PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso:	ICS1113 - Optimización
Semestre:	2025 - 1
Profesores:	G. Angulo - C. Balbontin - M. Castro R. Cuadrado - G. Pérez

Interrogación 2

Duración: 150 minutos.

Instrucciones

- **Identificarse:** Escribir nombre completo, sección, número de lista en la primera hoja. Además, escribir número de lista en cada hoja. La falta de esta información será penalizada con 2 décimas en la prueba.
- Durante la prueba debe **poseer una identificación oficial** (con foto), por ejemplo: CI, TUC, pase escolar, etc. También debe firmar la lista de asistencia a la prueba.
- Al finalizar la prueba: cada estudiante debe **escanear su prueba y cargarla como PDF a CANVAS** en el buzón "Interrogación 2" y **entregar la prueba física** al ayudante. El buzón estará abierto desde el inicio de la evaluación hasta 15 minutos después de su hora de término. Procure que el escaneo sea legible, ya que se corregirá sobre el documento escaneado. Sin embargo, si el equipo docente no recibe el respaldo físico de la prueba, entonces podría asignarle nota mínima. Se penalizará hasta con 2 décimas por escaneos poco legibles o incompletos.
- La prueba es estrictamente individual. Otra forma de abordarla es una falta a la ética y será evaluada con nota mínima en la prueba.
- Escribir respuestas en la prueba después del tiempo de término o escribir solicitudes de puntaje o similares a los correctores se penaliza con nota mínima en la pregunta en cuestión o, incluso, en toda la prueba.
- Está prohibido el uso de dispositivos electrónicos (celular, calculadoras, computador, smart watch, etc.) durante la prueba. Solo se permite ocupar un dispositivo electrónico para escanear y subir su prueba a CANVAS. El uso de un dispositivo en otra circunstancia se considera una falta a la ética y se penaliza con nota mínima en la prueba.
- Si termina antes de tiempo, entonces favor avisar a un miembro del equipo docente para escanear y subir su prueba.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2025 - 1
Profesores: G. Angulo - C. Balbontin - M. Castro
R. Cuadrado - G. Pérez

Interrogación 2
Duración: 150 minutos.

Pregunta 1 (20 + 3 puntos)

Considere nuevamente el problema de modelación presentado en la Interrogación 1.

La municipalidad de una ciudad de Chile quiere transformar una de sus calles en un paseo peatonal y para esto requiere organizar los trabajos que se realizarán en dicha calle. La obra del paseo peatonal requiere que se realicen un conjunto $\mathcal{J}$ de trabajos en la calle (por ejemplo, sacar pavimento, aplanar superficie, poner nueva luminaria, etc.). Cada uno de estos trabajos debe ser realizado por un equipo de trabajadores del conjunto $\mathcal{E}$ en alguno de los períodos de tiempo del conjunto $\mathcal{P} = \{1, ..., T\}$.

Cada trabajo requiere un cierto tiempo para ser completado y dicho tiempo depende del equipo que realiza el trabajo, es decir, $d_{je} \geq 0$ representa las horas que demora el equipo $e \in \mathcal{E}$ en realizar el trabajo $j \in \mathcal{J}$. Asumiremos que las horas que le toma a cada equipo realizar cada trabajo es menor o igual a un periodo de tiempo del conjunto $\mathcal{P}$. Además, cada equipo $e \in \mathcal{E}$ puede realizar ninguno, uno o más trabajos en un mismo periodo $t \in \mathcal{P}$, pero las horas totales trabajadas en dicho periodo t debe ser menor o igual a K_{et} horas. Finalmente, se le debe pagar c_{et} a cada equipo $e \in \mathcal{E}$ por cada hora trabajada en el periodo $t \in \mathcal{P}$.

Por otro lado, los trabajos deben cumplir cierto orden para poder ser realizados. Específicamente, cada trabajo $j \in \mathcal{J}$ tiene un conjunto $\mathcal{J}_j \subseteq \mathcal{J}$ que representa todos los trabajos que deben realizarse al menos un periodo antes del periodo en que se decide realizar el trabajo j. Por ejemplo, si $j \in \mathcal{J}$ se quiere realizar en el periodo $t = 5$, entonces todos los $i \in \mathcal{J}_j$ deben realizarse en algún periodo $t' \leq 4$.

Finalmente, se desea crear un modelo de programación lineal entera mixta que minimice los costos de la obra para transformar la calle en un paseo peatonal.

(a) **(8 puntos)** A continuación se presenta un modelo de optimización lineal entera para este problema. El modelo considera la variable de decisión binaria x_{jet} que toma valor 1 si el equipo $e \in \mathcal{E}$ realiza el trabajo $j \in \mathcal{J}$ en el periodo $t \in \mathcal{P}$ y 0 en otro caso. Asuma que esta variable es suficiente para modelar correctamente la situación descrita.

$$\text{mín} \sum_{e\in\mathcal{E}}\sum_{t\in\mathcal{P}}\sum_{j\in\mathcal{J}} d_{je}c_{et}x_{jet}$$

$$\text{s.a} \sum_{j\in\mathcal{J}}\sum_{e\in\mathcal{E}}\sum_{t\in\mathcal{P}} x_{jet} = 1 \tag{1a}$$

$$x_{jet} \leq \sum_{e\in\mathcal{E}} x_{ie,t+1} \qquad \forall j \in \mathcal{J},\ i \in \mathcal{J}_j,\ \ t \in \{2,...,T\} \tag{1b}$$

$$\sum_{j\in\mathcal{J}} d_{je} \leq K_{et} \qquad \forall e \in \mathcal{E},\ t \in \mathcal{P} \tag{1c}$$

$$x_{jet} \in \{0,1\} \qquad \forall j \in \mathcal{J},\ e \in \mathcal{E},\ t \in \mathcal{P}$$

Se sabe que la función objetivo está correctamente modelada, pero no se sabe con certeza si las restricciones son correctas o no. Se sabe que las restricciones "intentan" representar todas las condiciones del problema. Específicamente, se detalla la relación entre cada restricción y partes del enunciado:

(1a) : "Cada uno de estos trabajos debe ser realizado por un equipo de trabajadores del conjunto $\mathcal{E}$ en alguno de los períodos de tiempo del conjunto $\mathcal{P} = \{1, ..., T\}$."

(1b) : "Cada trabajo $j \in \mathcal{J}$ tiene un conjunto $\mathcal{J}_j \subseteq \mathcal{J}$ que representa todos los trabajos que deben realizarse al menos un periodo antes del periodo en que se decide realizar el trabajo j."

(1c) : "Cada trabajo requiere un cierto tiempo para ser completado y dicho tiempo [...]".

Para cada restricción del modelo ((1a), (1b) y (1c)), su objetivo es: (i) identificar si logra modelar correctamente la condición que corresponde (justifique brevemente su respuesta), y (ii) proponer una alternativa correcta a la restricción en caso de encontrar errores en ella.

Solución:

La restricción (1a) está incorrecta porque restringe a que solo se haga un solo trabajo por un solo equipo en un solo periodo de tiempo. La versión correcta es:

$$\sum_{e\in\mathcal{E}}\sum_{t\in\mathcal{P}} x_{jet} = 1 \qquad \forall j \in \mathcal{J}$$

La restricción (1b) esta incorrecta porque obliga que los trabajo en $\mathcal{J}_j$ sean en el periodo inmediatamente siguiente. Posibles versiones correctas son:

$$x_{jet} \leq \sum_{e'\in\mathcal{E}}\sum_{k=1}^{t-1} x_{ie'k} \qquad \forall j \in \mathcal{J},\ i \in \mathcal{J}_j,\ e \in \mathcal{E},\ t \in \{2,...,T\}$$

o

$$\sum_{e\in\mathcal{E}} x_{jet} \leq \sum_{e\in\mathcal{E}}\sum_{k=1}^{t-1} x_{iek} \qquad \forall j \in \mathcal{J},\ i \in \mathcal{J}_j,\ t \in \{2,...,T\}$$

La restricción (1c) esta incorrecta, ya que no incluye ninguna variable. La versión correcta es:

$$\sum_{j\in\mathcal{J}} d_{je}x_{jet} \leq K_{et} \qquad \forall e \in \mathcal{E},\ t \in \mathcal{P}$$

Nota de corrección:

- ◇ 3 puntos (1a)
- ◇ 3 puntos (1b)
- ◇ 2 puntos (1c)
- ◇ 1 punto por decir que está incorrecta y poner alguna explicación razonable de algo que esté mal
- ◇ 1 o 2 puntos por la restricción corregida

(b) **(15 puntos)** Incorpore restricciones lineales que modelen las siguientes condiciones adicionales al problema. Puede asumir que tiene un modelo correcto y completo de la parte (a) y que puede crear variables adicionales si estima conveniente. Para las siguientes preguntas, considere que el conjunto de trabajos $\mathcal{J}$ se divide en 10 subconjuntos disjuntos dados, es decir, $\mathcal{J} = A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_{10}$ donde cada trabajo $i \in \mathcal{J}$ esta únicamente en uno de estos subconjunto ($A_k \cap A_{k'} = \emptyset$ para todo $k \neq k'$).

(i) **(3 puntos)** Se deben realizar todos los trabajos del conjunto A_1 antes del periodo 3.
Solución:
No es necesario crear variables adicionales
Alternativa 1:

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} (x_{je1} + x_{je2}) = 1 \qquad \forall j \in A_1$$

Alternativa 2:

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{t=3}^{T} x_{jet} = 0 \qquad \forall j \in A_1$$

(ii) **(3 puntos)** Todos los trabajos del grupo A_4 deben ser realizados al menos un periodo antes que los trabajos del grupo A_6.
Solución: Hay muchas formas de modelar esto. Una alternativa sin variables extra es:

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} x_{jet} \leq \sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{t'=t+1}^{T} x_{j'et'} \qquad \forall j \in A_4,\ j' \in A_6,\ t \in \{1, ..., T-1\}$$

(iii) **(3 puntos)** Para cada conjunto A_k con $k \in \{1, ..., 10\}$, a lo más 3 equipos diferentes pueden realizar los trabajos de dicho conjunto durante todos los períodos del horizonte de tiempo.
Solución: Nueva variables binaria para todo $k \in \{1, ..., 10\}$

$$y_{ek} = \begin{cases} 1 & \text{el equipo } e \in \mathcal{E} \text{ realiza algún trabajo del conjunto } A_k \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Restricciones:

$$\sum_{t \in \mathcal{P}} x_{jet} \leq y_{ke} \qquad \forall e \in \mathcal{E},\ j \in A_k,\ k \in \{1, ..., 10\}$$

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} y_{ke} \leq 3 \qquad \forall k \in \{1, ..., 10\}$$

(iv) **(3 puntos)** Si un equipo realiza algún trabajo del grupo A_2, entonces no puede realizar ningún trabajo del grupo A_5 (y viceversa).

Solución: Alternativa 1: Ocupando la variable y_{ek} definida anteriormente :

$$x_{jet} \leq y_{ke} \qquad \forall e \in \mathcal{E},\ j \in A_k,\ k \in \{1, ..., 10\},\ t \in \mathcal{P}$$
$$y_{2e} + y_{5e} \leq 1 \qquad \forall e \in \mathcal{E}$$

Se debe agregar la restricción que relaciona x con y si no fue definida anteriormente. Aquí se presenta una forma alternativa que también relaciona correctamente x e y.

Alternativa 2: Sin ocupar nuevas variables

$$\sum_{t \in \mathcal{P}} x_{jet} + \sum_{t \in \mathcal{P}} x_{j'et} \leq 1 \qquad \forall j \in A_2,\ j' \in A_5,\ e \in \mathcal{E}$$

(v) **(3 puntos)** Todos los trabajos del conjunto A_5 deben ser realizados en a lo más 3 periodos diferentes.

Solución: Se agrega una nueva variable $z_t \in \{0, 1\}$ que indica si se esta realizando un trabajos del conjunto A_5 en el periodo $t \in \mathcal{P}$

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} x_{jet} \leq z_t \qquad \forall j \in A_5,\ t \in \mathcal{P}$$
$$\sum_{t \in \mathcal{P}} z_t \leq 3$$

Nota de corrección: Para cada restricción, se asignará puntaje según qué tan completa y correcta es la respuesta:

- ◇ 3 puntos: Completamente correcta.
- ◇ 2 puntos: Correctamente desarrollada, pero presenta más de un error menor.
- ◇ 1 punto: Se entiende el objetivo principal, pero hay varios errores.
- ◇ 0 puntos: Respuesta incompleta y/o incorrecta.

Importante: Si se utilizan variables auxiliares, estas deben estar correctamente relacionadas. De lo contrario, se descuenta 1 punto.

Pregunta 2 (20 puntos)

(a) **(4 puntos)** Verifique que el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| \leq z\}$ es convexo.

Solución: Tomemos 2 puntos cualquiera del dominio S:

$u = (x_1, y_1, z_1), \quad v = (x_2, y_2, z_2)$

Al ser puntos en S, estos satisfacen:

$|x_1| + |y_1| \leq z_1, \quad |x_2| + |y_2| \leq z_2$

Consideremos una combinación convexa cualquiera de u y v:

$w = \lambda \cdot u + (1 - \lambda) \cdot v = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2, \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2)$

Con $\lambda \in [0, 1]$.

Por otro lado, por la desigualdad triangular, tenemos que:

$|\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2| \leq \lambda|x_1| + (1 - \lambda)|x_2|$
$|\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2| \leq \lambda|y_1| + (1 - \lambda)|y_2|$

Luego, si sumamos esas desigualdades, tenemos:

$|\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2| + |\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2| \leq \lambda(|x_1| + |y_1|) + (1 - \lambda)(|x_2| + |y_2|)$

Y dado que u y v pertenecen a S, tenemos que: $\lambda(|x_1|+|y_1|)+(1-\lambda)(|x_2|+|y_2|) \leq \lambda z_1+(1-\lambda)z_2$

Por lo que: $|\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2| + |\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2| \leq \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2$

Es decir que w pertenece a S. Concluimos que S es un conjunto convexo.

Otra forma de verificar que el conjunto es convexo es notando que $|x|$ se puede escribir como $\max(x, -x)$. Luego tenemos que el conjunto queda descrito como: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \max(x, -x) + \max(y, -y) \leq z\}$, lo que puede ser representado con las siguientes desigualdades lineales:

$$\begin{aligned} x + y &\leq z \\ -x + y &\leq z \\ x - y &\leq z \\ -x - y &\leq z \end{aligned}$$

Es decir, el conjunto es un poliedro y, por lo tanto, es convexo.

Nota de corrección:

- ◇ 4 puntos: Desarrollo correcto y completo, para cualquiera enfoque escogido para verificar que el conjunto es convexo.
- ◇ 3 puntos: Define correctamente definición de convexidad y el objetivo de la demostración, se plantea una estrategia razonable aunque se cometen errores leves en el desarrollo.
- ◇ 1 punto: Menciona definición de convexidad o algún requisito necesario para demostrarla, pero no logra desarrollar adecuadamente el argumento ni aplicarlo correctamente al problema específico.
- ◇ 0 puntos: No demuestra comprensión del concepto de convexidad sobre el conjunto específico.

(b) **(4 puntos)** Verifique que la función $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $e^{x^2} + y^2 - x$ es convexa.

Solución: Sabemos que la suma de funciones convexas sigue siendo convexa. Luego podemos separar la función como $f_1(x, y) + f_2(x, y) + f_3(x, y)$ con:
$f_1(x, y) = e^{x^2}$
$f_2(x, y) = y^2$
$f_3(x, y) = -x$

Considerando que la función cuadrática es convexa (f_2 es convexa) y que la función exponencial es convexa y no decreciente, sabemos que su composición es convexa. Luego f_1 es convexa. Por último, f_3 es lineal y, por lo tanto, convexa. Así sabemos que f es convexa.

También podemos directamente analizar la matriz Hessiana de la función:

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xe^{x^2} - 1 \\ 2y \end{bmatrix}$$

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 2e^{x^2}(1 + 2x^2) & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Podemos notar que todos los menores principales superiores son positivos, por lo que la matriz Hessiana de la función es definida positiva. Esto implica que la función es estrictamente convexa y, por lo tanto, convexa.

Nota de corrección:

Solución 1: Composición de funciones

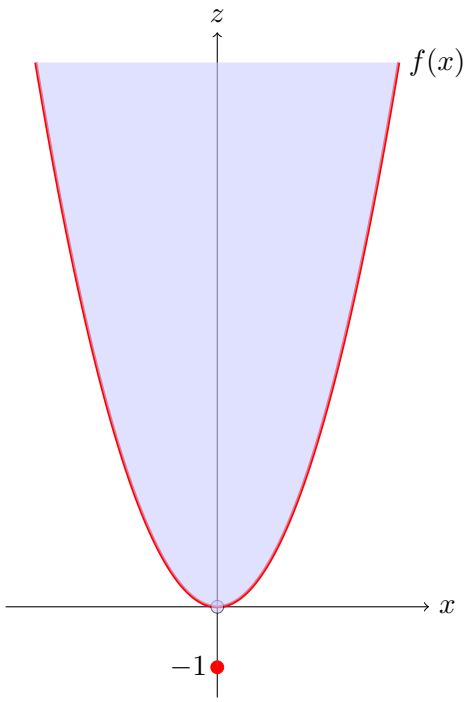
- ◇ 4 puntos: Desarrollo correcto y completo
- ◇ 2 puntos: Se plantea correctamente argumento de composición pero no justifica convexidad de alguna función involucrada.
- ◇ 0 puntos: No se plantea nada relevante.

Solución 2: Análisis con el Hessiano

- ◇ 4 puntos: Desarrollo completamente correcto
- ◇ 3 puntos: Errores al derivar, pero se plantea correctamente que se deben verificar menores principales
- ◇ 2 puntos: Se utiliza el criterio de Sylvester pero se cometen errores en el cálculo del Hessiano
- ◇ 0 puntos: Desarrollo incompleto o incorrecto.

(c) **(12 puntos)** Considere el problema (P) $\min\{f(x) : \ x \in C\}$, donde $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto no vacío y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ no es necesariamente continua, pero está acotada inferiormente y su epigrafo $E(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ es cerrado.

(i) **(4 puntos)** A modo de ejemplo, para $n = 1$, considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ si $x \neq 0$ y $f(0) = -1$. Grafique $E(f)$ y argumente que es cerrado.
Solución: Tenemos que $E(f)$ se puede escribir como la unión de $\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 \leq z\}$ con el segmento $[(0, -1), (0, 0)]$. Como ambos conjuntos son cerrados, $E(f)$ es cerrado.
Nota de corrección: Se asigna 1 punto por graficar función, 2 puntos por graficar epígrafo y 1 punto por concluir correctamente que es cerrado



(ii) **(4 puntos)** Para el caso general, explique por qué existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que (P) es equivalente a mín$\{z : \ f(x) \leq z, \ \alpha \leq z \leq \beta, \ x \in C\}$.

Solución: Tenemos que (P) es equivalente a mín$\{z : \ f(x) \leq z, \ x \in C\}$. Más aún, dada una cota inferior α para f y definiendo $\beta = f(x_0)$ para algún $x_0 \in C$ arbitrario, tenemos que (P) es equivalente a mín$\{z : \ f(x) \leq z, \ \alpha \leq z \leq \beta, \ x \in C\}$.

Nota de corrección: Se asignan 2 punto por la formulación epigráfica y 2 puntos por definir α y β.

(iii) **(4 puntos)** Usando lo anterior, concluya que (P) tiene solución óptima.

Solución: De la parte anterior, (P) es equivalente a mín$\{z : \ (x, z) \in E(f) \cap (C \times [\alpha, \beta])\}$. Tenemos que $E(f)$ es cerrado, $C \times [\alpha, \beta]$ es compacto, y la intersección de ellos es no vacía. Luego, como el dominio resultante es compacto no vacío y la función objetivo z es continua, por BW, concluimos que (P) tiene solución óptima.

Nota de corrección: Se asigna 1 punto por argumentar que $f(x) \leq z$ define un conjunto cerrado por hipótesis, 1 punto por argumentar que $C \times [\alpha, \beta]$ es compacto, 1 punto por argumentar que FO (z) es continua y 1 punto por aplicar BW.

Pregunta 3 (20 puntos)

(a) **(6 puntos)** Determine todos los vértices del poliedro

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i - x_{i+1} \leq 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n-1, \quad x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

Solución: Para que un punto sea un vértice del poliedro S, deben estar activas al menos n restricciones linealmente independientes. Notamos que en S hay $n-1$ restricciones del tipo $x_i - x_{i+1} \leq 1$ y n restricciones del tipo $x_i \geq 0$, totalizando $2n-1$ posibles restricciones.

En particular los siguientes casos cumplen dicha consigna:

- ◇ El vector nulo: $(0, 0, \ldots, 0)$
- ◇ Los vectores unitarios: $(1, 0, \ldots, 0), \ (0, 1, 0, \ldots, 0), \ \ldots, \ (0, 0, \ldots, 1, 0)$

◇ Los vectores crecientes con diferencias de 1 entre coordenadas:

$$(2,1,0,\ldots,0),\ (3,2,1,0,\ldots,0),\ \ldots,\ (n-1,n-2,\ldots,1,0)$$

Cualquier otra combinación implica menos restricciones activas o vértices infactibles del dominio.

Nota de corrección: Se asignan hasta 6 puntos: 3 puntos por identificar correctamente el origen como vértice en $\mathbb{R}^n$, 1 punto por argumentar que deben estar activas n restricciones linealmente independientes, y hasta 3 puntos por enumerar correctamente otro vértice. Se descuenta 2 puntos si el origen no pertenece a $\mathbb{R}^n$.

(b) **(14 puntos)** Usted se encuentra con el siguiente problema de optimización lineal:

$$\begin{aligned} \max_{x\geq 0} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \end{aligned}$$

(i) **(4 puntos)** Utilice Simplex Fase I para encontrar una base inicial factible.

Solución: Primero se escribe el problema en formato estándar y en minimización (por conveniencia):

$$\begin{aligned} \min_{x\geq 0} \quad & -2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 + 2x_2 - x_4 = 4 \end{aligned}$$

Luego, escribe el problema auxiliar:

$$\begin{aligned} \min_{x,y\geq 0} \quad & y \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 + 2x_2 - x_4 + y = 4 \end{aligned}$$

Y comenzamos a iterar con la base $B = (x_3, y)$ y $N = (x_1, x_2, x_4)$ y llegamos a:

$$z_B = 4 \qquad r_N = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que entra a la base x_2, y para ver cuál sale tenemos: $min(\cdot; 2)$. Por lo que sale y, y la nueva base es $B = (x_2, x_3)$. No es necesario seguir iterando, ya que sabemos que es un mínimo del problema auxiliar. Este es el vértice inicial factible entonces para seguir iterando.

Si agregan dos variables artificiales, van a llegar a la base factible $B = (x_1, x_2)$ en dos iteraciones.

Nota de corrección: Se asigna 1 punto por plantear correctamente Fase 1, 2 puntos por desarrollarla (se descuenta 1 punto por un error de arrastre, 0 puntos si hay dos o más errores), y 1 punto por concluir con una base factible (ya sea indicando que no hay variables artificiales en la base o que la F.O. vale 0).

(ii) **(3 puntos)** Utilice Simplex Fase II para encontrar, si es que existe, la solución óptima de este problema. Puede comenzar iterando desde el vértice donde $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$.

Solución: Usamos el problema estándar escrito más arriba desde la base base $B =$

(x_2, x_3) y $N = (x_1, x_4)$ y llegamos a:

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad c_B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad c_N = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}, \qquad b^- = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A_N^- = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 2.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$z_B = -6, \qquad r_N = \begin{bmatrix} -0.5 & -1.5 \end{bmatrix}$$

Por lo que entra a la base x_4, y para ver cuál sale tenemos: $min(\cdot;\cdot)$ - ninguna sale. Es decir, x_4 puede crecer infinitamente y no llegamos a un nuevo vértice. Por lo que es un problema no acotado, y el valor óptimo es $-\infty$ en el caso del problema de minimización (o ∞ si dejamos el problema original de maximización).

Si empezaron de la base $B = (x_1, x_2)$ porque usaron dos variables artificiales en Simplex Fase I, van a llegar a lo mismo, que entra x_4 pero ninguna sale.

Nota de corrección: Se asigna 1 punto por identificar correctamente la base inicial de Fase 2, 1 punto por desarrollar correctamente la iteración, y 1 punto por concluir que el problema es no acotado por criterio de salida. Un error conceptual implica pérdida total del puntaje en esta sección.

(iii) **(4 puntos)** Identifique el conjunto de soluciones óptimas del problema. En caso de que sea un problema no acotado, se le pide encontrar una dirección de movimiento factible $h \geq 0$ con $Ah = 0$ tal que $c^T h < 0$, considerando el problema en formato estándar $\left(min_{x \geq 0} \quad c^T x : Ax = b\right)$ y mostrar que lo anterior se cumple.

Solución: Como es un problema no acotado, podemos encontrar la dirección de crecimiento con la solución de Simplex, y podemos encontrar la siguiente dirección de movimiento (factible ya que $h \geq 0$):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos A por h:

$$Ah = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(0) + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) + 0(1) \\ 1(0) + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 0\left(\frac{1}{2}\right) + (-1)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $Ah = 0$. Ahora revisamos que la función objetivo sea decreciente en esta dirección factible:

$$c^T = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$c^T h = (-2)(0) + (-3)\left(\frac{1}{2}\right) + 0\left(\frac{1}{2}\right) + 0(1) = -\frac{3}{2}$$

Por lo tanto:

$$c^T h = -\frac{3}{2} < 0$$

Si hacen Simplex Fase I con dos variables artificiales, lo más probable es que lleguen a la dirección (que también cumple lo anterior):

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Nota de corrección: Se asignan 2 puntos por encontrar una dirección h tal que $Ah = 0$, y 2 puntos por demostrar que $c^T h < 0$. Se descuenta 1 punto por un error, 2 puntos por dos errores.

(iv) **(3 puntos)** Utilice el método gráfico para solucionar este problema de optimización lineal. Identifique claramente cuáles fueron los vértices que evaluó en cada iteración de Simplex Fase I y II, y cuál es la solución y valor óptimo - o, en caso de ser no acotado, explique gráficamente por qué lo es.

Solución:

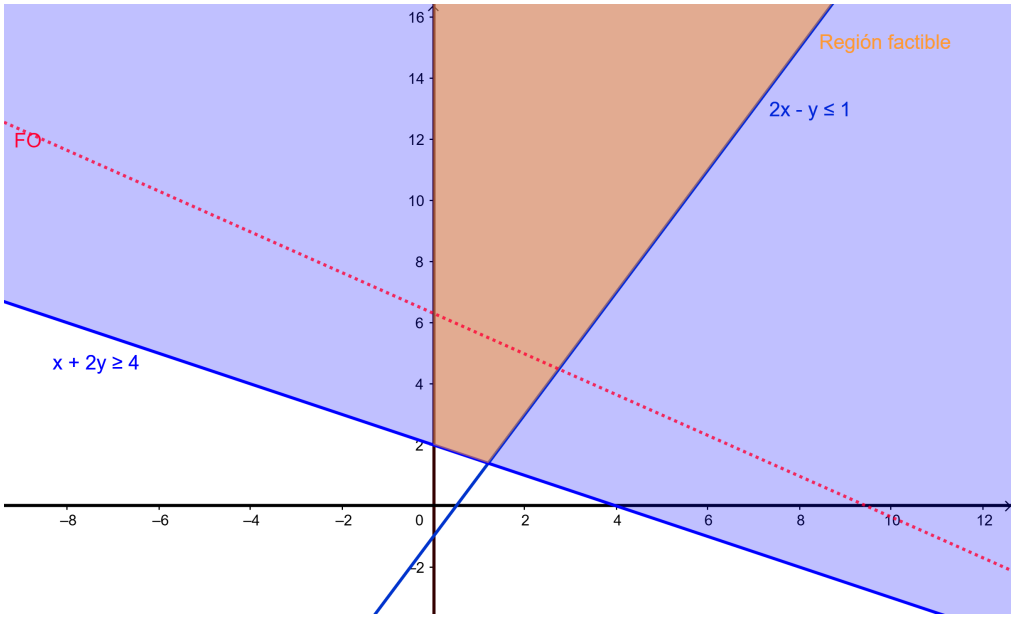


Figura 1: Método gráfico

Nota de corrección: Se asigna 1 punto por mostrar los vértices encontrados en Fase 1, 1 punto por mostrar los de Fase 2, y 1 punto por concluir correctamente que el problema no es acotado y el valor óptimo es infinito. Se descuenta 1 punto por cada elemento omitido.