FACULTAD DE INGENIERÍA
Departamento de Industrias
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Curso: Optimización
Semestre: Primavera 2010
Profesor: Alejandro Cataldo C.
Auxiliar: Mauricio Varas V.

Pauta Examen

Duración: 3 horas.

Pregunta 1 (20 %)

Cada una de las cinco partes de esta pregunta vale lo mismo, y es independiente de las otras.

Parte A

Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & f(x,y) = xy \qquad (\mathcal{P}) \\ s.a: & \\ & x^2 + y^2 \leq 4 \\ & (x+1)^2 + (y-2)^2 \geq 4 \\ & x - y \leq 2 \end{array}$$

a) (1.0 punto) Determine si la función f es convexa.

b) (1.0 punto) Determine gráficamente el conjunto de puntos factibles. Justifique si este conjunto es convexo.

c) (1.0 punto) Establezca las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

d) (2.0 punto) Verifique si las condiciones se cumplen en los siguiente puntos: $(\sqrt{2}-2, 2-\sqrt{2})$, $(1,-1)$ y $(0,2)$.

e) (1.0 punto) Determine cuáles de estos puntos pueden ser óptimos globales del problema.

Pauta Parte A

a) Para determinar si la función f es convexa, se debe verificar que el hessiano de f sea semidefinido positivo. El hessiano queda:

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

que claramente no es semidefinido positivo, y entonces, f no es convexa.

b) Gráficamente se observa el siguiente espacio de soluciones factibles:

Claramente se observa que el conjunto de soluciones factibles no es convexo. Basta con mirar los puntos $(-2,0)$ y $(0,2)$, que son factibles, pero donde es claro que el trazo que los une no pertenece al conjunto de soluciones factibles.

c) El problema anterior es equivalente a:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & -xy \qquad (\bar{\mathcal{P}}) \\ s.a: & \\ & x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \\ & 4 - (x+1)^2 - (y-2)^2 \leq 0 \\ & x - y - 2 \leq 0 \end{array}$$

de donde las condiciones de KKT son:

$$\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} -2(x+1) \\ -2(y-2) \end{bmatrix} + \mu_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

y las condiciones:

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0$$

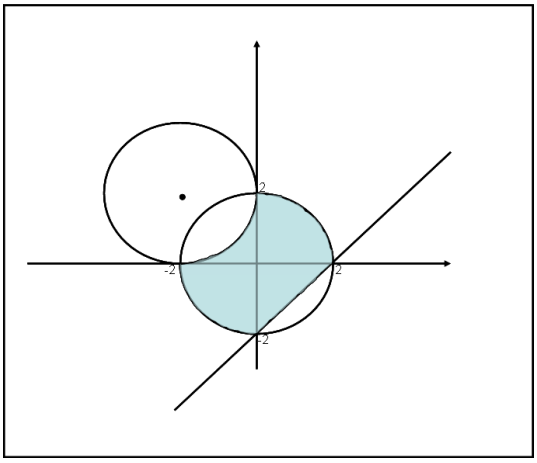


Figura 1: Gráfico del problema

$$\mu_1(x^2+y^2-4)=0$$
$$\mu_2\left(4-(x+1)^2-(y-2)^2\right)=0$$
$$\mu_3(x-y-2)=0$$

d) Evaluemos:

- ◇ Punto $(\sqrt{2}-2, 2-\sqrt{2})$:
  En este caso es fácil ver que el punto no cumple con la restricción 2. Se tiene que $4-(x+1)^2-(y-2)^2 = 2\sqrt{2}-1 > 0$ que claramente no satisface la restricción, luego, no es siquiera factible.
- ◇ Punto $(1,-1)$:
  En este caso la única restricción activa es $x-y-2=0 \Rightarrow \mu_1=\mu_2=0$
  Donde:
  $$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$
  de donde $\mu_3 = -1 \leq 0$, luego no cumple con las condiciones de KKT.
- ◇ Punto $(0,2)$:
  En este caso las restricciones activas son $x^2+y^2-4=0$ y $x-y-2=0 \Rightarrow \mu_3=0$
  Donde:
  $$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$
  de donde $\mu_1 = 0 \geq 0$ y $\mu_2 = -\frac{1}{2} \leq 0$, luego tampoco cumple con las condiciones de KKT.

e) Como se pudo apreciar ninguno de los dos puntos factibles que se evaluaron cumple con las condiciones de KKT. Luego, ninguno de ellos es candidato a óptimo del problema.

Parte B

Responda brevemente las siguientes preguntas:

a) (1.5 punto) Suponga que se debe resolver un problema de programación no lineal sin restricciones y para ello se opta por aplicar primero el algoritmo del gradiente y luego el algoritmo de Newton. Señale qué ventaja tiene este procedimiento frente a la alternativa de aplicar sólo el algoritmo del gradiente y sólo el algoritmo de Newton.

b) (1.5 puntos) Se tiene un problema de programación lineal en donde x_s es no restringida en signo. Para resolverlo, x_s se reemplaza por $x'_s - x''_s$. Explique si es posible que en la solución óptima se tenga $x'_s > 0$ y $x''_s > 0$.

c) (1.5 puntos) Demuestre que un punto interior del espacio de soluciones factibles no puede ser solución óptima de un problema de programación lineal continua, en el cual no todos los costos asociados a la función objetivo son nulos.

d) (1.5 puntos) Explique si puede o no tener utilidad ocupar el concepto de dualidad para resolver cada uno de los problemas lineales continuos que se van definiendo en el algoritmo de ramificación y acotamiento (Branch and Bound).

Pauta Parte B

a) El algoritmo del gradiente tiene baja convergencia al óptimo y el algoritmo de Newton no da seguridad de orientarse a un mínimo local o global, situación que sí asegura el algoritmo del gradiente. Luego al aplicar gradiente y luego Newton se asegura una correcta orientación y luego una buena convergencia.

b) Es claro que A'_sy A''_s son vectores linealmente dependientes, luego x'_s y x''_s no pueden ser ambas básicas.

c) El óptimo del problema lineal debe cumplir las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. Si un punto es interior, todas las restricciones son no activadas. Luego $\mu_i = 0$ para todo i.

Se tiene que:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0$$
$$\mu_i g_i(x^*) = 0 \qquad \forall\, i.$$

esto no se puede cumplir ya que existe al menos un $c_i > 0$, con lo cual se llega a una contradicción. Luego un punto interior no puede cumplir Karush-Kuhn-Tucker.

d) La afirmación es correcta. Al ramificar los problemas van aumentando en número de restricciones. Sin embargo, los respectivos duales mantienen las restricciones pero aumenta el número de variables, y e general, resulta más fácil resolver problemas con más variables sin aumentar el número de restricciones.

Parte C

Considere el problema de inversión en acciones, definido como:

$$\begin{aligned} &\text{máx} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (P) \\ &s.a: \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \\ &\qquad x_j \geq 0 \qquad \forall\, j = 1, .., n. \end{aligned}$$

donde c_j, a_j representan la utilidad neta y el costo de la adquisición de una acción de la empresa j respectivamente, y b el capital máximo del que usted dispone. Asuma que no se puede comprar más de una acción de la misma empresa.

a) (2.0 puntos) Construya un método -distinto del algoritmo de simplex- que permita obtener la solución óptima del problema de inversión en acciones.

b) (2.0 puntos) Actualmente usted dispone de 75 millones, y ha definido solamente 6 empresas en las que cree razonable comprar acciones. En la siguiente tabla se muestra, para cada empresa, la utilidad neta y el costo de la acción.

Empresa	Utilidad Neta [Millones]	Costo [Millones]
E1	20	30
E2	30	50
E3	25	25
E4	51	60
E5	18	24
E6	26	45

Indique cuánto más dinero puede ganar dado que el mercado le ofrece la posibilidad de comprar una fracción de acción de una empresa, y por lo tanto, no lo obliga a comprar la acción completa.

c) (1.0 punto) Sin utilizar el método de cortes Gomory, construya una desigualdad válida para el problema descrito en la parte b).

d) (1.0 punto) Si su presupuesto aumentará en 1 millón, ¿en acciones de qué empresa lo invertiría y cuánto adicional ganaría por ello?

Pauta Parte C

a) Se ve claramente que el modelo planteado es un problema de mochila-relajada (el mismo de la tarea). Luego, un método que asegura optimalidad es calcular los cuocientes $\frac{c_j}{a_j}$, y ordenarlos y escogerlos de manera de:

- $\diamond$ $x_j^* = 1$ para $j = 1, ..., k-1$.
- $\diamond$ $x_k^* = \frac{b - \sum_{j=1}^{k-1} a_j}{a_k}$
- $\diamond$ $x_j^* = 0$ para $j = k+1, ..., n$.

b) En la siguiente tabla se muestra el valor de los cuocientes:

Empresa	Utilidad Neta [Millones]	Costo [Millones]	$\frac{c_j}{a_j}$
$E1$	20	30	$\frac{20}{30} \cong 0,667$
$E2$	30	50	$\frac{30}{50} = 0,6$
$E3$	25	25	$\frac{25}{25} = 1$
$E4$	51	60	$\frac{51}{60} = 0,85$
$E5$	18	24	$\frac{9}{12} = 0,75$
$E6$	26	45	$\frac{26}{45} \cong 0,577$

Luego, se debe invertir en 1 acción de la empresa $E3$ y en $\frac{5}{6}$ de una acción de $E4$. Esto entrega una utilidad de $25 + \frac{5}{6}51 = 67,5$ millones.

Ahora, si uno al comprar acciones de una empresa estuviera obligado a comprar la acción completa, en ese caso se debe comprar 1 acción de la empresa $E2$ y 1 acción de la empresa $E3$, lo que entrega 55 millones de utilidad, que da una diferencia en las utilidades de 12,5 millones. Para determinar fácilmente esto último, basta con darse cuenta de que no es posible comprar más de 2 acciones completas (el costo de comprar 1 acción en cada una de las 3 empresas con acciones más baratas es $24 + 25 + 30 = 79 > 75$). Luego, se pueden enumerar todos los pares y obtener la combinación óptima.

c) Con base en lo mencionado anteriormente es posible construir una desigualdad válida de manera de asegurar que no se escogerán simultáneamente más de 2 acciones. Una cualquiera puede ser $x_3 + x_5 + x_6 \leq 2$.

d) En este caso, como aún no se completa la inversión en la totalidad de la acción de la empresa $E4$, resulta evidente que este millón adicional se invertirá en $\frac{1}{60}$ adicional de acción de esta empresa, generando una utilidad adicional de $\frac{51}{60}$ millones.

Parte D

Usted tiene a su cargo un grupo de 6 personas y los debe colocar en 2 oficinas. Usted sabe que existen distintos tipos de relaciones entre las personas, y ha logrado construir una tabla que cuantifica estas enemistades en 4 categorías que miden *distancia de amistad*, siendo: (1) amigos; (2) conocidos; (3) indiferentes; y (4) enemigos. En la siguiente tabla se muestra el detalle de la información:

Persona	T1	T2	T3	T4	T5	T6
T1	-	1	3	3	1	2
T2	-	-	3	1	3	2
T3	-	-	-	3	1	3
T4	-	-	-	-	1	3
T5	-	-	-	-	-	4

Formule el problema de destinar trabajadores a las oficinas como un problema de redes, considerando que desea minimizar la *distancia de amistad* en la conformación de ambas oficinas, pero teniendo en cuenta que dos personas que son enemigas no pueden estar en la misma oficina.

Pauta Parte D

El problema planteado es una clasificación de 2 conjuntos (oficinas) de manera de que se tienen dos elementos que deben estar separados ($T5$ y $T6$), y el resto debe clasificarse en una de estas oficinas de manera de minimizar el flujo entre ellas (distancia de amistad). Entonces, este es un problema de corte mínimo de conjuntos, que como se sabe, es el dual del problema de flujo máximo. Luego, es posible formular el problema planteado como uno de flujo máximo donde los nodos representan a las personas, existen todos los arcos (grafo completo) y la capacidad de cada arco corresponderá a la distancia de amistad entre dos nodos. El siguiente gráfico describe el problema como uno de flujo máximo.

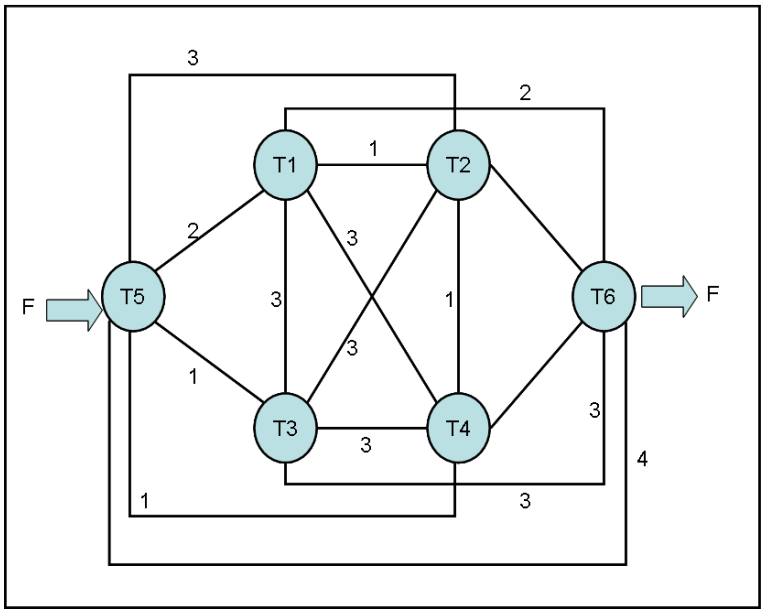


Figura 2: Gráfico del problema

Pregunta 2 (25 %)

Usted está pensando en realizar un viaje desde Santiago a Amsterdam. Desafortunadamente, al llamar a la compañía aérea le han indicado que no hay vuelo directo desde Santiago hasta Amsterdam ni desde Amsterdam a Santiago, por lo que la única forma de realizar el viaje es realizando conexiones aéreas. La siguiente tabla indica los vuelos disponibles diariamente y el costo en unidades monetarias de realizar ese vuelo.

Origen \ Destino	Santiago	Río de Janeiro	Miami	Paris	Berlín	Amsterdam
Santiago	-	7	9	12	13	-
Río de Janeiro	6	-	3	10	11	19
Miami	9	4	-	13	17	20
Paris	11	8	13	-	3	2
Berlín	14	11	16	4	-	2
Amsterdam	-	17	19	2	3	-

a) Utilice el algoritmo de Dijkstra para determinar qué viajes debe realizar para el viaje ida y vuelta a Amsterdam (partiendo en Santiago), de manera de minimizar el costo en unidades monetarias de realizarlo.

b) Ahora, considere que por motivos personales usted desea que el viaje de ida y el viaje de vuelta sean completamente distintos. Esto quiere decir que si usted realiza un vuelo desde i a j en el viaje de ida, en el viaje de vuelta no debe realizar el vuelo desde j a i. Considerando esta nueva condición y utilizando solamente el algoritmo de Dijkstra, indique qué viajes debe realizar para el viaje de ida y vuelta a Amsterdam.

c) Formule un modelo de programación lineal entera que represente -de manera general- la situación descrita en la parte b).

d) Muestre si la solución obtenida en la parte b) es óptima.

Pauta Pregunta 3 (30 %)

a) Para facilitar el desarrollo es más conveniente resolver un problema en la ida desde Santiago a Amsterdam y otro en la vuelta. Es importante destacar que esto no tendrá consecuencias en la solución óptima (si se comparase con la que se obtendría al resolver la red completa).

La siguiente tabla muestra el desarrollo del algoritmo de Dijkstra para el viaje de ida:

La solución óptima tiene un costo de 14 y corresponde al viaje Santiago-Paris-Amsterdam.

La siguiente tabla muestra el desarrollo del algoritmo de Dijkstra para el viaje de vuelta:

La solución óptima tiene un costo de 13 y corresponde al viaje Amsterdam-Paris-Santiago. Por lo tanto, la ruta más corta ida y vuelta tiene un costo de 27 y es Santiago-Paris-Amsterdam-Paris-Santiago.

Ruta Ida S-A	Iteración 1			Iteración 2			Iteración 3			Iteración 4			Iteración 5		
Nodo	d(i)	I(i)	V	d(i)	I(i)	V	d(i)	I(i)	V	d(i)	I(i)	V	d(i)	I(i)	V
Santiago(S)	0	S	SI	0	S	SI	0	S	SI	0	S	SI	0	S	SI
Río de Janeiro(RJ)	7	S	NO	7	S	SI	7	S	SI	7	S	SI	7	S	SI
Miami(M)	9	S	NO	9	S	NO	9	S	SI	9	S	SI	9	S	SI
Paris(P)	12	S	NO	12	S	NO	12	S	NO	12	S	SI	12	S	SI
Berlín(B)	13	S	NO	13	S	NO	13	S	NO	13	S	NO	13	S	SI
Amsterdam(A)	infinito	-	NO	26	RJ	NO	26	RJ	NO	14	P	NO	14	P	NO

Ruta Vuelta A-S	Iteración 1			Iteración 2			Iteración 3			Iteración 4		
Nodo	d(i)	I(i)	V	d(i)	I(i)	V	d(i)	I(i)	V	d(i)	I(i)	V
Amsterdam(A)	0	A	SI	0	A	SI	0	A	SI	0	A	SI
Río de Janeiro(RJ)	17	A	NO	10	P	NO	10	P	NO	10	P	SI
Miami(M)	19	A	NO	15	P	NO	15	P	NO	13	RJ	NO
Paris(P)	2	A	NO	2	A	SI	2	A	SI	2	A	SI
Berlín(B)	3	A	NO	3	A	NO	5	P	SI	5	P	SI
Santiago(S)	infinito	-	NO	13	P	NO	13	P	NO	13	P	NO

b) Bajo este esquema, es necesario realizar 2 nuevos desarrollos del algoritmo: el caso en que el viaje de ida es conveniente y se quitan arcos del viaje de vuelta, y el caso en que el viaje de vuelta es conveniente y se quitan arcos del viaje de ida.

La siguiente tabla muestra el desarrollo del algoritmo de Dijkstra para el viaje de vuelta sin considerar los arcos Paris-Santiago y Amsterdam-Paris:

Ruta Vuelta A-S modificada	Iteración 1			Iteración 2			Iteración 3		
Nodo	d(i)	I(i)	V	d(i)	I(i)	V	d(i)	I(i)	V
Amsterdam(A)	0	A	SI	0	A	SI	0	A	SI
Río de Janeiro(RJ)	17	A	NO	17	A	NO	17	A	NO
Miami(M)	19	A	NO	19	A	NO	19	A	NO
Paris(P)	infinito	-	NO	7	B	NO	7	B	SI
Berlín(B)	3	A	NO	3	A	SI	3	A	SI
Santiago(S)	infinito	-	NO	17	B	NO	17	B	NO

La solución óptima tiene un costo de 17 y corresponde al viaje Amsterdam-Berlín-Santiago. Con esta solución y la obtenida en la tabla de ida Santiago-Amsterdam de la parte a) se tiene que el costo del viaje sería 31 y corresponde a Santiago-Paris-Amsterdam-Berlín-Santiago.

Ahora, la siguiente tabla muestra el desarrollo del algoritmo de Dijkstra para el viaje de ida sin considerar los arcos Santiago-Paris y Paris-Amsterdam:

La solución óptima tiene un costo de 15 y corresponde al viaje Santiago-Berlín-Amsterdam. Con esta solución y la obtenida en la tabla de vuelta Amsterdam-Santiago de la parte a) se tiene que el costo del viaje sería 29 y corresponde a Santiago-Berlín-Amsterdam-Paris-Santiago.

c) Los nodos serán denominados ij, donde i es la ciudad y A representa si está en el grafo del viaje de Santiago-Amsterdam o iD donde D indica si está en el grafo del viaje de Amsterdam.Santiago. Definamos las variables:

x_{ij}^{A} : binaria que toma valor 1 se ocupa el arco i, j en la ruta óptima de ida.
x_{ij}^{S} : binaria que toma valor 1 se ocupa el arco i, j en la ruta óptima de vuelta.

Las restricciones son:

1) Debe salir de Santiago:

$$\sum_{j} x_{ij}^{A} = 1 \qquad i = S.$$

2) Debe llegar a Santiago:

$$\sum_{i} x_{ij}^{D} = 1 \qquad j = S.$$

3) Se debe conservar flujo en cada nodo:

$$\sum_{j} x_{ij}^{t} = \sum_{j} x_{ji}^{t} \qquad \forall\ i;\ \forall t = \{A, D\}.$$

4) Evitar que haga ida y vuelta el mismo arco:

$$x_{ij}^{A} + x_{ji}^{D} \leq 1 \qquad \forall\ i, j.$$

Ruta Ida S-A modificada	Iteración 1			Iteración 2			Iteración 3			Iteración 4		
Nodo	d(i)	I(i)	V	d(i)	I(i)	V	d(i)	I(i)	V	d(i)	I(i)	V
Santiago(S)	0	S	SI	0	S	SI	0	S	SI	0	S	SI
Río de Janeiro(RJ)	7	S	NO	7	S	SI	7	S	SI	7	S	SI
Miami(M)	9	S	NO	9	S	NO	9	S	SI	9	S	SI
Paris(P)	infinito	-	NO	17	RJ	NO	17	RJ	NO	17	RJ-P	NO
Berlín(B)	13	S	NO	13	S	NO	13	S	NO	13	S	SI
Amsterdam(A)	infinito	-	NO	26	RJ	NO	26	RJ	NO	15	B	NO

5) Naturaleza de las variables.

$$\begin{array}{lcll} x_{ij}^{A} & \in & \{0,1\} & \forall\ i,j \\ x_{ij}^{D} & \in & \{0,1\} & \forall\ i,j \end{array}$$

Función Objetivo:

$$\text{mín } z = \sum_{i} \sum_{j} \left(c_{ij}^{A} x_{ij}^{A} + c_{ij}^{D} x_{ij}^{D} \right)$$

d)

Pregunta 3 (30 %)

Una empresa debe contratar a J personas para su nueva sucursal fuera de la capital. Luego de un largo proceso de selección la lista se ha reducido a un conjunto de M postulantes ($card(M) > J$ y $card(M)$ es par), y la gerencia general ha decidido que para determinar quienes serán contratados se realizará una evaluación de competencias de cada postulante. La misma gerencia ha determinado que las habilidades que serán evaluadas están listadas en el conjunto C donde $card(C) \geq \frac{card(M)}{2}$.

Para realizar la evaluación de habilidades, se realizarán durante $card(C)$ días comparaciones de a pares de postulantes. Esto quiere decir que un día cualquiera se formarán $\frac{card(M)}{2}$ parejas de postulantes, donde cada pareja será evaluada y se entregará 1 punto al postulante mejor evaluado de la pareja y 0 a su contrincante. Para simplificarse la vida, la empresa realizará durante el día c las comparaciones de postulantes para la habilidad c.

La empresa ya ha entregado el calendario de evaluaciones -con las parejas ya formadas para cada día-evaluación-, información que se encuentra resumida en el parámetro α_{ij}^{c} que tiene valor 1 si el postulante i es evaluado junto con el postulante j en la habilidad c.

a) (3.0 puntos) Diseñe un modelo de programación lineal entera y/o mixta que le permita al postulante k, que es un muy buen amigo suyo, saber cuánto es la cantidad mínima de puntos que debe conseguir para asegurarse uno de los puestos que ofrece la empresa.

La gerencia general lo ha contactado pues se han dado cuenta de que la planificación de evaluaciones y emparejamientos no es correcta, y por lo tanto debe ser modificada. Particularmente se le ha pedido que todos los postulantes sean evaluados en todas las actividades (siempre emparejados), y que un mismo par de postulantes no sean emparejados más de una vez. Usted, aprovechando que tendrá a su cargo la confección de las comparaciones de pares de postulantes, ha decidido ayudar a su amigo k para aumentar las posibilidades de que él obtenga uno de los puestos ofrecidos. Para ello, ha conseguido información de los postulantes que le ha permitido generar el parámetro (absolutamente subjetivo a su propia apreciación) β_{ij}^{c} que toma valor 1 si usted cree que el postulante i será mejor evaluado en la comparación de la habilidad c con el postulante j.

b) (3.0 puntos) Basándose en la información antes descrita, diseñe un modelo de programación lineal entera y/o mixta que permita a la empresa establecer los emparejamientos bajo las condiciones solicitadas, y que le permita ayudar a que su amigo tenga más posibilidades de asegurarse uno de los puestos ofrecidos.

Pauta Pregunta 3 (25 %)

a) En este caso se define:

(ı) **Variables:**

x_{ij}^{c}: variable binaria que toma valor 1 si el postulante i es mejor evaluado que el postulante j en la competencia c, y 0 en otro caso.
P_i : cantidad de puntos que obtiene el postulante i.
y_i : variable binaria que toma valor 1 si el postulante i tiene los mismos o más puntos que el amigo k, y 0 en otro caso.

(II) **Función Objetivo:**

$$\max P_k$$

(III) **Restricciones:**

1) Combinación de resultados posibles.

$$x_{ij}^c + x_{ji}^c \leq \alpha_{ij}^c \qquad \forall\, i,j \text{ tal que } i \neq j.$$

2) Calculo de los puntos de cada postulante.

$$P_i = \sum_c \sum_{j \neq i} x_{ij}^c \qquad \forall\, i.$$

3) Obligar a la variable y_i a tomar valor cero cuando corresponda.

$$P_k - P_i \leq M(1 - y_i) \qquad \forall\, i, \text{ y } M >>>> 0.$$

4) Obligar a la variable y_i a tomar valor uno cuando corresponda.

$$P_i - P_k \leq M y_i \qquad \forall\, i, \text{ y } M >>>> 0.$$

5) Condición para quedar eliminado.

$$\sum_{i \neq k} y_i \geq J$$

6) Naturaleza de las variables.

$$x_{ij}^c \in \{0,1\} \qquad \forall\, i,j,c.$$
$$P_i \geq 0 \qquad \forall\, i.$$
$$y_i \in \{0,1\} \qquad \forall\, i.$$

b) En este caso no se conoce el calendario de evaluaciones, luego el parámetro α_{ij}^c no existe. A las variables definidas en a) agregamos:

(I) **Variables:**

γ_{ij}^c: variable binaria que toma valor 1 si el postulante i se calendariza para enfrentar al postulante j en la competencia c, y 0 en otro caso.

(II) **Función Objetivo:**

$$\max P_k$$

(III) **Restricciones:**

1) Combinación de resultados posibles.

$$x_{ij}^c + x_{ji}^c \leq \gamma_{ij}^c \qquad \forall\, i,j \text{ tal que } i \neq j.$$

2) Calculo de los puntos de cada postulante.

$$P_i = \sum_c \sum_{j \neq i} \beta_{ij}^c x_{ij}^c \qquad \forall\, i.$$

3) Obligar a la variable y_i a tomar valor cero cuando corresponda.

$$P_k - P_i \leq M(1 - y_i) \qquad \forall\, i, \text{ y } M >>>> 0.$$

4) Obligar a la variable y_i a tomar valor uno cuando corresponda.

$$P_i - P_k \leq M y_i \qquad \forall\, i, \text{ y } M >>>> 0.$$

5) Condición para quedar eliminado.

$$\sum_{i \neq k} y_i \geq J$$

6) Construcción de calendario 1.

$$\sum_j \gamma_{ij}^c = 1 \qquad \forall\, i,c.$$

7) Construcción de calendario 2.

$$\sum_c \gamma_{ij}^c = 1 \qquad \forall\, i,j,c.$$

8) Construcción de calendario 3.

$$\gamma_{ij}^{c} = \gamma_{ji}^{c} \qquad \forall\, i, c.$$

9) Naturaleza de las variables.

$$x_{ij}^{c} \in \{0,1\} \qquad \forall\, i, j, c.$$
$$P_i \geq 0 \qquad \forall\, i.$$
$$y_i \in \{0,1\} \qquad \forall\, i.$$
$$\gamma_{ij}^{c} \in \{0,1\} \qquad \forall\, i, j, c.$$

Pregunta 4 (25 %)

Considere el problema que enfrenta una empresa que produce rollos de papel de 118 cm. La empresa debe satisfacer una demanda diaria de rollos de distinto tamaño menores a 118 cm. En particular, asuma que la demanda para un día cualquiera se especifica en la tabla que se muestra a continuación, donde la primera columna de la tabla define el tamaño del rollo demandado y la segunda columna corresponde al número de rollos que se deben satisfacer en un día. Por ejemplo, la primera fila de la tabla define que se debe satisfacer una demanda de 100 rollos de 30 cm.

Largo	Cantidad requerida
30	100
40	80
50	70

Para resolver este problema se ha formulado el modelo de programación lineal que permite determinar la cantidad de rollos de 118 cm. que se deben cortar y de qué forma (tipos de corte). Asuma que esta empresa tiene como objetivo minimizar la pérdida total de rollos de papel que le genera su política de corte. Este modelo utiliza variables que define el número de rollos de 118 cm. que serán cortados según el corte i.

De acuerdo con lo anterior, cada tipo de corte es una combinación de rollos de papel de 30, 40 y 50 cm. Por ejemplo, el tipo de corte 1 obtiene 3 rollos de 30 cm teniendo una pérdida de material de 18 cm. rollo. La siguiente tabla muestra los tipos de corte posibles y la pérdida asociada a cada corte.

Tipo de corte	Rollos 30 [cm]	Rollos 40 [cm]	Rollos 50 [cm]	Pérdida del corte [cm]
x_1	3	0	0	28
x_2	2	1	0	18
x_3	1	2	0	8
x_4	2	0	1	8
x_5	0	1	1	28
x_6	0	0	2	18

A partir de estos datos es posible diseñar el siguiente el modelo de programación lineal es el siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{mín } 28x_1 + 18x_2 + 8x_3 + 8x_4 + 28x_5 + 18x_6 \qquad (\mathcal{P}) \\ &s.a: \\ &\quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 100 \\ &\quad x_2 + 2x_3 + x_5 \geq 80 \\ &\quad x_4 + x_5 + 2x_6 \geq 70 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

Si consideramos que la solución óptima del problema tiene como costo reducido de las variables los valores presentados en la siguiente tabla, responda la siguientes preguntas:

Tipo de corte	Costo reducido
x_1	28
x_2	14
x_3	0
x_4	0
x_5	16
x_6	2

a) (1.0 puntos) Demuestre que el problema $(\mathcal{P})$ admite solución óptima.

b) (1.5 puntos) Determine el nivel de pérdida que se genera con la solución óptima que se tiene.

c) (1.0 puntos) Interprete económicamente los precios sombra asociados a cada restricción.

d) (1.5 puntos) Encuentre el rango de sensibilidad del costo de la variable x_2 tal que no cambie la base.

e) (1.0 puntos) ¿Cuál es la máxima demanda que se puede requerir de rollos de 30 cm, sin que cambie la solución óptima?

Pauta Pregunta 4 (25 %)

a) Primero, se puede ver fácilmente que el espacio de soluciones factibles es no vacío. Por ejemplo el punto $x_1 = 100$, $x_5 = 80$ y el resto de las variables en 0, asegura que se satisfacen las 3 restricciones. Ahora, sumando la primera y la última restricción se tiene:

$$170 \leq 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + 2x_6$$

ahora, considerando que todas las variables son ≥ 0 se tiene:

$$170 \leq 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + 2x_6 \leq 28x_1 + 18x_2 + 8x_3 + 8x_4 + 28x_5 + 18x_6$$

luego, el teorema práctico de existencia de soluciones óptimas de la programación lineal asegura que el problema tiene solución óptima.

b) Dado que los costos reducidos de las variables x_3 y x_4 son cero y los otros son positivos, se deduce que solo se generan cortes tipo 3 y 4, por lo que tomando adicionalmente el costo reducido de otra variable cualquiera, por ejemplo X_6, se construye el siguiente sistema de ecuaciones de tres ecuaciones y tres incógnitas.

$$\begin{aligned} 0 &= 8 - (y_1, y_2, y_3) \cdot (1, 2, 0)^T \\ 0 &= 8 - (y_1, y_2, y_3) \cdot (2, 0, 1)^T \\ 2 &= 18 - (y_1, y_2, y_3) \cdot (0, 0, 2)^T \end{aligned}$$

Con ello se obtiene que: $y_1 = 0$; $y_2 = 4$ y $y_3 = 8$. Por lo que concluimos que la restricciones 2 y 3 del primal son activas y con ello de las restricciones del primal se obtiene que: segunda restricción del primal: $2x_3 = 80$, es decir $x_3 = 40$, y la tercera restricción del primal nos muestra que $x_4 = 70$. Finalmente, evaluando la función objetivo en el vector solución $(0, 0, 40, 70, 0, 0)$, se determina que el nivel de perdida es $z = 8 \cdot 40 + 8 \cdot 70 = 880$ cms.

c) Los precios sombra calculados en a), muestran la perdida de bienestar (medida en cms. de perdida) al incrementar en una unidad el pedido de cada corte. Específicamente, se concluye que si se pide un rollo adicional de 30 cms., no hay perdida asociada ya que ese requerimiento se satisface con holgura ($y_1 = 0$). Si se pide un rollo adicional de 40 cms o 50 cms, se genera una perdida de bienestar (en cms) igual al precio sombra encontrado, es decir 4 y 8 respectivamente.

d) Para que la base no cambie, se debe cumplir que el costo reducido de x_2 sea positivo, es decir que:

$$c_2 > (y_1, y_2, y_3) R_{\cdot 2} \Rightarrow c_2 > (0, 4, 8) \cdot (2, 1, 0)^T = 4$$

Por lo tanto, mientras la perdida del corte tipo 2 sea mayor que 4, no se producirán cortes tipo 2.

e) Los rollos de 30 cms. Se producen con holgura, específicamente considerando la restricción asociada a ese producto, se producen:

$$x_3 + 2x_4 = 40 + 2 \cdot 70 = 180 \text{ rollos de 30 cms.}$$

Por lo tanto, si se piden 180 rollos de 30 cms., la restricción se activa, luego se pueden pedir como máximo 179 rollos para que la restricción no se active.