PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2015
Profesores: P.Álvarez - A.Cataldo
M.Fuentes - D.Pozo - J.Vera

Pauta Interrogación 2

Pregunta 1 (16 puntos)

(a) (**4 puntos**) Responda brevemente, pero con justificación clara, las siguientes preguntas:

(i) (**1 punto**) Suponga que un problema de Programación Lineal es no acotado. ¿Existe alguna condición que haga que la Fase I de ese problema sea, entonces, no acotada?

Respuesta: No, la Fase I siempre es un problema acotado ya que minimiza la suma de las variables artificiales y estas están acotadas por abajo por zero.

(ii) (**1 punto**) Si la relajación lineal de un problema de Programación Entera es infactible, entonces el problema entero original es también infactible. ¿Es verdad o no esta afirmación?

Respuesta: Efectivamente así es ya que el conjunto factible entero está incluido dentro del conjunto factible de la relajación lineal.

(iii) (**1 punto**) Considere un problema de Programación Entera de minimización. Suponga que hay un nodo (en una ramificación mediante el método de B&B) con solución no entera y se ramifica. ¿Es verdad que el valor óptimo de los dos problemas "hijos" será menor que el del nodo "padre"?

Respuesta: No, es más bien al contrario: como estamos minimizando, los valores de los nodos que se van generando son $\geq$ que los de los nodos padres.

(iv) (**1 punto**) Al resolver un problema de Programación lineal hasta el óptimo se obtiene una solución en donde una variable no básica tiene costo reducido nulo. ¿Significa esto que existe otro punto extremo del problema que también es solución óptima?

Respuesta: No garantizadamente. Puede haber una situación en donde el costo reducido sea nulo, pero por degenerancia, eso genere una base alternativa y no un punto extremo diferente. También puede ocurrir con un problema que sea casi no acotado.

(b) (**4 puntos**) Considere un problema lineal de la forma

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & c^T x \\ s.a. & \alpha_i^T x \leq b_i, i = 1, \ldots, m \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Suponga que se ha resuelto este problema hasta encontrar una solución óptima x^* y una correspondiente solución dual óptima π^*. Suponga que la restricción 1 se cumple con igualdad en el óptimo, es decir, $\alpha_1^T x^* = b_1$. Ahora queremos incrementar la disponibilidad del recurso representado por el lado derecho desde b_1 a $b_1 + \Delta$. Explique con claridad bajo qué condiciones es posible asegurar que el cambio que habrá en el valor óptimo es igual a $\pi_1^* \times \Delta$.

Respuesta: Las condiciones son que no exista degenerancia y por lo tanto la solución π_1 sea única, y que además el valor Δ esté dentro de los límites de sensibilidad que garantizan la validez de la base.

(c) (**4 puntos**) Responda, entregando una justificación adecuada, cada una de las siguientes preguntas.

(i) (**2 puntos**) En un problema de programación lineal entera, un buen camino de resolución es resolver el problema relajado y luego aproximar las variables al entero más cercano.

Respuesta: No, el redondear las variables puede dar soluciones factibles pero no óptimas, o incluso soluciones infactibles.

(ii) (**2 puntos**) En un problema de programación lineal entera de n variables, todas ellas variables binarias, ¿cuál es el máximo de niveles (profundidad) que tendrá el árbol de Ramificación y Acotamiento (B&B)?

Respuesta: En el peor caso, se ramifica primero una variable y de cada hijo salen dos para la segunda variable, y así sucesivamente, hasta completar n niveles, uno por cada variable.

Nota: Si alguien considera que resolver la relajación lineal es un nivel, entonces los niveles serán $n+1$***.***

(d) (**4 puntos**) Considere el siguiente problema de optimización lineal:

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.a. & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, ..., m \\ & x_j \geq 0 \;\; j = 1, ..., n. \end{array}$$

Pruebe que el valor $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$, donde $y_i, i = 1, \ldots, m$ son valores factibles de las variables del problema dual a P), es cota superior del valor de la función objetivo del problema P), para cualquier x factible.

Respuesta: Esto está hecho en clases y está en el material de estudio. El problema dual es:

$$D) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ s.a. & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad j = 1, ..., n \\ & y_i \geq 0 \;\; i = 1, ..., n. \end{array}$$

Como x es factible, se tiene $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, ..., m$. Como y es factible en el dual y es ≥ 0, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Reordenando la suma en el lado izquierdo tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j &= \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij}) x_j \\ &\geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho que y es factible en D). Luego, se tiene:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

Pregunta 2 (12 puntos)

(a) (**8 puntos**) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{máx} & 2x_1 + 12x_2 + 7x_3 \\ & s.a. & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10000 \quad \text{(recurso } b_1\text{)} \\ & & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4000 \quad \text{(recurso } b_2\text{)} \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Se sabe que la solución óptima es $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 4000$.

(i) (**2 puntos**) Determine, sin resolver el problema dual por Simplex, la solución y el valor óptimo del problema dual a (P).

(ii) (**2 puntos**) ¿Cuál es la tasa de incremento en la función objetivo si varía el lado derecho de la primera y segunda restricción respectivamente (considerando cambios marginales)? Interprete a qué se deben estos valores.

(iii) (**2 puntos**) ¿Cuál es el rango en el que puede variar el lado derecho de la segunda restricción de modo que la base siga siendo óptima?

(iv) (**2 puntos**) ¿Cambia la solución óptima si el coeficiente de la función objetivo asociado a la variable x_3 cambia de 7 a 5? Justifique su respuesta e indique, si es que la solución cambia, cómo la obtendría (sólo indíquelo).

Respuesta:

(i) Dada la información, la base es:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

con lo que se tiene que:

$$y = c_B^T \left(B^*\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \end{pmatrix}$$

luego, el valor de $y_1 = 0$ (variable dual asociada a la primera restricción del primal) e $y_2 = 7$ (variable dual asociada a la segunda restricción del primal). El valor de la función objetivo del dual es igual al óptimo del primal, que es $2 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 7 \cdot 4000 = 28000$.

Nota: Se puede llegar a la misma conclusión aplicando el Teorema de Holguras Complementarias.

(ii) Dada la solución obtenida en (i), se puede concluir que:

- ◇ La primera restricción no varía ya que no es activa ($y_1 = 0$).
- ◇ La segunda restricción varía en 7 unidades al variar en una unidad el lado derecho ($y_2 = 0$). Esto se debe a que la restricción asociada es activa y por lo tanto corresponde a un recurso limitante.

(iii) Para determinar lo solicitado se resuelve:

$$x_B = \left(B^*\right)^{-1} b \geq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 10000 \\ 4000 + \delta \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -4000 \leq \delta \leq 1000$$

donde δ es al rango solicitado.

(iv) Se deben calcular los costos reducidos de todas las variables no básicas bajo el cambio en el costo asociado a la variable x_3. Entonces:

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -12 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución óptima cambia, ya que no cumple con el criterio de optimalidad (forma estándar).
Para continuar desde este mismo punto, habría que aplicar el Simplex en el Primal, pues la base dejó de ser óptima pero no factible (se modificó la función objetivo).

(b) (**4 puntos**) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & -4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 8x_5 \\ s.a. & 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_5 = 3 \\ & x_1 - x_2 + x_4 - x_5 \geq 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Utilizando dualidad, ¿qué puede decir de la solución óptima de este problema?

Respuesta:
El dual queda:

$$\begin{array}{rl} \text{mín} & 3y_1 + 2y_2 \\ s.a. & 3y_1 + y_2 \geq 0 \\ & y_1 - y_2 \geq -4 \\ & 2y_1 \geq 3 \\ & y_2 \geq 3 \\ & 8y_1 - y_2 \geq -8 \\ & y_2 \leq 0 \end{array}$$

Al mirar las restricciones es claro que el problema dual es infactible ($y_2 \leq 0$ con $y_2 \geq 3$). Esto implica que el problema primal no tiene solución óptima ya que puede ser un problema no acotado o un problema infactible (Teorema Fuerte de Dualidad). Ahora, como el punto $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ y $x_5 = 0$ es solución factible del primal, luego, el problema primal debe ser no acotado.

Nota: Es completamente válido graficar el problema dual y a partir de eso llegar a la misma conclusión entregada arriba.

Pregunta 3 (17 puntos)

(a) (**10 puntos**) Considere un problema de optimización sobre dos variables, x_1 y x_2, ambas definidas enteras y no negativas. Al resolver mediante el algoritmo de Simplex la relajación lineal del problema se tiene que $x_1 = \frac{8}{19}$ y $x_2 = \frac{37}{19}$ es el valor óptimo de las variables. Además se determinó que el valor óptimo de la función objetivo (en la forma estándar) es igual a $\frac{-37}{19}$ y que los costos reducidos de las variables no básicas son $\frac{2}{19}$ y $\frac{3}{19}$, para las variables de holgura o exceso asociadas a la primera y segunda restricción respectivamente.

La solución óptima de la relajación lineal se puede cortar construyendo el siguiente corte de Gomory:

$$\left(\frac{3}{19} - \frac{0}{19}\right) x_3 + \left(\frac{-5}{19} - \frac{-19}{19}\right) x_4 \geq \frac{8}{19} - \frac{0}{19}$$

Basándose en la información anterior, construya el problema de optimización original en variables enteras.

Respuesta:
La información sobre el valor de la función objetivo en forma estándar y que el problema es de dos variables permite determinar:

$$c_1x_1 + c_2x_2 = c_1\frac{8}{19} + c_2\frac{37}{19} = \frac{-37}{19} \Rightarrow c_1 = 0 \text{ y } c_2 = -1$$

Ahora, con la información de los costos reducidos de las variables x_3 y x_4 se tiene:

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_3 & \bar{c}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{R} = \begin{pmatrix} \frac{2}{19} & \frac{3}{19} \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene una parte de $\bar{R}$, que es:

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{2}{19} & \frac{3}{19} \end{bmatrix}$$

De la información del corte propuesto, y del hecho de que este corte es sobre la variable x_1 (pues al lado derecho de la ecuación se aprecia el valor que tomó x_1), se sabe que:

$$(\bar{a}_{11} - \lfloor \bar{a}_{11} \rfloor)\, x_3 + (\bar{a}_{12} - \lfloor \bar{a}_{12} \rfloor)\, x_4 = \left(\frac{3}{19} - \frac{0}{19}\right) x_3 + \left(\frac{-5}{19} - \frac{-19}{19}\right) x_4$$

luego, se tiene la primera fila de la matriz $\bar{R}$, quedando:

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} \frac{3}{19} & \frac{-5}{19} \\ \frac{2}{19} & \frac{3}{19} \end{bmatrix}$$

Como se sabe que $\bar{R} = B^{-1}R$. Como en la forma estándar se usaron variables de holgura y/o exceso, y éstas conforman la matriz R, se tienen las siguientes posibilidades:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ o } \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ o } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ o } \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

consideremos la matriz identidad como la base. En este caso, se tiene que $\bar{R} = B^{-1}$. Por lo tanto, se puede determinar el valor de B como:

$$\left(B^{-1}\right)^{-1} = B = \begin{bmatrix} \frac{3}{19} & \frac{-5}{19} \\ \frac{2}{19} & \frac{3}{19} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Bajo este supuesto, se puede determinar el lado derecho de la restricciones. Se sabe que $\bar{b} = B^{-1}b$, luego:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{3}{19} & \frac{-5}{19} \\ \frac{2}{19} & \frac{3}{19} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{19} \\ \frac{37}{19} \end{pmatrix} \Rightarrow b = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Para determinar el signo de las restricciones se utiliza el corte entregado. El corte queda:

$$\left(\frac{3}{19} - \frac{0}{19}\right) x_3 + \left(\frac{-5}{19} - \frac{-19}{19}\right) x_4 = \frac{3}{19}x_3 + \frac{14}{19} \geq \frac{8}{19}x_4 \Rightarrow 3x_3 + 14x_4 \geq 8$$

llevando esto a las variables originales (sabiendo que $x_3 = 11 - 3x_1 - 5x_2$ y $x_4 = 5 + 2x_1 - 3x_2$) se tiene:

$$-19x_1 + 57x_2 \leq 95$$

En la Figura 1 se muestran las restricciones y el corte:

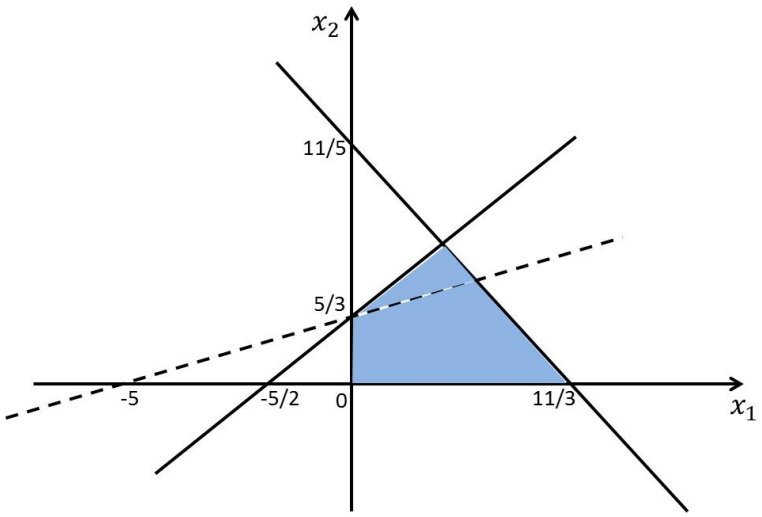


Figura 1: Gráfico del problema.

de donde se desprende que el área coloreada debe ser el espacio de soluciones factibles pues el corte debe cortar la solución óptima de la relajación lineal (que es la intersección entre las dos rectas). Con esto, finalmente, el problema original en variables enteras es:

$$\begin{array}{ll} \min & -x2 \\ \text{s.a.} & 3x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ & -2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^0_+ \end{array}$$

(b) (**7 puntos**) Considere que actualmente usted dispone de 65 millones para invertir en paquetes de acciones. Para esto, ha definido cinco paquetes accionarios, y la siguiente tabla se muestra la utilidad neta y el costo de cada uno de estos cinco paquete de acciones.

Paquete de Acciones	Utilidad Neta [Millones]	Costo [Millones]
P1	45	30
P2	5	10
P3	25	25
P4	50	60
P5	18	24

(i) (**1 punto**) Asumiendo que no se puede comprar una fracción y tampoco más de una unidad de cada paquete de acciones, construya un modelo de programación matemático que le permita decidir cómo invertir su dinero de manera de maximizar la utilidad neta obtenida.

(ii) (**2 puntos**) Antes de resolver, construya una desigualdad válida (corte) para el problema descrito en la parte (*i*).

(iii) (**4 puntos**) Utilice el algoritmo de ramificación y acotamiento (B&B) para determinar la solución óptima del problema planteado en la parte (i). Para esto, construya el árbol de búsqueda por amplitud ("a lo ancho") y vaya resolviendo los subproblemas desde izquierda a derecha, colocando a la izquierda la restricción que acota la variable fraccionaria por arriba. *Hint: los subproblemas puede resolverlos de manera fácil por simple inspección.*

Respuesta:

(i) Para construir el modelo se define la variable binaria x_p, que toma valor 1 si se decide invertir en el paquete de acciones p y 0 en cualquier otro caso. Dad esta definición, el modelo queda:

$$\text{máx } 45x_1 + 5x_2 + 25x_3 + 50x_4 + 18x_5 \tag{1}$$

sujeto a:

$$30x_1 + 10x_2 + 25x_3 + 60x_4 + 24x_5 \leq 65 \tag{2}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\} \tag{3}$$

(ii) El problema formulado en la parte (i) es un problema de la mochila. Entonces, cualquier restricción del tipo covers es válida. Por ejemplo:

$$x_1 + x_4 \leq 1$$

(iii) El modelo planteado es un problema de mochila-relajada. Luego, un método que asegura optimalidad es calcular los cuocientes $\frac{u_p}{c_p}$, y ordenarlos y escogerlos de manera de:

- $x_p^* = 1$ para $p = 1, ..., k-1$.
- $x_p^* = \frac{b - \sum_{p=1}^{k-1} a_p}{a_k}$
- $x_p^* = 0$ para $p = k+1, ..., n$.

En la siguiente tabla se muestra el valor de los cuocientes:

Empresa	Utilidad Neta [Millones]	Costo [Millones]	$\frac{c_j}{a_j}$
$P1$	45	30	$\frac{45}{30} = 1\frac{1}{2}$
$P2$	5	10	$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
$P3$	25	25	$\frac{25}{25} = 1$
$P4$	50	60	$\frac{50}{60} = \frac{5}{6}$
$P5$	18	24	$\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

Con esto, y las indicaciones sobre cómo construir el árbol de búsqueda, se tiene el árbol mostrado en la Figura 2:

Nota: Tal como se indicó en la interrogación, no es necesario que entreguen explícitamente los cálculos en la resolución de cada subproblema.

Pregunta 4 (15 puntos)

Ante la inminente llegada de los vehículos eléctricos, Juan Pérez está desarrollando una nueva idea de negocio que ofrecería estacionamiento y carga eléctrica gratuita para vehículos eléctricos a cambio de que su empresa pueda gestionar la batería del vehículo. Para que su negocio sea viable, necesitará comprar energía cuando sea barata y vender cuando sea cara utilizando las baterías de los vehículos como almacenes de dicha energía. Su negocio se basa exclusivamente en la compraventa de energía cumpliendo ciertos requerimientos.

Juan Pérez está considerando gestionar los estacionamientos en un edificio de oficinas. Este estacionamiento cuenta con I plazas de estacionamiento por lo que sería posible estacionar I vehículos eléctricos. Cada plaza de estacionamiento está identificada con el índice i. Suponemos que una vez llega el vehículo eléctrico al estacionamiento (8:00 am), este permanece durante 9 horas en el estacionamiento y a cargo de la empresa de Juan Pérez que está gestionando la carga del vehículo. También suponemos que todos los vehículos llegan al mismo tiempo y salen al mismo tiempo, por lo que todos permanecerán 9 horas en el estacionamiento y además, que el estacionamiento está completo (no sobran plazas vacías).

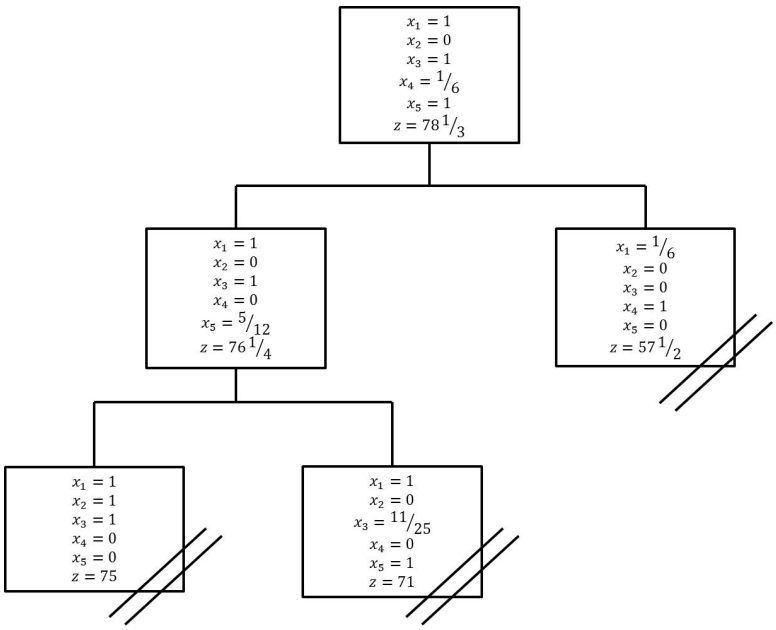
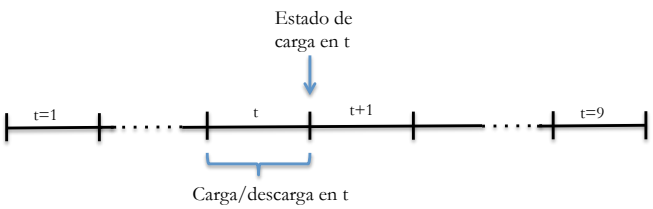


Figura 2: Árbol de búsqueda.

Juan Pérez ha llegado a un acuerdo con una distribuidora eléctrica para comprar y/o vender energía. Así, cada día, a las 0:00, la distribuidora le dará un vector de precios horario de compra de energía p_t^c (en \$/MWh) que utilizará para cargar los vehículos eléctricos y un vector de precios de venta de energía p_t^v (en \$/MWh) al que Juan Pérez podría vender energía a la distribuidora. t hace referencia a cada una de las horas en la que se vende o compra energía entre la distribuidora y la empresa de Juan Pérez durante el horario de oficina, $t = 1, \ldots, 9$. Evidentemente, para cada t el precio de comprarle energía a la distribuidora es mayor que el precio de venderle energía: $p_t^c > p_t^v$.

Cada vehículo eléctrico es considerado como una única batería. Por lo tanto, esta tiene que cumplir con las propiedades físicas de las baterías que a continuación se resumen: cada batería posee una carga eléctrica de energía (en MWh) que puede variar a lo largo de cada periodo y es diferente para cada uno de los vehículos (x_{it}). Esta carga, para el auto i, no puede ser inferior a cierto límite de seguridad (l_i^{min}) ni mayor a la capacidad de la batería (u_i^{max}) en cualquier momento. Además se conoce la carga inicial con la que llega el vehículo (g_i). También se pide que al final del último periodo (cuando el vehículo abandona el estacionamiento), cada batería quede con una carga mayor o igual a h_i. Tanto la carga como la descarga (potencia dada en MW) de la batería se hace a valores constantes durante cada una de las horas. Se supone que el rendimiento de cargar y descargar es del 100 % (no hay pérdidas). Finalmente, para cada auto, la potencia de carga y descarga está limitada en cada hora por un valor máximo q_{it}^{max} y d_{it}^{max}, respectivamente.. Evidentemente no se puede cargar y descargar la misma batería al mismo tiempo. Recuerde, además que Energía = Potencia x Tiempo.

Ayuda 1. Asuma que el estado (nivel) de carga de la batería se mide al final de cada hora y que la carga/descarga se produce durante toda la hora, tal y como se muestra en la siguiente Figura .



(a) (**10 puntos**) Escribir un modelo de optimización lineal entero mixto que represente el problema enunciado para un día.

(b) (**3 puntos**) Suponga que los rendimientos por cargar y descargar la batería son menores del 100 %, y están representados por η_i^c y η_i^d, respectivamente. Modifique el modelo de acuerdo a estos parámetros.

(c) (**2 puntos**) Juan Pérez está valorando cobrar la energía neta que carga en cada vehículo a un precio único p dado en \$/MWh. ¿Cómo queda la función objetivo? Suponga que el nivel del carga del vehículo al salir es siempre mayor o igual al nivel de carga con el que entra al estacionamiento.

(d) (**Pregunta de Bono: 4 puntos extras**) Argumente si acaso es posible escribir el modelo como un problema de optimización lineal.

Respuesta:

(a) El modelo pedido es:

- *Variables de decisión*

  x_{it}: Estado de carga eléctrica de la batería i al final del periodo t en MWh.

  q_{it}: Potencia de carga de la batería i durante la hora t en MW.

  d_{it}: Potencia de descarga de la batería i durante la hora t en MW.

  y_{it}: Variable binaria que toma el valor 1 si la batería i está cargando durante la hora t y 0 en otro caso.

  z_{it}: Variable binaria que toma el valor 1 si la batería i está descargando durante la hora t y 0 en otro caso.

- *Función objetivo* Consiste en maximizar el beneficio que obtendría por la compraventa de energía con la distribuidora.

$$\text{máx} \quad \sum_{t=1}^{9} \sum_{i=1}^{I} (d_{it} p_{it}^v - q_{it} p_{it}^c)$$

- *Restricciones*

  (R1) Límite mínimo de seguridad y capacidad máxima de la carga de la batería.

$$x_i^{min} \leq x_{it} \leq x_i^{max} \qquad \forall i = \{1, \ldots, I\}, t = \{1, \ldots, 9\}$$

  (R2) Límite máximo de potencia de carga y descarga. Observar que si $y_{it} = 0$ la potencia de carga tiene que ser cero (q_{it} se define como no negativa). Para la descarga ocurre algo similar.

$$\begin{aligned} q_{it} &\leq q_{it}^{max} y_{it} \qquad \forall i = \{1, \ldots, I\}, t = \{1, \ldots, 9\} \\ d_{it} &\leq d_{it}^{max} z_{it} \qquad \forall i = \{1, \ldots, I\}, t = \{1, \ldots, 9\} \end{aligned}$$

  (R3) Ecuación de estado de carga de la batería.

$$x_{it} = x_{i,t-1} + q_{it} - d_{it} \qquad \forall i = \{1, \ldots, I\}, t = \{2, \ldots, 9\}$$

  Para el periodo inicial, donde se conoce el estado de carga inicial de la batería se tiene una ecuación similar.

$$x_{it} = x_{i,0} + q_{it} - d_{it} \qquad \forall i = \{1, \ldots, I\}, t = 1$$

  En ambos casos, las potencias q_{it} y d_{it} están multiplicadas por 1 hora.

(R4) Carga mínima de la batería al final del periodo de estudio, $t = 9$

$$x_{i,9} \geq \underline{x}_i \qquad \forall i = \{1, \ldots, I\}$$

(R5) Restricciones lógicas que impide que se pueda cargar y descargar al mismo tiempo.

$$y_{it} + z_{it} \leq 1 \qquad \forall i = \{1, \ldots, I\}, t = \{1, \ldots, 9\}$$

(R6) Naturaleza de las variables

$$\begin{aligned} x_{it}, q_{it}, d_{it} &\geq 0 \qquad \forall i = \{1, \ldots, I\}, t = \{1, \ldots, 9\} \\ y_{it}, z_{it} &\in \{0, 1\} \qquad \forall i = \{1, \ldots, I\}, t = \{1, \ldots, 9\} \end{aligned} \tag{4}$$

(b) En este caso, la restricción del estado de la carga se ve modificada de la siguiente manera.

$$x_{it} = x_{i,t-1} + \eta_i^c q_{it} - \frac{1}{\eta_i^d} d_{it} \qquad \forall i = \{1, \ldots, I\}, t = \{2, \ldots, 9\}$$

Para el periodo inicial, donde se conoce el estado de carga inicial de la batería se tiene una ecuación similar.

$$x_{it} = x_{i,0} + \eta_i^c q_{it} - \frac{1}{\eta_i^d} d_{it} \qquad \forall i = \{1, \ldots, I\}, t = 1$$

La interpretación es la siguiente. Suponga que rendimiento fuese 95 % para ambos casos. Si Juan Pérez compra 100 MW durante 1 hora (100 MWh de energía) sólo 95 MWh son efectivos para cargar la batería. Ahora, si Juan Pérez quiere vender 100 MWh durante una hora a la distribuidora, este va a necesitar descargar la batería en más de 100 MWh. En concreto necesita (1/0,95)100 MWh de la batería.

(c) Puesto que la carga neta en cada vehículo durante el periodo de estudio siempre es positiva, podemos incluir esta diferencia directamente en la función objetivo sin necesidad de ninguna variable binaria.

$$\text{máx} \quad \sum_{t=1}^{9} \sum_{i=1}^{I} (d_{it} p_{it}^v - q_{it} p_{it}^c) + \sum_{i=1}^{I} p(x_{i,9} - x_{i,0})$$

(d) Si es posible y es debido a que el precio de compra de energía es mayor estricto que el de venta. Así, si suponemos que se compra (carga) y vende (descarga) L MWh al mismo tiempo en la hora t para una batería i. Entonces, la batería queda con la misma carga asumiendo 100 % de rendimiento o con menos carga si no tenemos rendimientos del 100 %. En este caso la función objetivo parcialmente suma $Lp_{it}^v - Lp_{it}^c < 0$ para la batería i y periodo t. Es decir, tiene un coste para Juan Pérez y es preferible ni cargar ni descargar (no tiene coste y el nivel de carga queda igual).

Por tanto, las variables binarias y_{it} y z_{it} no son necesarios al igual que la restricción lógica. Estas variables binarias se introducen para modelar la restricción lógica que impide cargar y descargar simultáneamente la batería. Pero observamos que esto nunca puede ocurrir con $p_{it}^c > p_{it}^c$.