PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 01-2017
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado - F. Palominos
A. Cataldo - J.T. Marquinez

Interrogación 1

Duración: 2 horas y 15 minutos.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***
Como puede notar, la interrogación cuenta con ***65 puntos****. Bastan* ***60 puntos*** *para obtener una* ***nota de 7.0*** *en la interrogación, que es la nota máxima de la interrogación.*

Pregunta 1 (17 puntos)

(a) **(5 puntos)** Una joven estudiante de optimización tiene N mascotas en su parcela, y el peso de cada una de ellas es q_i. Para este fin de semana debe planificar la visita al veterinario con algunas de estas mascotas. Para el transporte cuenta con una camioneta que puede cargar Q kilos adicionales a la joven estudiante. Para facilitarse esta labor, ha definido la variable x_i que toma valor 1 si llevará al veterinario a su i-ésima mascota (con $i = 1, \ldots, N$). Ella sabe también que algunas mascotas no pueden ser llevadas juntas al veterinario, información que ha dispuesto en el parámetro A_{ij}, que tomar valor 1 si la mascota i y la mascota j no pueden viajar juntas en la camioneta. Con la información anterior, ayude a la estudiante a construir las siguientes restricciones de manera lineal.

(i) **(1 punto)** Asegurarse de que la visita al veterinario no llevará más mascotas que las que caben en la camioneta.

(ii) **(2 puntos)** Asegurarse que la estudiante no llevará al veterinario mascotas que no puedan viajar juntas en la camioneta.

(iii) **(2 puntos)** Asegurarse que si se lleva al veterinario a la mascota i, de entre todas las mascotas que se pueden llevar junto con esta mascota, no se lleven al veterinario más de R_i.

Solución:

(i) Basta con sumar la cantidad de peso de mascotas que será cargado en la camioneta y asegurarse de que no sea mayor que la capacidad Q en peso.

$$\sum_{i \in N} q_i x_i \leq Q$$

(ii) Basta con asegurarse de que la decisión de llevar a dos mascotas puede sumas 2 solo si el parámetro $A_{ij} = 0$, si este parámetro vale 1, entonces la suma de las variables x_i y x_j no puede ser 2.

$$x_i + x_j \leq 2 - A_{ij} \qquad \forall i, j \in N : j \neq i.$$

(iii) Basta con asegurarse que si se lleva a la mascota i se llevan a lo más R de entre las mascotas que cumplan con la condición de $A_{ij} = 0$, y que si no se lleva, se podrían llevar todas las demás mascotas (para esto se puede poner una M grande, o $M = |N| - 1$).

$$\sum_{j:A_{ij}=0} x_j \leq R_i x_i + (|N| - 1)(1 - x_i) \qquad \forall i \in N.$$

(b) **(8 puntos)** Considerando las siguientes definiciones:

- $\diamond$ $x_{i,t}$=: Variable Entera con $i = 1, ..., n$ elementos y $t = 1, ..., m$ meses.
- $\diamond$ $y_{i,t}$=: Variable Binaria con $i = 1, ..., n$ elementos y $t = 1, ..., m$ meses.
- $\diamond$ $0 \leq x_{i,t} \leq U$.
- $\diamond$ U escalar suficientemente grandes.

Construya las restricciones necesarias, todas de forma lineal, para modelar las siguientes situaciones:

(i) **(2 puntos)** Por lo menos tres $x_{i,t}$ son mayores que 3.
Solución:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{m} y_{i,t} \geq 3$$

$$x_{i,t} \geq 4y_{i,t} \quad i = 1, \ldots, n \quad t = 1, \ldots, m$$

(ii) **(2 puntos)** Para cualquier semestre móvil, solo existe un $y_{i,t}$ que toma valor 1.
Solución:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=k}^{k+5} y_{i,t} = 1 \quad k = 1, \ldots, m - 6$$

(iii) **(2 puntos)** Si $y_{i,t}$ no es cero, $x_{i,t}$ sí lo es.
Solución:

$$x_{i,t} \leq U(1 - y_{i,t}) \quad i = 1, \ldots, n \quad t = 1, \ldots, m$$

(iv) **(2 puntos)** Si $x_{i,t}$ es par, $y_{i,t}$ es cero.
Solución: Cabe notar que un número x es impar si existe un y entero tal que $x - 2y = 1$. Así, es necesario definir dos grupos de variables adicionales:

Sean:

z_{it}: Variable entera con $i = 1, ..., n$ elementos y $t = 1, ..., m$ meses.

α_{it}: Variable binaria con $i = 1, ..., n$ elementos y $t = 1, ..., m$ meses, que vale 1 si $x_{i,t}$ es impar y 0 si es par.

La relación anterior puede quedar expresada en una restricción que activa α cuando es necesario.

$$x_{it} - 2z_{it} = \alpha_{it} \qquad i = 1, \ldots, n \quad t = 1, \ldots, m$$

Así, la situación queda modelada de la siguiente manera

$$y_{i,t} \leq \alpha_{i,t} \quad i = 1, \ldots, n \quad t = 1, \ldots, m$$

(c) **(4 puntos)** Se define una variable x_{ij}^t que toma valor 1 si se programa el partido del equipo i con el equipo j para el fin de semana t, siendo i el equipo que jugará de local, y que toma valor 0 en cualquier otro caso. Se conoce el conjunto E de equipos que participan en el torneo, siendo $|E|$ un número par. Con estas definiciones construya las restricciones que se solicitan a continuación de manera lineal.

(i) **(2 puntos)** Garantizar que todos los equipos juegan en contra exactamente dos veces, siendo una de local y la otra de visita.

(ii) **(2 puntos)** Garantizar que en cada fin de semana cada equipo juega exactamente un único partido.

Solución:

(i) Basta con asegurar que todo equipo $i \in E$ recibirá una única vez en las $|E|-2$ fechas (cada equipo juega $|E|-1$ partidos de local y la misma cantidad de visita) a los $j \in E : j \neq i$ restantes.

$$\sum_{t=1}^{2|E|-2} x_{ij}^t = 1 \qquad \forall i, j \in E : i \neq j$$

(ii) Basta con asegurar que todo equipo $i \in E$ en cada $t = 1, \ldots, 2|E|-2$ juega exactamente un partido con algún otro equipo cualquiera, sin importar si ese partido es de local o de visita.

$$\sum_{j \in E: j \neq i} x_{ij}^t + \sum_{j \in E: j \neq i} x_{ji}^t = 1 \qquad \forall i \in E, t = 1, \ldots, 2|E|-2.$$

Pregunta 2 (17 puntos)

(a) **(11 puntos)** Considere el siguiente modelo de optimización:

$$\begin{aligned}
\max \quad & w_3 \\
\text{s.a.} \quad & x_t + y_t + z_t = 1, \ \forall t \in \{1, \ldots, 21\} && (1) \\
& w_1 = P + \sum_{t=1+7(i-1)}^{7} ((B_1 - C_1)x_t + (B_2 - C_2)y_t - C_3 z_t) && (2) \\
& w_i = w_{i-1} + \sum_{t=1+7(i-1)}^{7i} ((B_1 - C_1)x_t + (B_2 - C_2)y_t - C_3 z_t), i = 2, 3 && (3) \\
& \sum_{t=1}^{7} (C_1 x_t + C_2 y_t + C_3 z_t) \leq P && (4) \\
& \sum_{t=1+7i}^{7(i+1)} (C_1 x_t + C_2 y_t + C_3 z_t) \leq w_i \qquad i = 1, 2 && (5) \\
& x_t, y_t, z_t \in \{0, 1\} \qquad \forall t \in \{1, ..., 21\} && (6) \\
& w_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3 && (7)
\end{aligned}$$

Considere que P $(P > 0)$, $B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ son parámetros.

(i) **(1 punto)** ¿Qué representa la variable w_1?

(ii) **(1 punto)** ¿Qué representa la función objetivo?

(iii) **(6 puntos)** Explique qué significan las restricciones (1),(3),(4) y (5).

(iv) **(3 puntos)** Escriba una restricción adicional que represente que la variable x, no puede tomar valor 1 en dos valores de t sucesivos.

Solución:

(i) La variable w_1 representa el valor acumulado desde $t = 1$ a $t = 7$ del resultado de $((B_1 - C_1)\, x_t + (B_2 - C_2)\, y_t - C_3 z_t)$ para cada t. En una primera instancia se podría interpretar B_i como el beneficio de realizar actividad x_i, y_i o z_i y el parámetro C_i, el costo de realizar dicha actividad.

(ii) La función objetivo representa el valor acumulado hasta el final del período ($t = 21$) de las expresiones $((B_1 - C_1)\, x_t + (B_2 - C_2)\, y_t - C_3 z_t)$ para cada t.

(iii) Se tiene que:

- ◇ La restricción (1) representa que sólo una de las actividades x_i, y_i o z_i debe realizarse para cada t.
- ◇ La restricción (3) representa el valor acumulado hasta el período $t = 14$ ($w_1 = 2$) y $t = 21$ ($w_1 = 3$) de la expresión $((B_1 - C_1)\, x_t + (B_2 - C_2)\, y_t - C_3 z_t)$, que considera el valor obtenido para el período anterior.
- ◇ La restricción (4) representa que la suma $((B_1 - C_1)\, x_t + (B_2 - C_2)\, y_t - C_3 z_t)$ para $t = 1$ hasta $t = 7$ no puede ser superior a P. Se podría interpretar que P es un presupuesto asociado a realizar las actividades de la primera semana.
- ◇ La restricción (5) indica que la suma $((B_1 - C_1)\, x_t + (B_2 - C_2)\, y_t - C_3 z_t)$ para los siguientes períodos no puede ser superior al valor de w que tenía al inicio del período.

(iv) En este caso se tiene que:

$$x_t + x_{t+1} \leq 1 \qquad \forall t = 1, \ldots, 20.$$

(b) **(6 puntos)** En la lógica booleana existen 2 funciones claves para el funcionamiento de todos los sistemas digitales; las funciones AND y OR. Asuma que existe un set de variables binarias x_i, con $i = 1, ..., n$, las cuales definirán el comportamiento obligatorio de la variable binaria y de acuerdo a cada una de estas funciones. Plantee las restricciones necesarias. todas de forma lineal, que permitan modelar el comportamiento exacto de estas relaciones.

(i) **(3 puntos)** Definición de función AND: Solamente cuando todos los x_i valen 1, la variable y debe tomar el valor de 1. Cuando algún x_i toma el valor de 0, la variable y debe tomar el valor de 0.

(ii) **(3 puntos)** Definición de función OR: Cuando alguno de los x_i toma el valor de 1, la variable y debe tomar el valor de 1. Cuando todos los x_i toman el valor de 0, la variable y debe tomar el valor de 0.

Solución:

(i) Función AND

R1) Solo cuando todos los x_i toman el valor de 1, la variable y puede tomar el valor 1.

$$y \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

R2) Cuando todos los x_i valen 1, la variable y debe tomar el 1.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - (n-1) \leq y$$

R3) Naturaleza de variables.

$$x_i, y \in \{0, 1\}$$

(ii) Función OR

R1) Cuando algún x_i toma el valor 1, la variable y debe tomar el valor 1.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \leq y$$

R2) Cuando todos los x_i valen 0, la variable y debe tomar el 0.

$$y \leq \sum_{i=1}^{n} x_i$$

R3) Naturaleza de variables.

$$x_i, y \in \{0, 1\}$$

Pregunta 3 (14 puntos)

(a) **(8 puntos)** Un brote de una enfermedad contagiosa ha sido descubierto en un conjunto N de ubicaciones. Existe un conjunto M de equipos capaces de investigar estos brotes. El equipo $i \in M$ puede concluir su investigación sobre el brote en la ubicación $j \in N$ en t_{ij} horas. Cada equipo puede investigar cero, uno o dos brotes. Si un equipo investiga dos brotes, debe entonces viajar de una ubicación a la siguiente. El tiempo de viaje desde la ubicación $j_1 \in N$ a la ubicación $j_2 \in N$ es $2d_{j_1 j_2}$. Asuma que el tiempo de traslado desde el centro de control a cualquiera de las ubicaciones $j \in N$, y desde las ubicaciones al centro de control, es despreciable, y que todos los equipos comenzarán a trabajar en sus asignaciones desde la hora cero ($t = 0$).

Una vez que todos los brotes han sido investigados, un centro de control de enfermedades puede tomar acción para combatir el brote. Así, se requiere completar la investigación en todas las ubicaciones en una cantidad de tiempo mínima y, para ello, se les pide modelar la situación con un modelo de programación lineal entera.

Solución:
Para que el modelo sea lineal, es necesario definir dos conjuntos de variables:

Variables:

x_{ij}: Variable binaria que vale 1 si el equipo $i \in M$ investiga el brote en la ubicación $j \in N$, y 0 si no.

$w_{ij_1 j_2}$: Variable binaria que representa la expresión $x_{ij_1} \cdot x_{ij_2}$.

θ: Tiempo en que termina la última investigación en terminar.

Función objetivo:

$$\min \theta$$

Restricciones: Para esto, es mejor darse cuenta

(R1): cada ubicación debe ser cubierta por exactamente un equipo de investigación.

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \in N$$

(R2): Cada equipo puede investigar como máximo dos ubicaciones.

$$\sum_{j \in N} x_{ij} \leq 2 \qquad \forall i \in M$$

(R3): Construir la variable $w_{ij_1j_2}$.

$$w_{ij_1j_2} \leq x_{ij_1}$$
$$w_{ij_1j_2} \leq x_{ij_2}$$
$$w_{ij_1j_2} \geq x_{ij_1} + x_{ij_2} - 1$$

(R4): Determinación de θ. Notar que, para cada equipo i, $d_{j_1j_2}$ tomará valor solamente si el equipo i visita tanto j_1 como j_2.

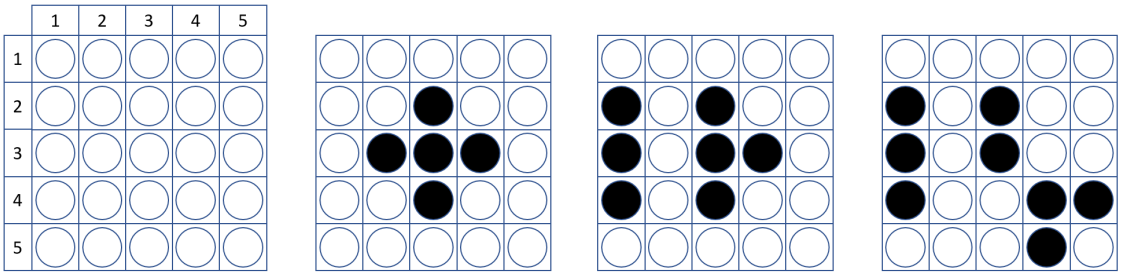
$$\sum_{j \in N} t_{ij} x_{ij} + \sum_{j_1 \in N} \sum_{j_2 \in N : j_1 \neq j_2} d_{j_1j_2} w_{ij_1j_2} \leq \theta \qquad \forall i \in M$$

(R5): Naturaleza de las variables:

$$\theta \geq 0$$
$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i \in M \qquad \forall j \in N$$
$$w_{ij_1j_2} \in \{0,1\} \qquad \forall i \in M, \qquad \forall j_1, j_2 \in N$$

(b) **(6 puntos)** Considere un tablero de 5×5 en que en cada casilla hay una ficha. Cada ficha tiene dos caras: una negra y una blanca. En el tablero, inicialmente lleno de fichas con la cara blanca hacia arriba, se puede jugar a dar vuelta todas las fichas de un tablero, de modo que queden todas negras. Para invertir una ficha de color, basta con darla vuelta, aunque esto tiene consecuencias. Si una ficha es invertida, también se debe invertir la ficha inmediatamente superior, la inmediatamente inferior, la inmediatamente a la izquierda y la inmediatamente a la derecha. Si se presiona una ficha de borde, se invierten solamente las fichas que están en el tablero (por ejemplo, si se presiona la ficha de la esquina superior izquierda del tablero, solamente se invertirán esa, la de su derecha y la inferior). La acción de seleccionar una ficha para invertir la llamamos "presionar".

En el siguiente ejemplo, primero se presiona la casilla (3,3), luego la (3,1) y luego la (4,4).



Se pide diseñar un modelo de programación lineal entero que permita determinar las fichas a presionar de forma que se presione la menor cantidad de fichas posibles.

Solución:
El modelo de optimización es atemporal, es decir, no importa cuándo una ficha fue apretada, si no que la cantidad de veces que fue apretada una de ellas o su vecina.

VARIABLES:

x_{ij}: Variable binaria que vale 1 si la casilla (i, j) fue presionada, y 0 si no.

y_{ij}: Variable entera para determinar si una casilla o sus vecinas fueron apretadas un número impar de veces.

Función objetivo:

$$\text{mín} \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{5} x_{ij}$$

Restricciones: Para esto, es mejor darse cuenta

(R1): Deseamos que la cantidad de veces que una casilla y sus vecinas han sido presionadas sea impar. Notemos que x es impar si existe un y entero tal que $x - 2y = 1$.

$$x_{ij} + x_{i,j+1} + x_{i,j-1} + x_{i+1,j} + x_{i-1,j} - 2y_{ij} = 1 \qquad \forall i, j = 1, \ldots, 5$$

Esta restricción se ajusta para excluyendo las variables que se salen del tablero en los casos borde.

(R2): Para limitar la cantidad de valores que puede tomar y_{ij}. **Esta restricción no es necesaria**, pero podría ser útil al resolver el problema.

$$y_{ij} \leq 2 \qquad \forall i, j = 1, \ldots, 5$$

(R3): Naturaleza de las variables

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i, j = 1, \ldots, 5$$

$$y_{ij} \in \mathbb{Z}_0^+ \qquad \forall i, j = 1, \ldots, 5$$

Pregunta 4 (17 puntos)

El afamado director de cine, Joseph Tomacini, realizará un festival de cine durante las vacaciones de invierno venideras. Para este festival cuenta con un listado de P películas con derecho de exhibición, con un conjunto de S salas de cine, dispone de T días (consecutivos) y ha dividido cada uno de estos días en M módulos, de igual duración cada uno (imagine que en un día de 10 horas, se consideran 20 módulos de media hora cada uno).

Se conoce la duración de cada una de las películas que pueden ser exhibidas durante el festival, siendo L_p módulos la duración de la película p, para todo $p \in P$. También se conoce la demanda que enfrenta cada película, siendo D_p^t la cantidad de personas dispuestas a comprar una entrada para ver la película P, para todo $p \in P$, si esta película es exhibida el día t, para todo $t = 1, \ldots, T$. Se considera que la capacidad de cada sala es Q_s, para $s \in S$.

A modo de que el festival resulte exitoso, Joseph ha decidido que cada película puede ser exhibida a lo más una vez cada día en cada sala, y que cada película no puede estar siendo exhibida simultáneamente en dos o más salas. Obviamente, cada película es exhibida de manera continua y completa, si es que es exhibida.

Si el precio de las entradas se ha fijado en R_p pesos por una entrada para ver la película p, para todo $p \in P$, formule un modelo de programación lineal entera que ayude a Joseph Tomacini a recaudar la mayor cantidad de dinero durante la realización de su festival.

Solución:

Variables:

x_{ps}^{tm}: Variable binaria que vale 1 si la película $P \in P$ comienza su exhibición en la sala $s \in S$ durante el día $t = 1, \ldots, T$ exactamente en el módulo $m = 1, \ldots, M$ y 0 si no.

y_{ps}^{tm}: Variable binaria que vale 1 si la película $P \in P$ se exhibe en la sala $s \in S$ durante el día $t = 1, \ldots, T$ en el módulo $m = 1, \ldots, M$ y 0 si no.

V_p^t: Variable discreta que indica la cantidad de entradas que son vendidas para ver la película $p \in P$ durante el día $t = 1, \ldots, T$.

Función objetivo:

$$\text{Max} \sum_{p \in P} R_p \left(\sum_{t=1}^{t} V_p^t \right)$$

Restricciones: Para esto, es mejor darse cuenta

(R1): Exhibir a los más una vez una película en una misma sala cada día.

$$\sum_{m=1}^{M} x_{ps}^{tm} \leq 1 \qquad \forall p \in P, s \in S, t = 1, \ldots, T.$$

(R2): En un mismo módulo, día y sala se exhibe a lo más una película.

$$\sum_{p \in P} y_{ps}^{tm} \leq 1 \qquad \forall s \in S, t = 1, \ldots, T, m = 1, \ldots, M.$$

(R3): Relacionar las variables x_{ps}^{tm} e y_{ps}^{tm}.

$$1 - x_{ps}^{tm} \geq y_{qs}^{t\theta} \qquad \forall p \in P, q \in P : q \neq p, s \in S, t = 1, \ldots, T, m = 1, \ldots, M, \theta = m, \ldots, m + L_p - 1$$

$$\sum_{\theta = m - L_p + 1}^{m} x_{ps}^{t\theta} = y_{ps}^{tm} \qquad \forall p \in P, s \in S, t = 1, \ldots, T, m = L_p, \ldots, M,$$

(R4): Asegurar que no se programan exhibiciones de películas que no pueden exhibirse completamente.

$$x_{ps}^{tm} = 0 \qquad \forall p \in P, s \in S, t = 1, \ldots, T, m = M - L_p + 2, \ldots, M.$$

(R5): No se exhibe una misma película de manera simultánea en las salas.

$$\sum_{s \in S} y_{ps}^{tm} \leq 1 \qquad \forall p \in P, t = 1, \ldots, T, m = 1, \ldots, M.$$

(R6): Asegurar que la venta es el mínimo entre la demanda y la capacidad de las salas asignadas a la exhibición de la película.

$$V_p^t \leq \sum_{s \in S} \left(Q_s \sum_{m=1}^{M} x_{ps}^{tm} \right) \qquad \forall p \in P, t = 1, \ldots, T.$$

$$V_p^t \leq D_p^t \qquad \forall p \in P, t = 1, \ldots, T.$$

(R7): Naturaleza de las variables:

$$x_{ps}^{tm}, y_{ps}^{tm} \in \{0, 1\} \qquad \forall p \in P, s \in S, t = 1, \ldots, T, m = 1, \ldots, M.$$

$$V_p^t \in \mathbb{Z}_0^+ \qquad \forall p \in P, t = 1, \ldots, T.$$