PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2018
Profesores: M. Klapp - R. Cuadrado
A. Cataldo - J. González

Solución Tarea 3

Fecha de Entrega: 9 de noviembre

La tarea tiene un total de 60 puntos.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos ya asignados para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cuatro grupos de hojas el día de la entrega.
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día viernes 9 de noviembre a las 11:00 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta. Además, **la entrega de la tarea se debe realizar entre las 9:00 y las 11:00 el día de la entrega**. Esto, para evitar cualquier conflicto durante la mañana.
- ◇ Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta la escalación a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[2].
- ◇ Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1. (18 puntos)

a) (2 puntos) Sea Ω el dominio formado por las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Muestre que Ω es infactible utilizando conceptos de dualidad

b) (2 puntos) Sea P) un problema de programación lineal infactible y D) su problema dual asociado. Si se elimina la última restricción de P), se hace factible y posee solución óptima. Demuestre que si esta última restricción es de igualdad, entonces D) es factible y no acotado.

c) (2 puntos) Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{lll} P) & \text{mín} & c^T x \\ s.a. & & \\ & Ax & \geq -c \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

con A matriz antisimétrica ($A^T = -A$) de $n \times n$ y $c > 0$. Formule el problema dual de P), y desmuestre utilizando el teorema fuerte de dualidad que $x^* = 0$ es solución óptima de P).

d) (7 puntos) Considere el ejercicio 2.5 de la página 120 del libro Sioshansi, R. y Conejo, A.J. "Optimization in Engineering"

i) (1 punto) Formule el problema dual del problema.

ii) (2 puntos) La solución al problema primal es $(x_1^*, x_2^*) = (11, -6)$. Por Teorema de Holguras Complementarias encuentre la solución del problema dual formulado en *i*).

iii) (2 puntos) ¿Cuánto cambia el valor óptimo si el lado derecho de la primera restricción del primal cambia a 3,8?

iv) (2 puntos) ¿Cuánto cambia el valor óptimo si el lado derecho de la segunda restricción del primal cambia a 11?

e) (5 puntos) Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{lll} P) & \text{mín} & -3x_1 + x_2 \\ s.a. & & \\ & x_1 + x_2 & \geq 0 \\ & x_1 - 2x_2 & \geq -6 \\ & x_1 + x_2 & \leq 5 \\ & 5x_1 - x_2 & \leq 25 \\ & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

i) (1 punto) La solución óptima de P) es $x^* = (5, 0)$ ¿Qué característica tiene esta solución en el dominio (solución única, solución degenerada, múltiples soluciones, etc.)?

ii) (2 puntos) Formule el problema dual de P) ¿Qué característica tiene la solución óptima de este dual (solución única, solución degenerada, múltiples soluciones, etc.)?

iii) (2 puntos) Suponga que el lado derecho de la tercera restricción de P) aumenta en δ. ¿En cuánto cambiará el valor óptimo?. Justifique. Haga el mismo análisis con la cuarta restricción.

Solución Problema 1.

a) Para demostrar que Ω es infactible, primero se construye un problema de maximización con este dominio:

$$P) \quad \text{máx} \quad c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & \end{array}$$

El probema dual de P), corresponde a:

$$P) \quad \text{mín} \quad w(y) = y_1$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{rcl} y_1 + 3x_2 & \geq & c_1 \\ y_1 + y_2 & \geq & c_2 \\ y_1 + 2y_2 & \geq & c_3 \end{array}$$

Demostrando que D) es no acotado, se puede concluir que el problema primal P) es infactible, con lo que se puede demostrar que el dominio Ω es infactible.
Para demostrar que D) es no acotado, se toma un punto factible $h \in D$, con D el dominio del dual y se demuestra que es posible encontrar una dirección $d \neq 0$, tal que los puntos $h + td \in D$ y $w(h + td) \to \infty$ $\forall t > 0$.
Un punto factible de D puede ser: $h = \begin{bmatrix} \hat{y_1} \\ \hat{y_2} \end{bmatrix}$, donde $\hat{y_1} = \text{máx}\{c_1, c_2, c_3\}$ y $\hat{y_2} = 0$.
Si se utiliza la dirección $d = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ Se obtiene que $h + td = \begin{bmatrix} \text{máx}\{c_1, c_2, c_3\} - t \\ 3t \end{bmatrix}$ Reemplazando en las restricciones se obtiene:

$$\text{máx}\{c_1, c_2, c_3\} + 8t \geq c_1$$

$$\text{máx}\{c_1, c_2, c_3\} + 2t \geq c_2$$

$$\text{máx}\{c_1, c_2, c_3\} + 5t \geq c_3$$

que claramente se cumplen $\forall t > 0$. Si $t \longrightarrow \infty$ el punto $h + td$ se mantiene siempre dentro del dominio. Dado esto, se reemplaza en la función objetivo del dual, obteniéndose $w(h + td) = \text{máx}\{c_1, c_2, c_3\} - t$. Se puede ver que $w(h + td) \longrightarrow -\infty$ a medida que $t \longrightarrow \infty$. Por lo tanto, el problema dual es no acotado. Un punto factible de un problema dual de minimización entrega una cota superior para el primal de maximización. Sin embargo, en este caso no existe un mínimo para D), por lo que el problema primal es infactible, lo que a su vez, implica que Ω es vacío.

b) Sea P) el problema original en forma estándar. Luego, P) estará dado por

$$P) \quad \text{mín} \quad c^T x$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{c} Ax = b \\ a_{m+1}x = b_{m+1} \\ x \geq 0 \end{array}$$

donde A es una matriz de $m \times n$ y a_{m+1} un vector de fila $1 \times n$. Llamemos P_1) al problema P) sin la última restricción:

$$P_1) \quad \text{mín} \quad c^T x$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{c} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}$$

Como P_1) tiene solución óptima finita, por dualidad fuerte, el problema dual de P_1), D_1) también la tiene. Sea el dual:

$$\begin{aligned} D_1) \quad & \text{máx} \quad b^T y \\ s.a. \quad & \\ & A^T y \leq c \end{aligned}$$

Sea y^* la solución óptima de D_1). Esta debe satisfacer $A^T y^* \leq c$. Sea D) el dual del problema original P):

$$\begin{aligned} D) \quad & \text{máx} \quad b^T y + b_{m+1} y_{m+1} \\ s.a. \quad & \\ & A^T y + a_{m+1}^T y_{m+1} \leq c \end{aligned}$$

D) tiene la solución trivial:

$$y = y^*$$

$$y_{m+1} = 0$$

Es decir, $\bar{y} = (y^*, 0)$ que es factible en D). Luego, como P) no tiene solución óptima finita, por dualidad fuerte, D) tampoco tiene, y sólo puede ser infactible o no acotado. Como $\bar{y}$ es una solución factible para D), se puede concluir que este es un problema no acotado.

c) Como la matriz A es antisimétrica, el dual D) de P) es igual a P):

$$\begin{array}{lcl} D) \ \text{máx} -c^T y & & D) \ \text{mín}\, c^T y \\ A^T y \leq c & \iff & A^T y \geq -c \\ y \geq 0 & & y \geq 0 \end{array}$$

Se puede ver que $x = 0$ es una solución factible para P) con un valor objetivo de $z = 0$. Luego, por dualidad débil: $z = 0 \geq w = -c^T y$, $\forall y$ factible en D). A su vez, $y = 0$ es una solución factible para D) con un valor objetivo de $w = 0$. Luego, por dualidad débil: $w = 0 \leq z = c^T x$, $\forall x$ factible en P).
Luego, se tiene que $x = 0$ es solución óptima de P) y $y = 0$ es solución óptima de D)

d) *i*) El problema primal P) es

$$\begin{aligned} P) \quad & \text{mín} \quad 3x_1 + 4x_2 \\ s.a. \quad & \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 & \geq & 4 \\ 3x_1 + 4x_2 & \leq & 10 \\ x_1 + x_2 & = & 5 \\ x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

El dual del problema corresponde a

$$\begin{aligned} D) \quad & \text{máx} \quad 4y_1 + 10y_2 + 5y_3 \\ s.a. \quad & \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} 2y_1 + 3y_2 + y_3 & \leq & 3 \\ 3y_1 + 4y_2 + y_3 & \geq & 4 \\ y_1 & \geq & 0 \\ y_2 & \leq & 0 \end{array}$$

ii) El Teorema de Holguras Complementarias corresponde a las expresiones:

$$x^T(c - A^T y) = 0$$
$$y^T(Ax - b) = 0$$

Se plantean las condiciones para las restricciones del primal

$$R1_{P)} \qquad y_1(2x_1 + 3x_2 - 4) = 0$$
$$R2_{P)} \qquad y_2(3x_1 + 4x_2 - 10) = 0$$
$$R3_{P)} \qquad y_3(x_1 + x_2 - 5) = 0$$

Reemplazando la solución del primal $(x_1^*, x_2^*) = (11, -6)$ se puede ver que las restricciones 1 y 3 son activas, por lo que no se puede deducir nada de las variables duales y_1 e y_3. Como la restricción 2 es inactiva, se obtiene que $y_2 = 0$.

Las condiciones de Holguras Complementarias para $D)$ son

$$R1_{D)} \qquad x_1(2y_1 + 3y_2 + y_3 - 3) = 0$$
$$R2_{D)} \qquad x_2(3y_1 + 4y_2 + y_3 - 4) = 0$$

Como $x_1, x_2 \neq 0$ y $y_2 = 0$ se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$2y_1 + y_3 - 3 = 0$$
$$3y_1 + y_3 - 4 = 0$$

Resolviendo este sistema se obtiene que $y_1 = 1$ e $y_3 = 1$. Luego, la solución óptima de $P)$ corresponde a $(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (1, 0, 1)$ con valor óptimo $w^* = 9 = z^*$.

iii) En primer lugar, es necesario comprobar que si b_1 cambia a 3.8, $P)$ sigue siendo factible. La base óptima de $P)$ y su inversa corresponden a

$$B_{\{x_1,x_2,x_4\}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Se calcula el criterio de factibilidad de Simplex:

$$\bar{b} = B^-1b = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3{,}8 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56/5 \\ -31/5 \\ 6/5 \end{bmatrix}$$

Como $x_1, x_4 \geq 0$ y $x_2 \leq 0$ la solución sigue siendo factible.

Para determinar el cambio en la función objetivo cuando el lado derecho de la primera restricción cambia en $\delta = -0{,}2$ utilizamos el precio sombra de la primera restricción, luego:

$$\delta z = \delta b_1 \cdot y_1$$
$$\delta z = -0{,}2 \cdot 1 = -0{,}2$$

iv) Como el precio sombra de la segunda restricción del primal es $y_2 = 0$, si b_2 cambia a 11, el valor óptimo no cambiará, ya que

$$\delta z = \delta b_2 \cdot y_2$$
$$\delta z = 1 \cdot 0 = 0$$

e) *i)* Reemplazando la solución óptima de P) en las restricciones de este, se puede ver que las restricciones 3, 4 y la naturaleza de la variable x_2 están activas en el óptimo. Dado esto, la solución x^* de P) es degenerada.

ii) El dual D) de P) corresponde a

$$\begin{aligned} D) \quad & \text{máx} \quad -6y_2 + 5y_3 + 25y_4 \\ s.a. \quad & \\ & y_1 + y_2 + y_3 + 5y_4 = -3 \\ & y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \leq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \\ & y_3, y_4 \leq 0 \end{aligned}$$

Como el problema primal tiene solución óptima degenerada, el dual tendrá múltiples soluciones. ESto se puede ver utilizando el Teorema de Holguras Complementarias para el dual:

$$x_1(y_1 + y_2 + y_3 + 5y_4 + 3) = 0$$
$$x_2(y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 - 1) = 0$$

Como las restricciones 1 y 2 del primal son inactivas, $y_1 = y_2 = 0$. Además, como $x_2 = 0$, las soluciones para el dual vendrán dadas por la recta

$$y_3 + 5y_4 + 3 = 0$$

iii) Si el lado derecho de la tercera restricción aumenta en δ, el valor óptimo no cambiará, dado que existen 3 restricciones activas en el óptimo, por lo que al aumentar b_3 siguen existiendo 2 restricciones activas cuya intersección corresponde a la solución óptima. Sin embargo, cambiará la estructura de la solución óptima puesto que se tendrá una solución óptima única en lugar de una degenerada. Lo mismo sucede si solo aumenta b_4 en δ. Esta restricción también es activa en el óptimo y al aumentar b_4 no cambia la solución óptima, solo se vuelve inactiva la restricción 4.

Problema 2. (17 puntos)

a) (4 puntos) Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) (2 puntos) Suponga que P) es un problema de optimización lineal entero, cuyo dominio lineal relajado es igual a su envoltura convexa. Si la relajación lineal de P) tiene múltiples soluciones óptimas, entonces P) tiene, al menos, dos soluciones óptimas.

ii) (2 puntos) Al igual que el algoritmo simplex, la ejecución del algoritmo B&B se detendrá apenas se evalúe la solución óptima del problema que se está resolviendo.

b) (3 puntos) Considere el siguiente problema de la mochila:

$$\begin{aligned} P) \quad & \text{máx} \quad 15x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 0{,}5x_5 \\ s.a. \quad & \\ & 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1{,}5x_4 + 1{,}5x_5 \leq 6 \\ & x \in \{0,1\}^n \end{aligned}$$

Resuelva P) utilizando el método de planos cortantes tipo *Covers*.

c) (2 puntos) Considere el ejercicio 3.7, Cap. 3.9, pág. 195 del libro Sioshansi, R. y Conejo, A.C. "Optimization in Engineering." (bibliografía del curso).

Modele la siguiente función de costo lineal por partes como un conjunto lineal entero mixto:

$$costo = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{2}{3}(x-1) & 1 < x \leq 2 \\ \frac{7}{6} + \frac{1}{3}(x-2) & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

d) (2.5 puntos) Considere el siguiente árbol incompleto de B&B sobre un problema de programación lineal entera de minimización:

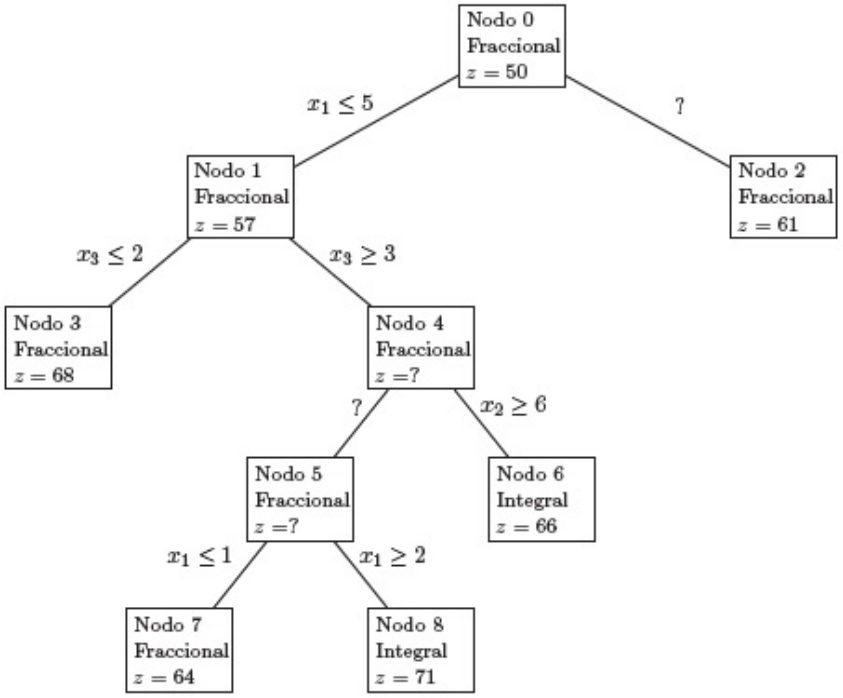


Figura 1: Árbol parcial B&B

con z el valor óptimo de la relajación lineal del nodo respectivo.

i) (0.5 puntos) ¿Cuáles son las restricciones añadidas en los nodos 2 y 5?

ii) (0.5 puntos) ¿Cuáles son los rangos para los valores óptimos de los problemas relajados en los nodos 4 y 5?

iii) (0.5 puntos) ¿Cuál es la menor cota superior actual del valor óptimo?

iv) (0.5 puntos) ¿Cuál es la mayor cota inferior actual del valor óptimo?

v) (0.5 puntos) ¿Qué nodos pueden ser podados y por qué?

e) (5.5 puntos) Considere el siguiente problema de optimización:

$$P) \qquad \text{mín} \qquad 2x_1 - 3x_2 + 2{,}5x_3 + 3x_4$$

$$s.a.$$

$$\begin{aligned} 0{,}5x_1 - 3x_2 + 1{,}5x_4 &= 7 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 4 \\ 2x_3 + 3x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\in \mathbf{Z}^+ \end{aligned}$$

i) (4 puntos) Resuelva el problema P y su relajación lineal mediante *Python - Gurobi*. No se pedirá ningún archivo digital, pero sí se tienen que entregar los códigos escritos y pantallazos con un resumen de los resultados.

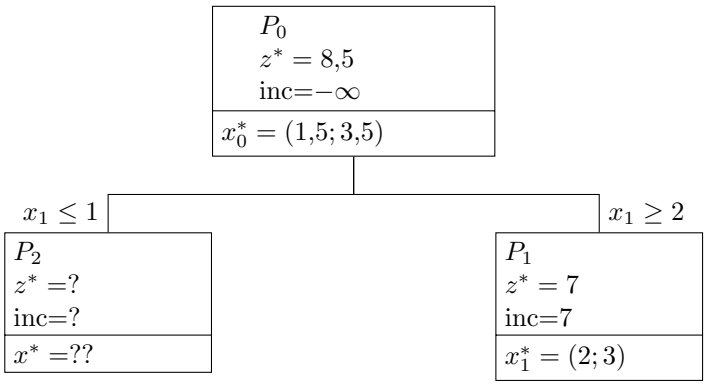
ii) (1.5 puntos) A partir de la solución de la relajación lineal de P encontrada en i), derive el corte de Gomory correspondiente a la variable básica que resulte fraccionaria de menor índice.

Solución Problema 2.

a) *i*) Esta afirmacion es verdadera. Por la teoría de programación lineal, si un problema lineal tiene múltiples soluciónes óptimas, estas se encuentran necesariamente en el conjunto borde de su dominio. Además, cada hiperplano perteneciente al conjunto borde de la envoltura convexa de un dominio, es necesariamente combinación convexa de al menos dos soluciones del dominio original. Entonces, si la relajación lineal de P) tiene múltiples soluciones óptimas, esto significa que existen al menos dos soluciones de P) que también son soluciones óptimas.

ii) Esta afirmación es falsa. El algoritmo se detendrá cuando se hayan podado o resuelto todas las ramas del árbol de B&B. Se puede tomar como contraejemplo el siguiente problema con su respectivo árbol:

$$
\begin{aligned}
P) \qquad & \text{máx} && x_1 + 2x_2 \\
s.a. \quad & && \\
& x_1 + x_2 && \leq \quad 5 \\
& x_2 && \geq \quad 3{,}5 \\
& x_1, x_2 && \in \quad \mathbf{Z}^+
\end{aligned}
$$



Se puede comprobar que x_1^* es el óptimo de P), sin embargo, el algoritmo no se detiene porque aún no se ha resuelto la rama de $P2$ para podarla.

b) El problema relajado de P) y su solución respectiva son:

$$
\begin{aligned}
PL) \qquad & \text{máx} && 15x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 0{,}5x_5 \\
s.a. \quad & && \\
& 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1{,}5x_4 + 1{,}5x_5 && \leq \quad 6 \\
& x \leq 1 && \\
& x \geq 0 &&
\end{aligned}
$$

$$
x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{6}{7}, 0, 0, 0, 0\right)
$$

Entonces, un *cover* válido es $x_1 = 0$ y el nuevo problema relajado queda:

$$
\begin{aligned}
PL1) \qquad & \text{máx} && 15x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 0{,}5x_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
s.a. & \\
& \begin{array}{rcl}
7x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1{,}5x_4 + 1{,}5x_5 & \leq & 6 \\
x_1 = 0 & & \\
x \leq 1 & & \\
x \geq 0 & &
\end{array}
\end{array}
$$

La nueva solución es: $x_1^* = \left(0, \frac{1}{6}, 1, 1, 0\right)$. Entonces, un *cover* válido es $x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$ y el nuevo problema relajado queda:

$$
\begin{array}{lll}
PL2) & \text{máx} & 15x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 0{,}5x_5 \\
s.a. & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
7x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1{,}5x_4 + 1{,}5x_5 & \leq & 6 \\
x_1 & = & 0 \\
x_2 + x_3 + x_4 & \leq & 2 \\
x \leq 1 & & \\
x \geq 0 & &
\end{array}
$$

La nueva solución es: $x_2^* = \left(0, 0, 1, 1, \frac{1}{3}\right)$. Entonces, un *cover* válido es $x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$ y el nuevo problema relajado queda:

$$
\begin{array}{lll}
PL3) & \text{máx} & 15x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 0{,}5x_5 \\
s.a. & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
7x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1{,}5x_4 + 1{,}5x_5 & \leq & 6 \\
x_1 & = & 0 \\
x_2 + x_3 + x_4 & \leq & 2 \quad x_3 + x_4 + x_5 \\
\leq \quad 2 & x \leq 1 & \\
x \geq 0 & &
\end{array}
$$

La nueva solución es: $x_3^* = (0, 0, 1, 1, 0)$, con lo que se ha encontrado la solución óptima del problema entero.

c) Primero, se deben crear tres variables binarias:

$$
y_1 = \begin{cases} 1 & \text{Si es que } x \text{ se encuentra entre 0 y 1.} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}
$$

$$
y_2 = \begin{cases} 1 & \text{Si es que } x \text{ se encuentra entre 1 y 2.} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}
$$

$$
y_3 = \begin{cases} 1 & \text{Si es que } x \text{ se encuentra entre 2 y 3.} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}
$$

Además, se crean 3 variables auxiliares continuas:

$z_i =$ Toma el valor de la función de costo si x se encuentra entre $i-1$ e i, en caso contrario toma valor 0.

Finalmente, la función de costo se puede modelar como:

$$
costo = z_1 + z_2 + z_3
$$

$$
\begin{array}{cc}
y_1 + y_2 + y_3 & = 1 \\
\frac{x}{2} & \leq z_1 + \frac{3}{2}(1 - y_1) \\
\frac{1}{2} + \frac{2}{3}(x-1) & \leq z_2 + \frac{11}{6}(1 - y_2) \\
\frac{7}{6} + \frac{1}{3}(x-2) & \leq z_3 + 3y_3 \\
z_i & \leq y_i \qquad ,\forall i = 1,2,3 \\
x & \leq 3 \\
x, z & \geq 0 \\
y & \in \{0,1\}^3
\end{array}
$$

d) *i)* Se añadieron $x_1 \geq 6$ y $x_2 \leq 5$, respectivamente.

ii) En ambos casos, $57 \leq z \leq 64$.

iii) La menor cota superior actual del valor óptimo es 66.

iv) La mayor cota inferior actual del valor óptimo es 61.

v) Los nodos 6 y 8 son podados por integralidad. El nodo 3 es podado por cota.

e) *i)* Un posible código en *Python - Gurobi* de P) es:

```
from gurobipy import *

m = Model("Ejercicio_2e")

x = m.addVars(range(1,5),vtype=GRB.INTEGER, lb=0,
                                    name='x')

m.addConstr(0.5*x[1]-3*x[2]+1.5*x[4], GRB.EQUAL,rhs=7, name = "R1")
m.addConstr(x[2]+2*x[3]-3*x[4], GRB.EQUAL,rhs=4, name = "R2")
m.addConstr(2*x[3]+3*x[4], GRB.EQUAL,rhs=3, name = "R3")

m.setObjective(2*x[1]-3*x[2]+2.5*x[3]+3*x[4], GRB.MINIMIZE)

m.update()
m.optimize()

sol = {v.varName: v.x for v in m.getVars()}

print('\nLa solucion optima es: {}'.format(sol))
print('El valor optimo de la F.O. es: {}'.format(m.objVal))
```

Figura 2: Código 2.e) (Entero)

Y la impresión de la solución óptima es:

```
Explored 0 nodes (0 simplex iterations) in 0.00 seconds
Thread count was 1 (of 4 available processors)

Solution count 1: 88

Optimal solution found (tolerance 1.00e-04)
Best objective 8.800000000000e+01, best bound 8.800000000000e+01, gap 0.0000%

La solucion optima es: {'x[2]': 7.0, 'x[1]': 53.0, 'x[4]': 1.0, 'x[3]': 0.0}
El valor optimo de la F.O. es: 88.0
```

Figura 3: Resultado 2.e) (Entero)

Un posible código en *Python - Gurobi* de la relajación lineal de P) es:

```
from gurobipy import *

m = Model("Ejercicio_2e")

x = m.addVars(range(1,5),vtype=GRB.CONTINUOUS,lb=0,
                                    name='x')

m.addConstr(0.5*x[1]-3*x[2]+1.5*x[4], GRB.EQUAL,rhs=7, name = "R1")
m.addConstr(x[2]+2*x[3]-3*x[4], GRB.EQUAL,rhs=4, name = "R2")
m.addConstr(2*x[3]+3*x[4], GRB.EQUAL,rhs=3, name = "R3")

m.setObjective(2*x[1]-3*x[2]+2.5*x[3]+3*x[4], GRB.MINIMIZE)

m.update()
m.optimize()

sol = {v.varName: v.x for v in m.getVars()}

print('\nLa solucion optima es: {}'.format(sol))
print('El valor optimo de la F.O. es: {}'.format(m.objVal))
```

Figura 4: Código 2.e) (Rel. Lineal)

Y la impresión de la solución óptima es:

```
Solved in 0 iterations and 0.00 seconds
Optimal objective  4.075000000e+01

La solucion optima es: {'x[2]': 1.0, 'x[1]': 20.0, 'x[4]': 0.0, 'x[3]': 1.5}
El valor optimo de la F.O. es: 40.75
```

Figura 5: Resultado 2.e) (Rel. Lineal)

ii) La base óptima encontrada en *i*) es:

$$B_{\{x_1,x_2,x_3\}} = \begin{bmatrix} 1/2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{R}_{\{x_4\}} = \begin{bmatrix} -33 \\ -6 \\ 3/2 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 20 \\ 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

Entonces, x_3 es la única variable fraccionaria, por lo tanto, el corte de Gomory correspondiente es:

$$\left(\frac{3}{2} - 1\right) x_4 \geq \left(\frac{3}{2} - 1\right) \longrightarrow x_4 \geq 1$$

Problema 3. (13 puntos)

a) (3 puntos) Considere el siguiente problema clásico de la mochila con n elementos:

$$P) \qquad \text{máx} \qquad \sum_{i=1}^{n} u_i x_i$$

$$\begin{array}{lll} s.a. & & \\ & \sum_{i=1}^{n} v_i x_i & \leq \quad V \\ & x & \in \quad \{0,1\}^n \end{array}$$

Modele P como un problema equivalente de ruta mínima.
Hint: Puede ser de ayuda utlizar cotas máximas o mínimas en algunos arcos.

b) (8 puntos) Considere el problema de una empresa distribuidora de productos a supermercados. La empresa posee 2 clientes que demandan una cantidad fija de productos y 3 bodegas en las cuales se encuentra todo su inventario de productos. En la siguiente tabla se muestra el inventario inicial de cada bodega y la demanda de cliente

i	b_i
bodega 1	5
bodega 2	4
bodega 3	2
cliente 1	3
cliente 2	4

En la tabla, se puede ver que la demanda es menor al inventario actual de la empresa, por lo que el inventario remanente debe ser almacenado para el futuro en las bodegas a un costo de inventario por unidad C_i (en la bodega i). Es posible reposicionar productos entre bodegas, ya sea para enviar desde la nueva ubicación el producto al cliente, o, para almacenarlo como inventario. El costo de transporte y de inventario (en $) se resume en la siguiente matriz:

i	b1	b2	b3	c1	c2	C_i
bodega 1	-	2	2	4	5	6
bodega 2	1	-	3	4	5	2
bodega 3	-	2	-	3	1	1
cliente 1	-	-	-	-	-	
cliente 2	-	-	-	-	-	

Los despachos infactibles se representan con $(-)$.

i) (3 puntos) Formule el problema de la empresa como un modelo de flujo en redes a costo mínimo. No es necesario incluir la representación matemática, basta con el grafo correspondiente, indicando claramente los parámetros de este (costos, cotas y ofertas).

ii) (4 puntos) Suponga que la solución actual de la empresa es enviar 3 unidades de la bodega 1 al cliente 1, 4 unidades de la bodega 2 al cliente 2 y no hacer reposiciones entre bodegas. Resuelva el modelo planteado en *i*) con el algoritmo simplex en redes, utilizando como base inicial la solución actual de la empresa.
Nota: Utilice como criterio para ingresar a la base, la variable con costo reducido negativo cuyo origen tiene mayor índice.

iii) (1 puntos) ¿En qué rango de valores se debe encontrar el costo de inventario de la bodega 1 para que se mantenga la configuración de base óptima encontrada en *ii*)?

c) (2 puntos) Determine si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: Suponga que P es un problema factible de flujo en redes a costo mínimo. Si P no tiene ciclos de costo negativo, entonces P) necesariamente tiene solución óptima.
Nota: Un ciclo de costo negativo, es un ciclo de arcos en el grafo cuya suma de costos es negativa.

Solución Problema 3.

a) El problema se puede modelar como una red de $(V+1) \times n$ nodos más un nodo inicial s y un nodo final t de la siguiente forma:

Cada nodo es nombrado j, v (con $j = 1, \ldots, n$ y con $v = 0, \ldots, V$), representando que en los nodos del 1 al j se están utilizando v unidades de volumen en la mochila. Luego, se deben crear arcos tal que:

$$(j-1, v) \longrightarrow (j, v + v_j), \forall j = 2, \ldots, n, \forall v = 0, \ldots V - v_j$$

$$(s) \longrightarrow (1, v_1)$$

Cada uno de estos arcos con costo $-u_i$.

$$(j-1, v) \longrightarrow (j, v), \forall j = 2, \ldots, n, \forall v = 0, \ldots V$$

$$(s) \longrightarrow (1, 0)$$

Cada uno de estos arcos con costo 0.

Los dos primeros conjuntos de arcos, representa que sí se incluye el elemento j o 1 en la mochila y los últimos dos que no. Por último, se deben crear los arcos a t:

$$(n, v) \longrightarrow (t), \forall v = 0, \ldots, V$$

Cada uno de estos arcos con costo 0.

El modelo, matemáticamente es el siguiente:

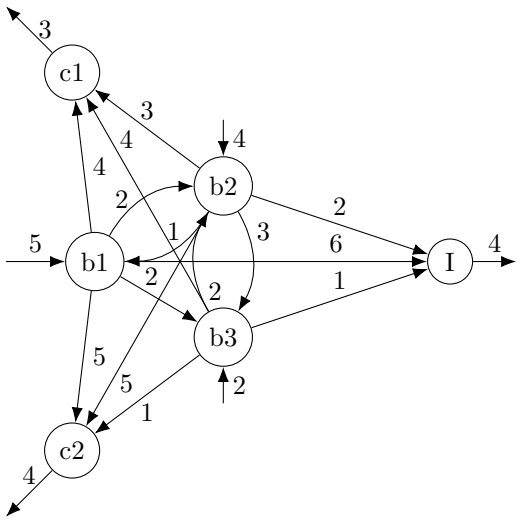
$$P) \qquad \text{mín} \qquad -x_{s,(q,v_1)}u_1 + \sum_{j=2}^{n}\sum_{v=0}^{V-v_j} x_{(j-1,v),(j,v+v_j)}(-u_j)$$

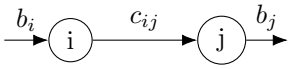
s.a.

$$\begin{array}{rcll}
x_{s,(1,v_1)} + x_{s,(1,0)} & = & 1 & \\
x_{(j-1,v),(j,v)} + x_{(j-1,v-v_j),(j,v)} & = & x_{(j,v),(j+1,v)} + x_{(j,v),(j+1,v+v_{j+1})} & \forall j = 2, \ldots, n \\
 & & & , \forall v = v_j, \ldots, V - v_{j+1} \\
x_{(j-1,v),(j,v)} & = & x_{(j,v),(j+1,v)} + x_{(j,v),(j+1,v+v_{j+1})} & \forall j = 2, \ldots, n, \forall v = 0, \ldots, v_j \\
x_{(j-1,v),(j,v)} + x_{(j-1,v-v_j),(j,v)} & = & x_{(j,v),(j+1,v)} & \forall j = 2, \ldots, n \\
 & & & , \forall v = V - v_{j+1} + 1, \ldots, V \\
\sum_{v=0}^{V} x_{(n,v),t} & = & 1 & \\
x & \in & \{0, 1\} &
\end{array}$$

No es necesario plantear el modelo matemático, un grafo bien explicado también se considerará correcto.

b) *i*) El problema se puede modelar con el siguiente grafo:

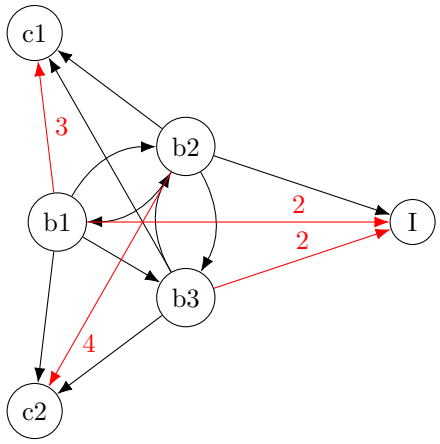




Con b_i la oferta del nodo i, b_j la demanda del nodo j y c_{ij} el costo del arco (i, j). El nodo I corresponde al nodo sumidero del inventario, es decir, los arcos que llegan a el representan el inventario

almacenado en cada bodega.

ii) La solución actual de la empresa que se utilizará como base inicial factible es:



Iteración 0: En primer lugar, se debe encontrar el valor de las variables duales:

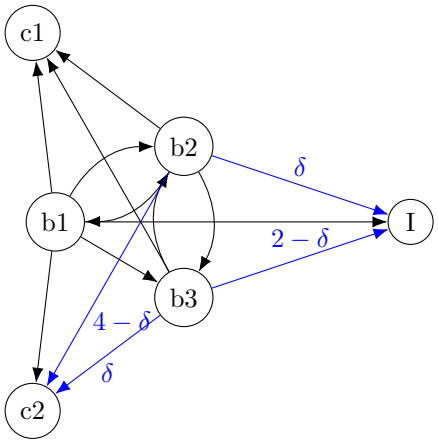
$$\begin{aligned}
\pi_{b1} - \pi_{c1} &= 4 \\
\pi_{b1} - \pi_I &= 6 \\
\pi_{b2} - \pi_{c2} &= 5 \\
\pi_{b3} - \pi_I &= 1 \\
\pi_{b2} - \pi_I &= 2
\end{aligned}$$

Cabe destacar que para tener una base se debe formar un árbol, por lo tanto, es necesario agregar a la base alguna variable de un arco no utilizado que incluya $b2$ o $c2$. Fijando $\pi_I = 0$ se obtiene $\pi_{b1} = 6, \pi_{b2} = 2, \pi_{b3} = 1, \pi_{c1} = 2, \pi_{c2} = -3$. Con esto, se obtienen los valores de los costos reducidos:

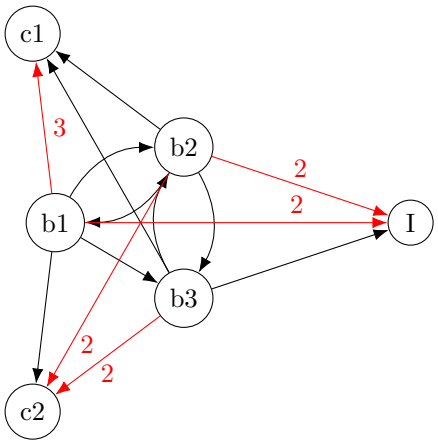
$$\begin{aligned}
\bar{c}_{b1,b2} &= 2 - \pi_{b1} + \pi_{b2} = -2 \\
\bar{c}_{b1,b3} &= 2 - \pi_{b1} + \pi_{b3} = -3 \\
\bar{c}_{b1,c2} &= 5 - \pi_{b1} + \pi_{c2} = -4 \\
\bar{c}_{b2,b1} &= 1 - \pi_{b2} + \pi_{b1} = 5 \\
\bar{c}_{b2,b3} &= 3 - \pi_{b2} + \pi_{b3} = 2 \\
\bar{c}_{b2,c1} &= 3 - \pi_{b2} + \pi_{c1} = 3 \\
\bar{c}_{b3,b2} &= 2 - \pi_{b3} + \pi_{b2} = 3 \\
\bar{c}_{b3,c1} &= 4 - \pi_{b3} + \pi_{c1} = 5 \\
\bar{c}_{b3,c2} &= 1 - \pi_{b3} + \pi_{c2} = -3
\end{aligned}$$

Existen costos reducidos negativos, por lo que no se está en el óptimo.

Iteración 1:
Por enunciado, el arco $(b3, c2)$ debe entrar a la base y se forma el siguiente ciclo:



Finalmente, $x_{b3,c2} = 2$, $x_{b2,c2} = 2$, $x_{b2,I} = 2$ y $x_{b3,I} = 0$, por lo tanto, $(b3, I)$ sale de la base y el árbol queda así:



Ahora, se debe ver si el árbol es óptimo:

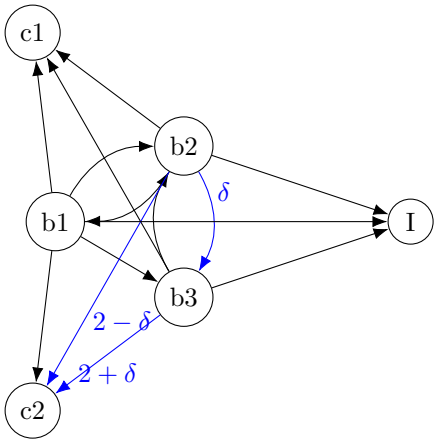
$$\begin{aligned}
\pi_{b1} - \pi_{c1} &= 4 \\
\pi_{b1} - \pi_I &= 6 \\
\pi_{b2} - \pi_{c2} &= 5 \\
\pi_{b3} - \pi_{c2} &= 1 \\
\pi_{b2} - \pi_I &= 2
\end{aligned}$$

Fijando $\pi_I = 0$ se obtiene $\pi_{b1} = 6, \pi_{b2} = 2, \pi_{b3} = -2, \pi_{c1} = 2, \pi_{c2} = -3$. Con esto, se obtienen los valores de los costos reducidos:

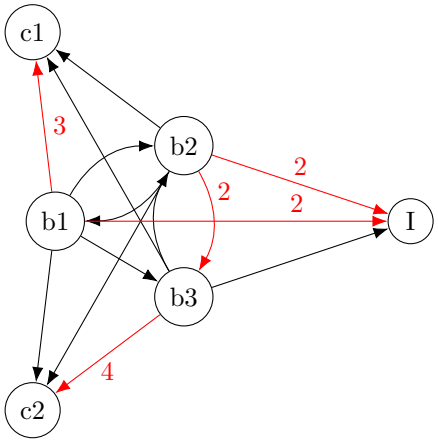
$$\bar{c}_{b1,b2} = 2 - \pi_{b1} + \pi_{b2} = -2$$
$$\bar{c}_{b1,b3} = 2 - \pi_{b1} + \pi_{b3} = -6$$
$$\bar{c}_{b1,c2} = 5 - \pi_{b1} + \pi_{c2} = -4$$
$$\bar{c}_{b2,b1} = 1 - \pi_{b2} + \pi_{b1} = 5$$
$$\bar{c}_{b2,b3} = 3 - \pi_{b2} + \pi_{b3} = -1$$
$$\bar{c}_{b2,c1} = 3 - \pi_{b2} + \pi_{c1} = 3$$
$$\bar{c}_{b3,b2} = 2 - \pi_{b3} + \pi_{b2} = 6$$
$$\bar{c}_{b3,c1} = 4 - \pi_{b3} + \pi_{c1} = 12$$
$$\bar{c}_{b3,I} = 1 - \pi_{b3} + \pi_{I} = 3$$

Existen costos reducidos negativos, por lo que no se está en el óptimo.

Iteración 2:
Por enunciado, el arco $(b2, b3)$ debe entrar a la base y se forma el siguiente ciclo:



Finalmente, $x_{b2,b3} = 2$, $x_{b3,c2} = 4$ y $x_{b2,c2} = 0$, por lo tanto, $(b2, c2)$ sale de la base y el árbol queda así:



Ahora, se debe ver si el árbol es óptimo:

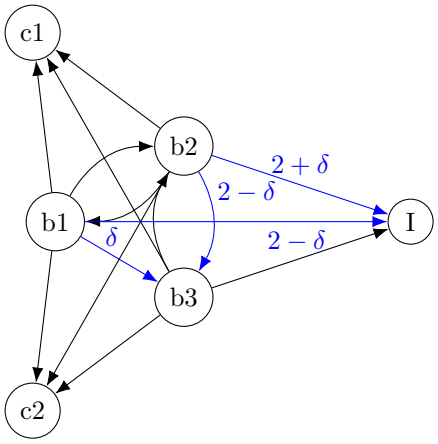
$$\pi_{b1} - \pi_{c1} = 4$$
$$\pi_{b1} - \pi_I = 6$$
$$\pi_{b2} - \pi_{b3} = 3$$
$$\pi_{b3} - \pi_{c2} = 1$$
$$\pi_{b2} - \pi_I = 2$$

Fijando $\pi_I = 0$ se obtiene $\pi_{b1} = 6, \pi_{b2} = 2, \pi_{b3} = -1, \pi_{c1} = 2, \pi_{c2} = -2$. Con esto, se obtienen los valores de los costos reducidos:

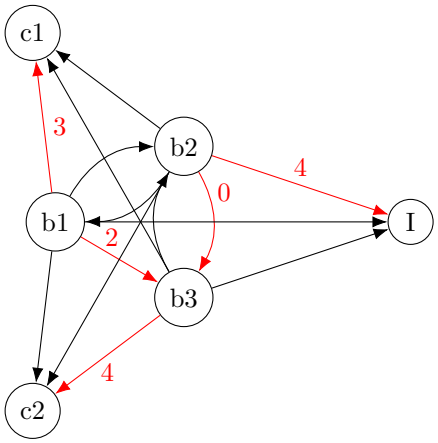
$$\bar{c}_{b1,b2} = 2 - \pi_{b1} + \pi_{b2} = -2$$
$$\bar{c}_{b1,b3} = 2 - \pi_{b1} + \pi_{b3} = -5$$
$$\bar{c}_{b1,c2} = 5 - \pi_{b1} + \pi_{c2} = -3$$
$$\bar{c}_{b2,b1} = 1 - \pi_{b2} + \pi_{b1} = 5$$
$$\bar{c}_{b2,c2} = 5 - \pi_{b2} + \pi_{c2} = 1$$
$$\bar{c}_{b2,c1} = 3 - \pi_{b2} + \pi_{c1} = 3$$
$$\bar{c}_{b3,b2} = 2 - \pi_{b3} + \pi_{b2} = 5$$
$$\bar{c}_{b3,c1} = 4 - \pi_{b3} + \pi_{c1} = 7$$
$$\bar{c}_{b3,I} = 1 - \pi_{b3} + \pi_I = 2$$

Existen costos reducidos negativos, por lo que no se está en el óptimo.

Iteración 3:
Por enunciado, el arco $(b1, b3)$ debe entrar a la base y se forma el siguiente ciclo:



Finalmente, $x_{b1,b3} = 2$, $x_{b2,I} = 4$, $x_{b2,b3} = 0$ y $x_{b1,I} = 0$, por lo tanto, $(b2, b3)$, o, $(b1, I)$ deben salir de la base. Arbitrariamente, se elige $(b1, I)$ y el árbol queda así:



Ahora, se debe ver si el árbol es óptimo:

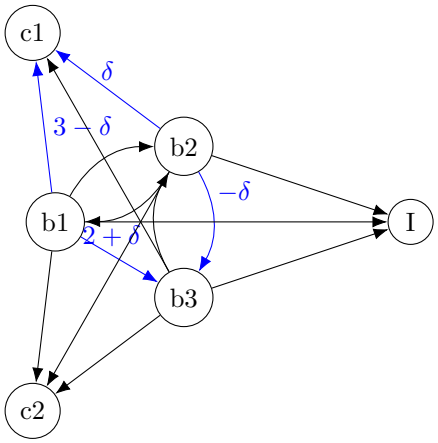
$$\begin{aligned}
\pi_{b1} - \pi_{c1} &= 4 \\
\pi_{b1} - \pi_{b3} &= 2 \\
\pi_{b2} - \pi_{b3} &= 3 \\
\pi_{b3} - \pi_{c2} &= 1 \\
\pi_{b2} - \pi_{I} &= 2
\end{aligned}$$

Fijando $\pi_I = 0$ se obtiene $\pi_{b1} = 1, \pi_{b2} = 2, \pi_{b3} = -1, \pi_{c1} = -3, \pi_{c2} = -2$. Con esto, se obtienen los valores de los costos reducidos:

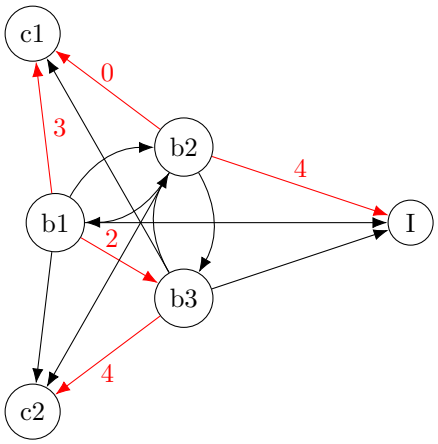
$$\begin{aligned}
\bar{c}_{b1,b2} &= 2 - \pi_{b1} + \pi_{b2} = 3 \\
\bar{c}_{b1,I} &= 6 - \pi_{b1} + \pi_{I} = 5 \\
\bar{c}_{b1,c2} &= 5 - \pi_{b1} + \pi_{c2} = 2 \\
\bar{c}_{b2,b1} &= 1 - \pi_{b2} + \pi_{b1} = 0 \\
\bar{c}_{b2,c2} &= 5 - \pi_{b2} + \pi_{c2} = 1 \\
\bar{c}_{b2,c1} &= 3 - \pi_{b2} + \pi_{c1} = -2 \\
\bar{c}_{b3,b2} &= 2 - \pi_{b3} + \pi_{b2} = 5 \\
\bar{c}_{b3,c1} &= 4 - \pi_{b3} + \pi_{c1} = 2 \\
\bar{c}_{b3,I} &= 1 - \pi_{b3} + \pi_{I} = 2
\end{aligned}$$

Iteración 4:

El arco $(b2, c1)$ debe entrar a la base y se forma el siguiente ciclo:



Finalmente, $x_{b2,c1} = 0$, $x_{b2,b3} = 0$, $x_{b1,b3} = 2$ y $x_{b1,c1} = 3$, por lo tanto, $(b2, b3)$ debe salir de la base y el árbol queda así:



Ahora, se debe ver si el árbol es óptimo:

$$\begin{aligned}
\pi_{b1} - \pi_{c1} &= 4 \\
\pi_{b1} - \pi_{b3} &= 2 \\
\pi_{b2} - \pi_{c1} &= 3 \\
\pi_{b3} - \pi_{c2} &= 1 \\
\pi_{b2} - \pi_{I} &= 2
\end{aligned}$$

Fijando $\pi_I = 0$ se obtiene $\pi_{b1} = 3, \pi_{b2} = 2, \pi_{b3} = 1, \pi_{c1} = -1, \pi_{c2} = 0$. Con esto, se obtienen los valores de los costos reducidos:

$$\bar{c}_{b1,b2} = 2 - \pi_{b1} + \pi_{b2} = 1$$
$$\bar{c}_{b1,I} = 6 - \pi_{b1} + \pi_I = 3$$
$$\bar{c}_{b1,c2} = 5 - \pi_{b1} + \pi_{c2} = 2$$
$$\bar{c}_{b2,b1} = 1 - \pi_{b2} + \pi_{b1} = 2$$
$$\bar{c}_{b2,c2} = 5 - \pi_{b2} + \pi_{c2} = 3$$
$$\bar{c}_{b2,b3} = 3 - \pi_{b2} + \pi_{b3} = 4$$
$$\bar{c}_{b3,b2} = 2 - \pi_{b3} + \pi_{b2} = 3$$
$$\bar{c}_{b3,c1} = 4 - \pi_{b3} + \pi_{c1} = 2$$
$$\bar{c}_{b3,I} = 1 - \pi_{b3} + \pi_I = 0$$

No existen costos reducidos, por lo que se puede concluir que el árbol recién encontrado es óptimo. El valor óptimo del problema es 28.

iii) El arco (b_1, I) no pertenece a la base óptima encontrada en *ii*), es decir, para que esta configuración de base óptima no cambie se debe cumplir la siguiente desigualdad:

$$\bar{c}_{b1,I} = c_{b_1,I} - \pi_{b1} + \pi_I \geq 0 \longrightarrow c_{b_1,I} \geq 3$$

Los valores de los π se obtienen de la última iteración desarrollada en *ii*). Cabe destacar que aunque el costo sea menor a 3, la solución óptima no necesariamente cambiaría, pues se está en un vértice degenerado.

c) Esta afirmación es verdadera. Para demostrarlo, se supone que P) no tiene solución óptima, es decir, existe un rayo de escape h, tal que $Ah = 0$ y $c^T h < 0$, con $h > 0$-. Sea $H = \{(i,j) : h_{(i,j)} > 0\}$ el conjunto de los arcos con flujo de h con $h_(i,j)$ la componente de la variable x_{ij} de h. Para que se cumpla la restricción $Ah = 0$ y $h > 0$ en una estructura de flujo en redes a costo mínimo, H es un conjunto de arcos, tal que cada arco pertenece a un ciclo formado por arcos de H. Esto se puede demostrar nuevamente por contradicción, suponiendo que existe un nodo l tal que no pertenece a ningún ciclo formado por arcos de H, que existe algún nodo k tal que $h_{(k,l)} \in H$ y que l es el final de una ruta de arcos de H (sin perder generalidad, pues si fuera el inicio de una ruta es análogo). Entonces, $\sum_{i \in N:(i,l) in H} h_{(i,l)} - \sum_{j \in N:(l,j) in H} h_{(l,j)} > 0$ y se contradice el primer supuesto. Por último, con lo demostrado respecto a h y considerando que $c^T h < 0$, necesariamente existe algún ciclo de costo negativo y se contradice el supuesto tomado en el enunciado, con lo que se demuestra lo pedido.

Problema 4. (12 puntos)

Suponga que usted administra una fábrica que se encarga de producir, almacenar y vender productos envasados a sus distribuidores. Los dueños de esta fábrica, se han dado cuenta de que los bajos niveles de inventario están afectando seriamente la imagen de la empresa, pues los clientes ponen en duda su eficiencia de despacho de pedidos. Por esto, es que se han propuesto desarrollar un modelo para aumentar estos niveles en un plazo de T períodos. La capacidad máxima de inventario es de P unidades. Suponga que sabe con seguridad que en caso de no usar horas extra (ya se explicarán más adelante) usted producirá u_t unidades y debe entregar a sus clientes d_t unidades en el turno t, con $t = 1, \ldots, T$. Suponga que por cada unidad entregada a sus clientes, usted gana $r\$/unidad$ al principio del mismo período. Con las ganancias obtenidas, se pueden pagar períodos de horas extras a c\$ por período. La opción de utilizar horas extras no se puede usar dos períodos seguidos y sí se puede financiar con las ganancias del mismo período. Al utilizar la opción de horas extras en el período t (no se puede pedir dos veces un mismo período), se duplicarán la cantidad de unidades que se producirán en ese turno, es decir, $2u_t$. Por restricciones de leyes laborales, no se puede pedir la opción de horas extras más de R veces durante los T períodos de evaluación.

Plantee un modelo de programación lineal mixta que le permita planificar como maximizar su inventario.

Asuma que en en el período $t = 1$ su nivel de inventario es de $\frac{P}{2}$ unidades y que sus ganancias acumuladas son nulas (sin contar las que recibirá el primer turno). Su principal objetivo debe ser ocupar el máximo nivel de inventario la mayor cantidad de veces durante los T períodos (en caso de que el inventario de un período sea mayor a P, el remanente se pierde), bajo la restricción de nunca quedarse con un nivel de inventario menor a s unidades. En caso de que no se puedan entregar las d_t unidades a los clientes en el turno t porque el nivel de inventario disminuiría de s, se pagará una multa de $h\$$ por unidad no entregada. Como segundo objetivo, debe maximizar las unidades en el período T. Entiéndase como prioridad el primer objetivo, es decir, luego de maximizar la cantidad de veces que se alcanza el máximo nivel de inventario, debe enfocarse en el segundo objetivo. [3]

Solución Problema 4.

a) Variables de decisión:

$$I_t = \text{Inventario de unidades almacenadas al final del período } t.$$

$$g_t = \text{Ganancias acumuladas al final del período } t.$$

$$m_t = \text{Unidades que no se pudieron entregar a los clientes en el período } t.$$

$$x_t = \begin{cases} 1 & \text{Si es que el período } t \text{ se paga por trabajar horas extras.} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$y_t = \begin{cases} 1 & \text{Si es que el período } t \text{ se llega al máximo nivel de inventario.} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Función Objetivo:

$$\text{máx} \sum_{t=1}^{T} y^t + \frac{I_T}{P}$$

s.a.

(1) Definición del inventario:

$$\begin{aligned} & I_t \leq I_{t-1} + u_t(1 + x_t) - d_t + m_t && \forall t = 2, \ldots, T \\ & I_t \leq P && \forall t = 2, \ldots, T \\ & I_1 \leq \frac{P}{2} + u_1(1 + x_1) - d_1 + m_1 \end{aligned}$$

(2) Definición de las ganancias acumuladas:

[3] Puede ser de ayuda revisar: Ferrer, J.C.; Gazmuri, P. y Muñoz, J.C. "Modelación de Problemas de Optimización.". Ejercicio 3.38 (La Gran Final). Disponible en SIDING.

$$g_t = g_{t-1} + rd_t - cx_t - hm_t \qquad \forall t = 2, \ldots, T$$
$$g_1 = rd_1 - cx_1 - hm_1$$

(4) Nivel mínimo de inventario:

$$I_t \geq s \qquad \forall t = 1, \ldots, T$$

(5) Nivel máximo de inventario:

$$y_t \leq \frac{I_t}{P} \qquad \forall t = 1, \ldots, T$$

(6) Cantidad de horas extras:

$$\sum_{t=1}^{T} x_t \leq R$$

(7) Naturaleza de las variables:

$$I_t, g_t, m_t \geq 0 \qquad \forall t = 1, \ldots, T$$
$$x_t, y_t \in \{0, 1\} \qquad \forall t = 1, \ldots, T$$