PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2021 - 2
Profesores: : R. Cuadrado - J. González - M. Klapp - S. Vásquez - F. Verástegui

Interrogación 2
Duración: 120 minutos.

Pregunta 1 (20 puntos)

Considere el siguiente poliedro $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} x_i + x_j &\leq 3 \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, 4\} : i \neq j \\ x_i &\geq 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, 4\} \end{aligned}$$

y responda a cada una de las preguntas a continuación:

(i) (10p) Determine todos los vértices del poliedro $\mathbb{D}$.

Solución: Los vértices del poliedro son 10:

- $(0,0,0,0)$ (activando las no-negatividades)
- $(3,0,0,0), (0,3,0,0), (0,0,3,0), (0,0,0,3)$ (activando 3 no-negatividades y una restricción más l.i. con ellas)
- $(3/2,3/2,3/2,0), (3/2,3/2,0,3/2), (3/2,0,3/2,3/2), (0,3/2,3/2,3/2)$ (activando una no-negatividades y tres restricciones l.i. adicionales)
- $(3/2,3/2,3/2,3/2)$ (activando todas las restricciones adicionales a las no-negatividades (hay 4l.i.))

(ii) (6p) Considere un problema (P) de optimización dado por

$$\text{máx}\{c^T x \ s.a. \ x \in \mathbb{D}\}$$

para un vector de costos $c \in \mathbb{R}^4$ dado. ¿Para cuáles de las siguientes soluciones x_0 existe un vector c tal que x_0 es la solución óptima única del problema (P)?

- $x_0 = (0,0,0,0)$
- $x_0 = (3/2,0,3/2,0)$
- $x_0 = (3/2,0,3/2,3/2)$

Justifique cada caso determinando dicho vector c o explicando por qué no existe.

Solución:

- $x_0 = (0,0,0,0)$: es un vértice, por lo que debe existir dicho c. Por ejemplo $c^T = (-1,-1,-1,-1)$.
- $x_0 = (3/2,0,3/2,0)$: No existe, pues no es vértice del poliedro. Si fuese solución óptima, entonces no sería única.

- $\diamond$ $x_0 = (3/2, 0, 3/2, 3/2)$: Es un vértice. Una combinación cónica de los gradientes de sus restricciones activas con multiplicadores estrictamente positivos logran un vector objetivo cuyo problema asociado solo se maximiza en $(3/2, 0, 3/2, 3/2)$. Por ejemplo, la suma de gradientes: $c = (0, -1, 0, 0) + (1, 0, 1, 0) + (1, 0, 0, 1) + (0, 0, 1, 1) = (2, -1, 2, 2)$

(iii) (4p) Encuentre todas las soluciones óptimas de:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathbb{D} \end{aligned}$$

Solución: De los vértices, los dos que alcanzan el valor óptimo de $27/2$ son:

- $\diamond$ $x_1* = (0, 3/2, 3/2, 3/2)$
- $\diamond$ $x_2* = (3/2, 3/2, 3/2, 3/2)$

Luego, el conjunto de soluciones óptima toda solución formada por: $x^* = \lambda \cdot x_1^* + (1 - \lambda) \cdot x_2^*$ para cualquier $\lambda \in [0, 1]$. Es decir: $x* = (3/2 \cdot \lambda, 3/2, 3/2, 3/2)$

Pregunta 2 (18 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned}
(\text{P}) \quad \text{máx} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\
& -2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\
& x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

(i) (8p) Ejecute el método simplex desde la base $B = \{x_1, x_2, x_4\}$ hasta alcanzar una solución óptima de (P).

Hint:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & -2/3 \\ 1/3 & 1 & 4/3 \end{bmatrix}$$

Solución:
Iteración 1: $B = \{x_1, x_2, x_4\}$
Costos Reducidos: ${r_D}^T = c_D^T - c_B^T A_B^{-1} A_D = (-5/3, 4/3)$
Ratio salida: $\delta = A_B^{-1} A_D / A_B^{-1} b = \{5, \cdot, 7/2\}$
Sale x_4 e ingresa x_5.

Iteración 2: $B = \{x_1, x_2, x_5\}$
Costos Reducidos: ${r_D}^T = c_r^T - c_B^T A_B^{-1} A_D = (-2, -1) \leq 0$ (la condición de optimalidad en problemas de maximización es costos reducidos no positivos)
Por lo tanto cumple con criterio de optimalidad.
$x_B = A_B^{-1} b = (1/2, 3, 7/2)$
$z = c_B^T A_B^{-1} b = 10$

(ii) (5p) Identifique todos los valores posibles que puede tener c_2 (es decir, el coeficiente de x_2 en la función objetivo actualmente en $c_2 = 3$) para que la solución óptima que usted obtuvo no sea única.

Solución:
Lo que nos interesa, es evaluar para que valor de δ alguno de los nuevos costos reducidos se hace 0.
${r'}_D^T = c_D^T - {c'}_B^T A_B^{-1} A_D = ((-\delta - 4)/2, (-\delta - 2)/2)$

Por lo tanto tenemos dos casos, cuando $\delta = -4$ y $\delta = -2$. En el primer caso, el costo reducido de x_3 se hace 0, quedando la función objetivo como max $2x_1 - x_2$, generando curvas de nivel paralelas a la segunda restricción. En el segundo caso, el costo reducido de x_4 se hace 0, quedando la función objetivo como max $2x_1 + x_2$, generando curvas de nivel paralelas a la primera restricción.

(iii) (5p) Considere ahora el siguiente problema similar a (P), pero donde el coeficiente de x_3 en la primera restricción cambia de signo:

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{Q}) & \text{máx} & 2x_1 + 3x_2 \\
& \text{s.a.} & 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\
& & -2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\
& & x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\
& & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

A través del método simplex, optimice este problema o demuestre que no posee solución.

Hint: Si es cuidadoso puede reutilizar algunos de sus cálculos anteriores.

Solución: En este caso, la solución óptima anterior (asociada a la base $B = \{1, 2, 5\}$ es factible (x_3 está fuera de base). Sin, embargo, el cambio de coeficientes de las restricciones genera que cambie de signo el costo reducido asociado a x_3 (${r_D}^T = (2, -1)$), por lo que la solución no sería óptima, pero si factible.

En este nuevo escenario, nos damos cuenta que el dominio del problema posee un rayo con mejora marginal positiva, por lo que el problema no está acotado y su valor óptimo es infinito. Esto, pues al subir de valor x_3 (cuyo costo reducido es positivo) todas las variables básicas pueden compensar la restricción y crecer arbitrariamente. BAsta revisar el sistema: $x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_3x_3$:
$x_1 = 1/2 + 1/4 \cdot x_3$
$x_2 = 3 + 1/2 \cdot x_3$
$x_5 = 7/2 + 1/4 \cdot x_3$

Pregunta 3

Parte A (13 puntos)

(i) (5p) Defina la siguiente función unidimensional $f(t) := -\ln(100 - |t|)$. Muestre que $f(t)$ es convexa para todo $t \in (-100, 100)$.

Solución: Notemos que $|t|$ es una función convexa para todo $t \in (-100, 100)$, por lo que $100 - |t|$ es cóncava. Dado que $\ln(\cdot)$ es una función creciente, $\log(100 - |t|)$ es cóncava y $-\log(100 - |t|)$ es convexa.

(ii) (4p) Sea $\mathbb{D} := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \sum_{i=1}^{3} x_i = 1; \quad 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3 \right\}$. Usando el resultado de la pregunta anterior, muestre que la función f cumple que

$$f(c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3) \leq x_1 \cdot f(c_1) + x_2 \cdot f(c_2) + x_3 \cdot f(c_3),$$

para todo $x \in \mathbb{D}$.

Solución: Por simplicidad, se permite asumir que c es tal que $f(\cdot)$ estará siempre bien definida (i.e. $|c_1| + |c_2| + |c_3| < 100$). Se tiene que

$$\begin{aligned} f(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3) &= f\left(x_1c_1 + (1 - x_1)\left[\frac{x_2}{1 - x_1}c_2 + \frac{x_3}{1 - x_1}c_3\right]\right) \\ &\leq x_1 f(c_1) + (1 - x_1) f\left(\frac{x_2}{1 - x_1}c_2 + \frac{x_3}{1 - x_1}c_3\right) \\ &\leq x_1 f(c_1) + (1 - x_1)\left[\frac{x_2}{1 - x_1}f(c_2) + \frac{x_3}{1 - x_1}f(c_3)\right] \\ &= x_1 f(c_1) + x_2 f(c_2) + x_3 f(c_3). \end{aligned}$$

donde las desigualdades se deben a la convexidad de f. Notar que si x es factible para (R), se tiene que $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, por lo que $\frac{x_2}{1-x_1} + \frac{x_3}{1-x_1} = 1$.

(iii) (4p) Sea el siguiente problema (P):

$$\begin{aligned} (P) \quad \text{mín} \quad & -\ln\left(100 - |c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3|\right) \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \qquad\qquad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Muestre que el problema (P) es equivalente al siguiente problema (Q) de optimización lineal:

$$\begin{aligned} (Q) \quad \text{máx} \quad & w \\ \text{s.a.} \quad & w + c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 \leq 100 \\ & w - c_1 \cdot x_1 - c_2 \cdot x_2 - c_3 \cdot x_3 \leq 100 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \qquad\qquad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Solución: Por simplicidad, se permite asumir que c es tal que $f(\cdot)$ estará siempre bien definida (i.e. $|c_1| + |c_2| + |c_3| < 100$). Usemos $c^\top x = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$. Dado que $e^{(\cdot)}$ es una función creciente, se tiene que (P) es equivalente a

$$\begin{aligned} & \text{mín} && e^{-\log(100-|c^\top x|)} \\ & \text{s.a.} && \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & && 0 \le x_i \le 1 \qquad\qquad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sim \quad & \text{mín} && (100 - |c^\top x|)^{-1} \\ & \text{s.a.} && \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & && 0 \le x_i \le 1 \qquad\qquad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sim \quad & \text{mín} && z \\ & \text{s.a.} && (100 - |c^\top x|)^{-1} \le z \\ & && \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & && 0 \le x_i \le 1 \qquad\qquad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Como cualquier z factible es tal que $z \ge 100^{-1} > 0$, se tiene que $(100 - |c^\top x|) \ge z^{-1}$. Es decir,

$$\begin{aligned} (P) \quad \sim \quad & \text{mín} && z \\ & \text{s.a.} && (100 - |c^\top x|) \ge z^{-1} \\ & && z \ge 100^{-1} \\ & && \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & && 0 \le x_i \le 1 \qquad\qquad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $w \leftarrow z^{-1}$, se obtiene que

$$\begin{aligned} (P) \quad \sim \quad & \text{mín} && w^{-1} \\ & \text{s.a.} && (100 - |c^\top x|) \ge w \\ & && w^{-1} \ge 100^{-1} \\ & && \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & && 0 \le x_i \le 1 \qquad\qquad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Dado que $w^{-1} = z \ge 100^{-1} > 0$, se tiene que $0 \le w \le 100$. Es decir,

$$
\begin{array}{rlll}
(P) \sim & \text{mín} & w^{-1} & \\
& \text{s.a.} & (100 - |c^\top x|) \geq w & \\
& & 0 \leq w \leq 100 & \\
& & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 & \\
& & 0 \leq x_i \leq 1 & i = 1, \ldots, n.
\end{array}
$$

Como w^{-1} es una función positiva, se tiene que

$$
\begin{array}{rlll}
(P) \sim & \text{máx} & w & \\
& \text{s.a.} & (100 - |c^\top x|) \geq w & \\
& & 0 \leq w \leq 100 & \\
& & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 & \\
& & 0 \leq x_i \leq 1 & i = 1, \ldots, n.
\end{array}
$$

Dado que $w \leq (100 - |c^\top x|) \leq 100$, la restricción $w \leq 100$ se vuelve redundante. Por ende,

$$
\begin{array}{rlll}
(P) \sim & \text{máx} & w & \\
& \text{s.a.} & |c^\top x| \leq 100 - w & \\
& & w \geq 0 & \\
& & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 & \\
& & 0 \leq x_i \leq 1 & i = 1, \ldots, n.
\end{array}
$$

Como se está maximizando y $(w, x) = (0, x)$ es solución factible, se puede prescindir de la restricción $w \geq 0$. Por ello,

$$
\begin{array}{rlll}
(P) \sim & \text{máx} & w & \\
& \text{s.a.} & |c^\top x| \leq 100 - w & \\
& & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 & \\
& & 0 \leq x_i \leq 1 & i = 1, \ldots, n.
\end{array}
$$

Finalmente, como $|c^\top x| = \text{máx}\{c^\top x,\ -c^\top x\} \leq 100 - w$, se corrobora que

$$(P) \sim (Q) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & w \\ \text{s.a.} & c^\top x \leq 100 - w \\ & -c^\top x \leq 100 - w \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \qquad\qquad i = 1, \ldots, n. \end{array}$$

Parte B (9 puntos)

Suponga que Usted está a cargo de la venta de n tipos de productos en su compañía. En particular, debe decidir el precio de venta y la cantidad a ofrecer al mercado de cada uno de los productos en el conjunto $\{1, \ldots, n\}$ (puede asumir que estos productos son divisibles). Un estudio de mercado ha determinado que el precio por unidad (p_j) y la demanda q_j (en unidades demandadas) de un producto j están relacionados por la ecuación $q_j = h_j - p_j$, donde $h_j > 0$ es un parámetro conocido. Adicionalmente, por temas logísticos, sabe que no puede vender más allá de $U > 0$ unidades en total sumando todos los productos ofrecidos.

(i) (5p) Formule un modelo de optimización no lineal que permita encontrar el precio y cantidad óptima a vender para cada uno de los productos de modo de maximizar los ingresos totales.

Solución: Sea p_j la variable que indica el precio del producto j, y sea q_j la variable que indica la cantidad a vender del producto j. El modelo de optimización es:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & \sum p_j q_j & \\ s.a. & q_j = h_j - p_j & \forall j \in \{1, ..., n\} \quad (1) \\ & \sum_{j=1}^{n} q_j \leq U & (2) \\ & q_j, x_j \geq 0 & \forall j \in \{1, ..., n\} \quad (3) \end{array}$$

(ii) (4p) Muestre que el problema formulado admite solución óptima.

Solución: Para esto, utilizaremos el teorema de Bolzano-Weierstrass:

- ◇ La función objetivo es continua en todo el dominio, se puede ver por simple inspección.
- ◇ El dominio es cerrado, pues todas las restricciones son no estrictas.
- ◇ El dominio es acotado. La variable q_j está acotada inferiormente (naturaleza) y superiormente por la restricción (2). La variable p_j está acotada inferiormente (naturaleza). Por la restricción (1), se puede deducir que p_j está acotado superiormente por h_j.
- ◇ El dominio es no vacío. Una solución factible sería el punto $(q_j, p_j) = (0, h_j) \quad \forall j \in \{1, ..., n\}$