PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2020 - 2
Profesores: : G. Angulo - R. Cuadrado
J. González - P. Guajardo

Interrogación 2

Duración: 120 minutos.

INSTRUCCIONES:

- *La prueba contiene 60 puntos.*
- *La prueba es sin apuntes y sin equipos electrónicos. Dichos equipos deben estar siempre apagados.*

Pregunta 1 (20 puntos)

Suponga que usted está a cargo de la distribución de agua en un pueblo lejano en el cual existe escasez de este recurso. En particular, se ha determinado que existen lugares específicos dentro del pueblo (listados en el conjunto K) en donde se dispondrá de agua para sus habitantes. Se conoce que cada punto k tendrá una demanda de d_k m^3. Sin embargo, es necesario transportar el agua desde distintas matrices, contenidas en el conjunto M. Cada matriz m de agua posee e_m m^3. El agua se debe transportar a través de cañerías (que no existen actualmente, sino que se deben construir) y también se sabe que estas cañerías no pueden pasar por cualquier lado. El pueblo ha sido estudiado y se puede representar a través de una red dirigida $G = (N, A)$, en donde N es el conjunto de todos los nodos en donde pueden pasar las cañerías (asuma que $K \subset N$ y $M \subset N$) y A es el conjunto que contiene todas las posibles conexiones entre los nodos.

Cada cañería que conecte dos nodos i y j tiene un costo de construcción de b_{ij} y una capacidad máxima de u_{ij}. Además, por cada m^3 que se decida transportar por esa cañería, se deberá incurrir en un costo de c_{ij}.

a) **(12 puntos)** Escriba un modelo de optimización lineal entera mixta que permita encontrar la distribución de agua a mínimo costo y que cumpla con la demanda del pueblo. Asuma que el agua total almacenada en las matrices es igual a la demanda total.

Solución:

Se definen las siguientes variables:

- x_{ij}: flujo de agua que pasa entre nodos i y j.
- y_{ij}: $\begin{cases} 1 & \text{Si se construye una cañería en el arco } (i,j) \in A \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$

Función objetivo: minimizar el costo total.

$$\text{mín} \sum_{(i,j)\in A} b_{ij} y_{ij} + \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

Restricciones:

◇ Conservación de flujo para todos los nodos:

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{k:(k,i)\in A} x_{ki} = e_i \qquad \forall i \in M$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{k:(k,i)\in A} x_{ki} = -d_i \qquad \forall i \in K$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{k:(k,i)\in A} x_{ki} = 0 \qquad \forall i \in N \setminus \{K \cup M\}$$

◇ Solo puede haber flujo de agua donde se decide construir una cañería, con su capacidad respectiva:

$$x_{ij} \leq y_{ij} u_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A$$

◇ Naturaleza de variables

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall (i,j) \in A$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in A$$

Suponga ahora que el alcalde del pueblo, contento con su trabajo, le ha pedido modificar su planificación. En particular, debido a las complejidades asociadas a los puntos de demanda de agua, se ha determinado que solo puede existir una cañería de agua que llegue a cada punto de demanda. De igual forma, solo puede existir una cañería que salga de cada matriz de agua. Además, en cada nodo que existan 3 o más cañerías incidentes, se deberá pagar un costo adicional F asociado a la complejidad de la maniobra.

b) **(8 puntos)** Escriba los cambios que realizaría al modelo planteado para incorporar las nuevas peticiones del alcalde.

Solución:

Para esto, agregamos la siguiente variable:

◇ z_i: $\begin{cases} 1 & \text{Si el nodo } i \in N \text{ tiene 3 o más cañerías incidentes.} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$

Agregamos las siguiente restricciones:

◇ Máximo de una cañería saliente/entrante a una matriz/punto de demanda:

$$\sum_{j:(i,j)\in A} y_{ij} \leq 1 \qquad \forall i \in M$$

$$\sum_{k:(k,i)\in A} y_{ki} \leq 1 \qquad \forall i \in K$$

◇ Activación de la variable z_i:

$$\sum_{j:(i,j)\in A} y_{ij} + \sum_{k:(k,i)\in A} y_{ki} \leq 2 + z_i|A| \qquad \forall i \in N$$

* $|A|$ corresponde al número de arcos de la red. Se puede utilizar también un $bigM$.

◇ Naturaleza de la nueva variable

$$z_i \in \{0,1\} \qquad \forall i \in N$$

Y se agrega un término en la función objetivo:

$$\text{mín} \sum_{(i,j)\in A} b_{ij}y_{ij} + \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in N} z_i F$$

Pregunta 2 (20 puntos)

Considere el siguiente problema con dos restricciones, la primera para el recurso A (8 unidades) y la segunda para el recurso B (10 unidades):

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \\ s.a. & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 8 \\ & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array}$$

(a) **(7 puntos)** Compruebe, utilizando cualquiera de los métodos vistos en el curso, que la solución óptima es $(22/5, 0, 6/5, 0)$.

Solución: Se puede resolver comprobando que todos los costos reducidos de la base asociada a la solución óptima sean no positivos. La solución entregada está compuesta por la base $\{x_1, x_3\}$, con costos reducidos $[-3, -13/5, -4/5, -3/5]$.

Otra forma de resolver el problema es construyendo el problema dual, resolviendo gráficamente, y comprobando mediante el teorema fuerte de dualidad que el valor óptimo igual a $\frac{62}{5}$ es el mismo en ambos problemas.

(b) **(7 puntos)** Asuma que una unidad del recurso A tiene el mismo costo que una del recurso B. Si pudiese aumentar en una unidad uno de los dos recursos, ¿en cuál lo haría? ¿Cuál es el valor máximo que estaría dispuesto a pagar por una unidad de dicho recurso?

Solución: Debemos obtener el precio sombra de ambos recursos y elegir el más grande, dado que tendrá un mayor cambio en la función objetivo.

El precio sombra del recurso A es $\frac{4}{5}$ y el del recurso B es $\frac{3}{5}$. Por lo tanto, invertiría en el recurso A. Lo máximo que estaría dispuesto a invertir por una unidad del recurso A es $\frac{4}{5}$ dado que cualquier inversión superior a eso sería mayor a la ganancia obtenida por dicha inversión.

(c) **(6 puntos)** Si el modelo es modificado, incorporando las variables x_5 y x_6, determine la relación de valores entre α y β para que el problema sea no acotado

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + \alpha x_5 + \beta x_6 \\ s.a. & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 - 6x_6 \leq 8 \\ & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 + 4x_6 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ & x_5 \in \mathbb{R} \\ & x_6 \leq 0. \end{array}$$

Solución:

Se buscará demostrar el no acotamiento mediante dualidad. Lo primero es darse cuenta que el problema primal es factible, en donde el vector de ceros es factible para el problema. Luego, basta demostrar que el problema dual es infactible para que el problema primal sea no acotado. Enfocándonos en las 2 nuevas variables que se incorporan al modelo, si construimos el problema dual nos damos cuenta que se generan las siguientes restricciones

$$\begin{array}{l} 3y_1 - 2y_2 = \alpha \\ -6y_1 + 4y_2 \leq \beta \end{array}$$

Por lo que multiplicando por -1/2 la segunda restricción, es fácil darse cuenta que ambas restricciones no se podrán cumplir simultáneamente si $\alpha < -\beta/2$.

Pregunta 3 (20 puntos)

(a) **(8 puntos)** Considere un problema lineal entero que incluye variables binarias x_i, x_j y x_k, junto a las restricciones $x_i + x_j \leq 1$, $x_i + x_k \leq 1$ y $x_j + x_k \leq 1$.

(i) **(4 puntos)** Explique por qué podemos reemplazar las tres restricciones anteriores por la desigualdad $x_i + x_j + x_k \leq 1$.

Solución: Las tres restricciones del problema implican que si alguna variable toma el valor 1, entonces las dos restantes deben tomar el valor 0. La desigualdad propuesta precisamente indica que a lo más una variable puede tomar el valor 1.

(ii) **(4 puntos)** Considerando $(x_i, x_j, x_k) = (1/2, 1/2, 1/2)$, explique la utilidad de considerar la desigualdad anterior.

Solución: Los valores indicados pueden corresponder a una solución fraccionaria de la relajación lineal de la formulación original, pues satisfacen las tres restricciones del problema. Sin embargo, violan la desigualdad propuesta, por lo que ella efectivamente fortalece la formulación.

(b) **(8 puntos)** Suponga que está resolviendo un problema lineal entero mediante branch–and–bound. Al resolver la relajación lineal (P_0), obtiene una solución fraccionaria con valor objetivo 10, por lo que crea los subproblemas (P_1) y (P_2). Al resolver (P_1), nuevamente obtiene una solución fraccionaria, por lo que crea los subproblemas (P_3) y (P_4), los cuales a su vez tienen soluciones fraccionarias con valores objetivo 13 y 19, respectivamente.

(i) **(4 puntos)** Indique si el problema es de minimización o maximización, y determine el rango de valores posibles para el valor óptimo de (P_1). Justifique claramente.

Solución: Como los valores óptimos de los subproblemas son crecientes, el problema es de minimización. En particular, el valor óptimo de (P_1) debe ser mayor o igual al de (P_0), pero menor o igual al de (P_3) y (P_4). Luego, puede tomar valores entre 10 y 13.

(ii) **(4 puntos)** Suponga que ahora resuelve (P_2), obteniendo una solución entera con valor objetivo 16. Determine qué pasa con las ramas derivadas de (P_2), (P_3) y (P_4).

Solución: La solución de (P_2) pasa a ser el incumbente, con valor 16, y además podamos esta rama por integralidad. Como el valor óptimo de (P_4) es mayor al del incumbente, podamos esta rama por cota. Finalmente, como el valor óptimo de (P_3) es menor que el del incumbente, esta rama debe ser explorada.

(c) **(4 puntos)** Considere un problema de flujo a costo mínimo donde ofertas y demandas en los n nodos y capacidades en los m arcos son números enteros. Si las variables de flujo deben ser enteras, estime la cantidad de subproblemas necesarios para resolver el problema mediante branch–and–bound.

Solución: Dada la propiedad de integralidad de los problemas de flujo con lado derecho entero y cotas enteras, la relajación lineal tiene solución óptima entera, por lo que se requiere resolver solamente dicho subproblema.

Tabla de dualidad:

Minimización	Maximización
Variables	Restricciones
≥ 0	$\leq$
≤ 0	$\geq$
Irrestrictas	$=$
Restricciones	Variables
$\leq$	≤ 0
$\geq$	≥ 0
$=$	Irrestrictas