INTERROGACIÓN 1

ICS1102 Optimización

26 de Marzo, 2009

INSTRUCCIONES: La prueba tiene 100 puntos y durará 120 minutos, sin extensión. No se permitirá el uso de calculadoras. La prueba tiene 4 partes por lo que deberán contestar cada una en hojas separadas y no deben olvidar poner su nombre y su número a cada hoja. No se debe descorchetear el cuadernillo de respuestas en ningún momento durante la prueba. Se descontará 10 puntos a aquellos que no cumplan con alguna de estas instrucciones.

PARTE 1 (25pts.)

Una compañía minera operará en una cierta región por los próximos 5 años. Hay 4 minas de su propiedad en la región, pero solo pueden operar a lo más tres de ellas en un mismo año. Si la mina i no opera durante el año t, deberá pagar derechos por una cantidad R_{it} para permanecer en categoría de "abierta" y poder operar en el futuro. Si una mina desea ser "cerrada" permanentemente, entonces no pagará los derechos. Hay un límite máximo de la cantidad de oro que puede extraerse de cada mina por año, este límite es M_i para la mina i. El oro de las distintas minas es de diferente calidad. Esta calidad es medida en una cierta escala y la combinación de oros resulta en una combinación lineal de la medida de calidad, es decir, si iguales cantidades de dos tipos de oro son combinadas, el oro resultante tendrá una calidad media entre las calidades de ambos tipos de oro. La medida de calidad del oro de la mina i es Q_i. En cada año es necesario combinar las extracciones de cada mina para producir oro combinado de al menos una calidad estipulada P_t para el año t. El oro combinado final se vende en el año t en I_t US$ por tonelada.

Formule un modelo lineal que maximice las ventas de la compañía minera en los próximos 5 años.

PARTE 2 (25pts.)

a) (6 pts.) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{e^{2x}}{e^{3y+z^2}} \\ s.a. \quad & x-2y+3z^2 \leq 5 \\ & \log(2x+y) \geq 0 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

Escriba este problema como uno de Programación Lineal equivalente. Justifique con claridad cada transformación que realice.

b) (6 pts.) Considere el siguiente problema de optimización en dos variables:

$$\begin{aligned} \min \quad & x^2 - y^2 \\ s.a. \quad & x \geq 0 \\ & x + y \leq 1 \end{aligned}$$

¿Tiene solución óptima este problema? Justifique con claridad su respuesta.

c) (6 pts.) Sea $f(x)$ convexa. Dado el problema

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.a. \quad & a + x^2 \geq 0 \end{aligned}$$

¿Para qué valores del escalar a el problema es convexo?

d) (7 pts.) Demuestre formalmente si la función $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 5x - 4$ es convexa o no. Para su demostración debe utilizar la definición básica de convexidad u otras propiedades básicas. No debe utilizar ni intuición, ni dibujos, ni el criterio de la matriz Hessiana para realizar su demostración.

PARTE 3 (25pts.)

En forma muy breve y precisa conteste las siguientes preguntas:

a) (3 pts.) ¿Qué es optimizar?
b) (3 pts.) ¿Qué es un modelo?
c) (3 pts.) "Todo problema que admita solución factible admite solución óptima". Comente.
d) (3 pts.) "Un modelo de programación entera es aquel que no solo contiene variables continuas sino que también variables enteras". Comente.
e) (3 pts.) "Dos modelos equivalentes tienen la misma solución óptima". Comente.
f) (4 pts.) Suponga que tiene un problema de producción en que quiere minimizar los costos totales y a la vez quiere que el número de trabajadores involucrados sea el menor posible. ¿Cómo enfrentaría este problema?
g) (6 pts.) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \max \quad & ax + by \\ s.a. \quad & x + y \leq 4 \\ & x + y \geq 2 \\ & x \geq y \end{aligned}$$

¿Para qué valores de los parámetros a y b el problema no tiene solución óptima? Explique con claridad y justificadamente su respuesta.

PARTE 4 (25pts.)

Una empresa del sector eléctrico posee m centrales de generación eléctrica con tecnología térmica, con las que puede abastecer a p ciudades. La ciudad j tiene una demanda igual a d_j MW (mega-watts) de potencia, $j = 1,..., p$. La central generadora i tiene una *capacidad* máxima de generación de K_i MW, $i = 1,..., m$, cumpliéndose que

$$\sum_{i=1}^{m} K_i \geq \sum_{j=1}^{p} d_j$$

Debido a los tendidos eléctricos, existe un costo de transmisión si una central abastece a una ciudad. Sea c_{ij} el costo unitario de enviar energía entre la central i y la ciudad j. Por otra parte, la generación eléctrica en la central i tiene un costo: sea e_i el costo de generar un MW en la central i, $i = 1,...,m$. Adicionalmente, existe un costo de partida en el cual se incurre si una central se pone en marcha. Sea H_i el costo fijo de partida en el que se incurre si se usa la central i. La autoridad reguladora ha establecido también que con el objetivo de disminuir las emisiones de gases invernadero se han definido ciertos conjuntos de centrales no pueden estar funcionando simultáneamente. Más específicamente, para cada central i, existe un conjunto de centrales $J(i) \subset \{1,...,m\}$ tal que si la central i es utilizada, no puede usarse ninguna de las centrales en el conjunto $J(i)$.

Escriba un modelo de optimización que permita determinar la política óptima de generación, es decir, cuánto debe generar cada central y a donde enviarlo de modo que el costo total (costo de generación, más transmisión y costo de partida) sea mínimo, se satisfaga la demanda, no se exceda la capacidad de generación, y se respete las restricciones medioambientales.