa, ha decidido que quiere programar también qué partidos se deben jugar. Para eso, ha definido la variable binaria η_{ij}^t que toma valor 1 si el partido entre los equipos i y j se programa para el día t. Con esta definición, ha construido el siguiente modelo preliminar:

Función Objetivo: $\text{Maximizar} \sum_{t=1}^{T} \gamma^t + (T+1) \sum_{t=1}^{T} \lambda^t$

Restricción 1: $\gamma^t + \lambda^t \leq 1 \quad \forall t = 1, \ldots, T.$

Restricción 2: $\gamma^t \leq \sum_{(ij):(ij) \in SC} \eta_{ij}^t \quad \forall t = 1, \ldots, T.$

Restricción 3: $\lambda^t \leq \sum_{(ij):(ij) \in C} \eta_{ij}^t \quad \forall t = 1, \ldots, T.$

donde γ^t es una variable binaria que toma valor 1 si el día t tiene programado al menos un superclásico, λ^t es una variable binaria que toma valor 1 si el día t tiene programado al menos un clásico, SC es el conjunto de todos los pares de equipos que son rivales superclásicos, y C es el conjunto de todos los pares de equipo que son rivales clásicos.

(b) (**5 puntos**) Basándose en la información anterior, explique detalladamente qué representan la función objetivo y las tres restricciones que le ha mostrado la organización del torneo.

RESPUESTA: La explicación de cada expresión es:

Función Objetivo: Evidentemente la función objetivo busca maximizar la cantidad de fechas con superclásicos y clásicos programadas. Ahora, más detalladamente, se observa que la función se preocupa de que una fecha con un clásico es más importante que cualquier fecha con superclásicos, lo que implica que es más importante programar clásicos (que será el objetivo principal) que superclásicos (que será un objetivo secundario).

Restricción 1: Asegura que una fecha cualquiera puede ser considerada o como fecha con superclásico o con clásico, no como ambas.

Restricción 2: Permite construir adecuadamente la variable γ^t en función de la variable de programación de partidos. Asegura que en toda fecha en la que no se encuentre al menos un partido de superclásico (la condición dentro de la sumatoria lo asegura:$(ij) : (ij) \in SC$), no se podrá contar esa fecha como una fecha de superclásico.

Restricción 3: Similar a la anterior. Permite construir adecuadamente la variable λ^t en función de la variable de programación de partidos. Asegura que en toda fecha en la que no se encuentre al menos un partido clásico (la condición dentro de la sumatoria lo asegura:$(ij) : (ij) \in C$), no se podrá contar esa fecha como una fecha de clásico.