PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2020 - 1
Profesores: : M. Arancibia - R. Cuadrado - J. González P. Guajardo - M. Klapp

Examen

Duración: 1:10 horas (10 min de escaneo).

INSTRUCCIONES:

- *La prueba contiene 60 puntos.*
- *La prueba es sin apuntes y sin equipos electrónicos. Dichos equipos deben estar siempre apagados.*

Primera parte (32 puntos)

Pregunta 1 (15 puntos)

El equipo docente del curso le solicita al ayudante Francisco agendar las presentaciones de los 95 grupos del curso en 13 bloques de tiempo disponibles de un módulo de duración. Defina a $G := \{1, \ldots, 95\}$ y $B := \{1, \ldots, 13\}$ como los conjuntos de grupos y bloques disponibles, respectivamente. Cada bloque b ocurre en un módulo h_b de la semana (por ejemplo, W3) y puede haber más de un bloque ocurriendo simultáneamente en un módulo. Francisco debe programar 7 u 8 grupos por bloque y garantizar que la agenda sea compatible con la disponibilidad de horarios de cada grupo. Para ello, el ayudante solicita que cada grupo $g \in G$ comunique tres módulos en donde podrían presentar (conjunto H_g).

Adicionalmente, el equipo docente solicita a Francisco que cada bloque tenga un promedio de notas preliminares similar al promedio del curso. Considere que cada grupo $g \in G$ esta calificado con una nota n_g antes de presentar. Formule un modelo de optimización lineal entera que agende presentaciones a bloques compatibles y que minimice la cantidad de bloques con un promedio de notas que se distancie más de tres décimas del promedio del curso.

Solución: Definamos el conjunto de bloques factibles por grupo como $B_g = \{b \in B : h_b \in H_g\}$ y el promedio del curso como $\bar{n} = \frac{\sum_{g \in G} n_g}{95}$.

Variables: 5 puntos (3 por x la decisión fundamental)

- $x_{gb} \in \{0, 1\}$ si se asigna el grupo $g \in G$ al bloque $b \in B_g$.
- $y_b \in \{0, 1\}$ si bloque $b \in B$ posee 8 grupos (si no posee 7)
- $z_b \in \{0, 1\}$ bloque $b \in B$ fuera de rango

Modelo: 10 puntos: 5 por modelar la asignación (rest. (2), (3) y naturaleza de vars.) y 5 por el

objetivo y las restricciones (4) y (5)))

$$\min_{x,y} \quad \sum_{b \in B} z_b \tag{1}$$

$$\text{s.a.} \sum_{b \in B_g} x_{g,b} = 1, \qquad g \in G \tag{2}$$

$$\sum_{g \in G : b \in B_g} x_{g,b} = 7 + y_b, \qquad b \in B \tag{3}$$

$$\sum_{g \in G : b \in B_g} n_g \cdot x_{g,b} \leq (y_b + 7) \cdot (\bar{n} + 0,3) + M \cdot z_b, \qquad b \in B \tag{4}$$

$$\sum_{g \in G : b \in B_g} n_g \cdot x_{g,b} \geq (y_b + 7) \cdot (\bar{n} - 0,3) - M \cdot z_b, \qquad b \in B \tag{5}$$

$$x_{g,b} \in \{0,1\}, \qquad g \in G,\ b \in B_g \tag{6}$$

$$z_b, y_b \in \{0,1\}, \qquad b \in B_g \tag{7}$$

Pregunta 2 (10 puntos)

(a) Considere el siguiente problema

$$\begin{array}{lll} P: & \text{máx} & b^T y \\ & s.a. & A^T y \leq 0 \\ & & y_i \leq 1, \quad i \in \{1, \ldots, m\} \end{array}$$

, donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Pruebe matemáticamente que si existe una solución factible de P tal que $b^T y > 0$, entonces el siguiente dominio $n-$dimensional es vacío:

$$\mathbb{D} := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}.$$

Solución:

Al existir y factible de P tal que $b^T y > 0$ se implica que el valor óptimo es estrictamente positivo. También el siguiente problema D (dual de P) tendrá valor óptimo positivo

$$\begin{array}{lll} D: & \text{mín} & \sum_{j=1}^{m} z_j \\ & s.a. & Ax + Iz = b \\ & & x, z \geq 0. \end{array}$$

El modelo D es el problema de fase I del dominio $\mathbb{D}$, por lo que si tiene valor óptimo positivo, implica que $\mathbb{D}$ es infactible.

Pregunta 3 (7 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización entera P:

$$\begin{array}{llllll} \text{máx} & a \cdot x_1 & + & b \cdot x_2 & & \\ s.a. & x_1 & + & x_2 & \leq 3 \\ & 5x_1 & + & 2x_2 & \leq 10 \\ & & & x_1, x_2 & \in \mathbb{Z}^+ \end{array}$$

, donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros desconocidos. ¿Qué relación(es) se debe cumplir entre a y b para que la solución óptima de la relajación lineal de P sea solución óptima de P? Argumente.

NOTA: $\mathbb{Z}^+$ incluye a 0

Solución:

Se debe cumplir que la solución óptima de la relajación lineal ocurra en un vértice que posea valores enteros de x_1 y x_2.

Los vértices del dominio relajado son:

$$\{(0,0), (2,0), (0,3), (\frac{4}{3}, \frac{5}{3})\}$$

Mientras el vértice óptimo del problema relajado no sea el único vértice fraccionario, entonces podemos asegurar que ambas soluciones son la misma.

Por lo tanto, se debe cumplir que el gradiente (a, b) no esté en el cono generado por $(1, 1)$ y $(5, 2)$. Es decir, que no existan $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ tal que: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$.

Es decir, que no suceda que $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5b - 2a \\ a - b \end{bmatrix} \geq 0$, lo que se logra con a y b en el conjunto

$\{(a, b) : a < b \vee 5b < 2a\}$.