FACULTAD DE INGENIERÍA
Departamento de Industrias
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Curso: Optimización
Semestre: 01-2011
Profesor: Alejandro Cataldo C.
Ayudantes: Karin Hofer - Benjamín Lizana
Catalina Parga - Camila Ramos

Pauta Interrogación 3

Cada pregunta será evaluada con una nota entre 1.0 y 7.0. La prueba cuenta con una ponderación total de 105 %. No se permite el uso de calculadora o celulares de ningún tipo.

Pregunta 1 (35 %)

Cada una de las cuatro partes de esta pregunta vale lo mismo, y es independiente de las otras.

Parte A

Un banquetero debe disponer de manteles limpios para realizar sendos banquetes en los cuatro siguientes días, con demandas de 100, 130, 150 y 140 unidades, respectivamente. Para ello, dispone de un stock inicial de 200 manteles limpios, de la posibilidad de comprar manteles en todo momento y sin límite de cantidad, a un precio de $12 la unidad, y de la posibilidad de enviar a lavar manteles en servicio rápido, de un banquete para el siguiente a $6 la unidad, o en servicio lento, de un banquete para el subsiguiente, a $4 la unidad.

Formule el problema de aprovisionamiento de manteles limpios a mínimo costo total, como un problema de flujo a costo mínimo. Para ello, utilice la descripción gráfica del problema a través de su grafo correspondiente.

Pauta Parte A

La figura 1 muestra el grafo correspondiente:

Parte B

Se tiene el siguiente problema de optimización:

$$\text{P)} \ \max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 & \leq & 7 \\ 3x_1 + 5x_2 & \geq & 2 \\ x_1, x_2 & \geq & 0, \text{ enteros} \end{array}$$

i) Muestre formalmente que la relajación lineal del problema tiene solución óptima.

ii) Utilice el algoritmo de ramificación y acotamiento para obtener la solución óptima del problema P).

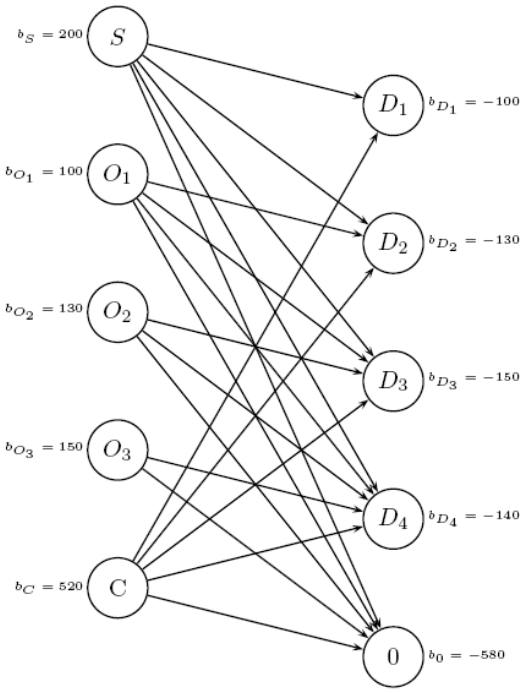


Figura 1: Grafo del problema d flujo a costo mínimo para disponer de manteles limpios.

Pauta Parte B

i) El espacio de soluciones factibles no es vacío pues el punto $(1, 0)$ cumple con todas las restricciones del problema. Como las restricciones no son de desigualdad estricta el espacio es cerrado. Con la naturaleza de variables y la restricción 1 se tiene que las variables están acotadas, pues $x_1 \in [0, \frac{7}{2}]$ y $x_1 \in [0, \frac{7}{3}]$. Luego el espacio es compacto. La función objetivo es un polinomio de primer grado, luego es continua. En consecuencia, por el teorema de Bolzano-Weirtrass se asegura que la relajación lineal del problema P) posee solución óptima.

ii) En la figura 2 se muestra el gráfico que permite resolver las relajaciones lineales de los subproblemas que se generan en la ramificación y acotamiento.

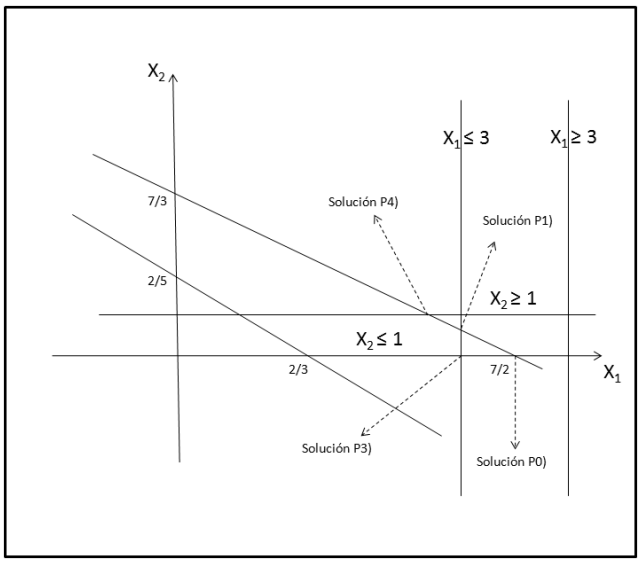


Figura 2: Gráfico asociado al problema P).

La figura 3 muestra el árbol de subproblemas que queda al aplicar el algoritmo.

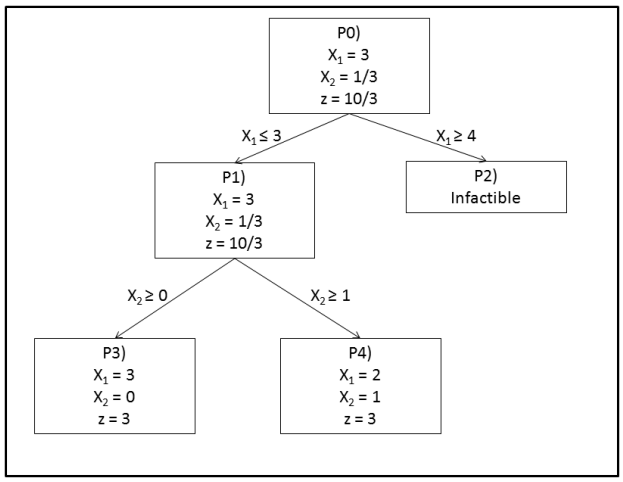


Figura 3: Árbol de ramificación.

En este caso, el problema P) tiene dos soluciones óptimas: $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$ o $x_1 = 3$ y $x_2 = 0$, ambas con valor de función objetivo de 3.

Parte C

Usted tiene un grupo de I guardias de seguridad. Para el trabajo usted necesita M_t guardias para el día t, con $t = 1, .., T$. Usted ha definido la variable x_{it}, que toma valor 1 si el guardia i deberá trabajar el día t. Con la información anterior construya las siguientes restricciones:

i) Asegurar que la cada día se cuenta con la cantidad mínima de guardias requeridos.

ii) Asegurar que un guardia cualquiera no trabajará más de P días de los T días.

iii) Asegurar que un guardia cualquiera trabajará al menos una vez 3 días seguidos.

iv) Asegurar que un guardia cualquiera si trabaja el día t, entonces deberá trabajar al menos el día $t-1$ o el día $t+1$.

Pauta Parte C

Las restricciones pedidas quedan:

i)
$$\sum_{i=1}^{I} x_{it} \geq M_t \ \ \forall t = 1, ..., T.$$

ii)
$$\sum_{t=1}^{T} x_{it} \leq P \ \ \forall i = 1, ..., I.$$

iii) Definimos la variable α_{it} que tomará valor 1 si el guardia i trabaja 3 días seguidos contando como primer día el día t y 0 en caso contrario. Luego, se tiene que:

$$\sum_{t=1}^{T-2} \alpha_{it} \geq 1 \ \ \forall i = 1, ..., I.$$

$$\frac{\sum_{\theta=t}^{t+2} x_{i\theta}}{3} \geq \alpha_{it} \ \ \forall i = 1, ..., I; t = 1, ..., T-2.$$

iv)
$$x_{it-1} + x_{it+1} \geq x_{it} \ \ \forall i = 1, ..., I; t = 2, ..., T-1$$

Parte D

Usted tiene a su cargo un grupo de 6 personas y los debe colocar en 2 oficinas. Usted sabe que existen distintos tipos de relaciones entre las personas, y ha logrado construir una tabla que cuantifica estas enemistades en 4 categorías que miden *distancia de amistad*, siendo: (1) amigos; (3) conocidos; (4) indiferentes; y (7) enemigos. En la siguiente tabla se muestra el detalle de la información:

Persona	T1	T2	T3	T4	T5	T6
T1	-	1	4	4	1	3
T2	-	-	4	1	4	3
T3	-	-	-	4	1	4
T4	-	-	-	-	1	4
T5	-	-	-	-	-	7

Formule el problema de destinar trabajadores a las oficinas como un problema de redes, considerando que desea minimizar la *distancia de amistad* en la conformación de ambas oficinas, pero teniendo en cuenta que dos personas que son enemigas no pueden estar en la misma oficina.

Pauta Parte D

La figura4 muestra el grafo asociado al problema de corte mínimo(flujo máximo) que representa el problema.

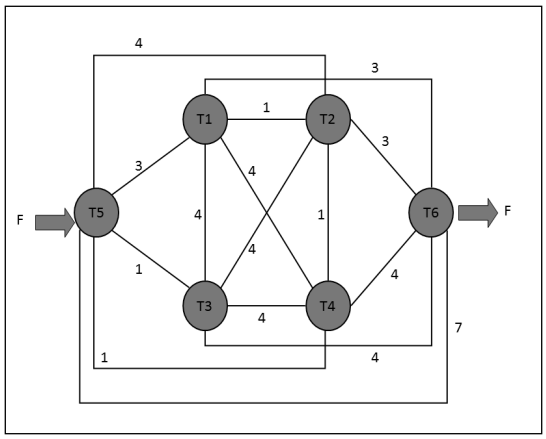


Figura 4: Árbol de rutas más cortas.

Pregunta 2 (30 %)

La empresa ENEA construyó un embalse en el sur de país para entregar agua a sus clientes locales. Los clientes locales están divididos en los predios P1, P2, P3 y P4. Actualmente, la demanda es de 4, 4, 3 y 7 litros de agua por día, para los predios P1, P2, P3 y P4 respectivamente.

El costo (medido en pesos) de transportar una unidad de agua desde el embalse a los diferentes predios y entre predios se muestra en la siguiente tabla.

Origen\Destino	Embalse	P1	P2	P3	P4
Embalse	-	25	25	-	-
P1	-	-	-	-	-
P2	-	-	-	15	10
P3	-	20	-	-	30
P4	-	-	-	-	-

Aquellas celdas marcadas con "-" indican que no existe el canal para realizar transporte en ese par origen\destino. También se sabe que los canales han sido construidos todos iguales, lo que significa que la cota mínima es 0 y la cota máxima es 20 litros de agua por día para todos ellos.

La empresa actualmente tiene implementada la siguiente política de distribución de agua: se envían directamente los 4 litros de demanda del predio P1 y del predio P2 desde el embalse, y los 3 litros demandados por el predio P3 con los 7 litros de agua solicitada por el predio P4 son enviados directamente desde el predio P2.

En estos momentos la empresa ha decidido revisar su política de despacho tomando en cuenta dos factores que no han sido considerados anteriormente. Por un lado agregar un beneficio que se obtiene por transportar agua a través del canal que va del embalse al predio P2, o por el canal que va del predio P2 al predio P3, o por el canal que va desde el predio P3 al predio P1. Específicamente, se tiene que cada litro de agua que se transporta por uno de estos tres canales genera un beneficio de 10 pesos. El otro factor ha considerar es la posibilidad de no entregar la totalidad o parte de la demanda del predio P4, lo cual tiene un costo de 15 pesos por cada litro que no es entregado.

Con base en la información anterior responda:

a) (1,5 puntos) Formule el problema antes descrito como un problema de flujo a costo mínimo. Para ello, dibuje en detalle el grafo asociado al problema, y defina: los costos de cada arco, las cotas inferiores y superiores para los flujos y los flujos exógenos a la red (ofertas y demandas).

b) (2,0 puntos) Utilice el algoritmo de simplex especializado en redes para encontrar la solución obtenido del problema planteado en **(a)**.

c) (1,0 punto) Demuestre, utilizando los teoremas débil de dualidad, fuerte de dualidad y de holgura complementaria, que la solución encontrada en la parte **(b)** es efectivamente la solución óptima del problema **(a)**.

d) (0,5 puntos) Justifique por qué es posible resolver el problema planteado en **(a)** como uno de ruta más corta.

e) (1,0 punto) Utilice el algoritmo de Dijkstra para obtener la solución óptima del problema planteado en la parte **(a)**.

Pauta Pregunta 2

a) (1,5 puntos) El grafo de la figura 5 corresponde al grafo que describe el problema de flujo máximo. La información sobre los arcos corresponde a (l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}). El arco que se encuentra dibujado con línea punteada corresponde a un arco ficticio que se construye para posibilitar el no llevar parte de la demanda al predio P4.

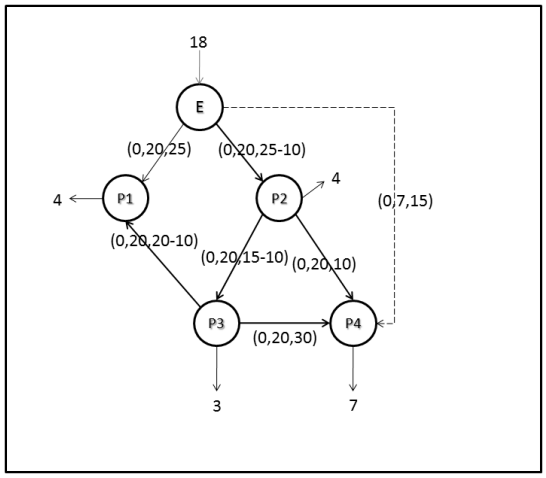


Figura 5: Grafo parte a).

b) (2,0 puntos) La solución factible inicial corresponde a la presentada en la figura 6. La figura 7 La siguiente muestra el árbol básico que corresponde a la solución factible inicial.

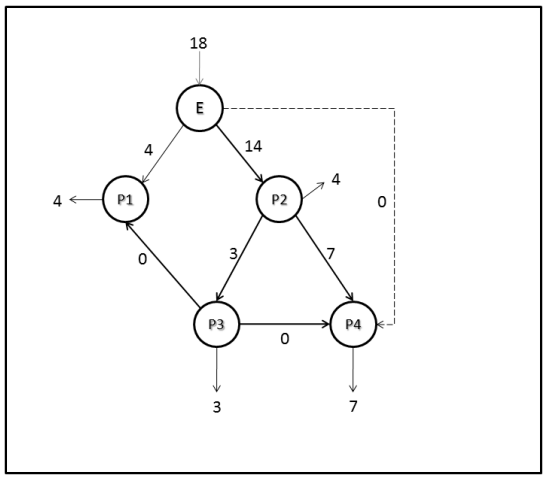


Figura 6: Solución factible inicial.

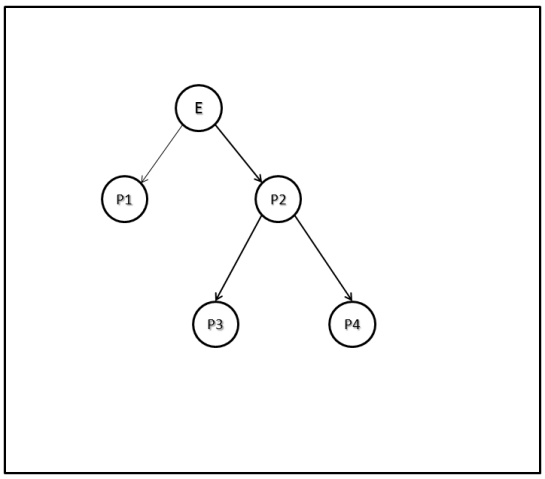


Figura 7: Árbol básico de la solución inicial.

Ahora obtenemos el valor de las variables duales π_i con el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcccccccc}
\bar{c}_{EP1} & = & 25 - \pi_E + \pi_{P1} & = & 0 & \mapsto & 25 & = & \pi_E - \pi_{P1} \\
\bar{c}_{EP2} & = & 15 - \pi_E + \pi_{P2} & = & 0 & \mapsto & 15 & = & \pi_E - \pi_{P2} \\
\bar{c}_{P2P3} & = & 5 - \pi_{P2} + \pi_{P3} & = & 0 & \mapsto & 5 & = & \pi_{P2} - \pi_{P3} \\
\bar{c}_{P2P4} & = & 10 - \pi_{P2} + \pi_{P4} & = & 0 & \mapsto & 10 & = & \pi_{P2} - \pi_{P4}
\end{array}$$

Luego al resolver este sistema (fijando alguno de los $\pi' s$) se obtiene (fijaremos $\pi_E = 0$):

$$\begin{array}{rcc}
\pi_E & = & 0 \\
\pi_{P1} & = & -25 \\
\pi_{P2} & = & -15 \\
\pi_{P3} & = & -20 \\
\pi_{P4} & = & -25
\end{array}$$

y ahora se calcula el costo reducido de los flujos no básicas. Entonces:

$$\begin{array}{rcccccc}
(CI) \ \bar{c}_{EP4} & = & 15 - \pi_E + \pi_{P4} & = & 15 - (0) + (-25) & = & -10 < 0 \text{ no cumple} \\
(CI) \ \bar{c}_{P3P1} & = & 10 - \pi_{P3} + \pi_{P1} & = & 10 - (-20) + (-25) & = & 5 > 0 \text{ cumple} \\
(CI) \ \bar{c}_{P3P4} & = & 30 - \pi_{P2} + \pi_{P3} & = & 30 - (-15) + (-20) & = & 25 > 0 \text{ cumple}
\end{array}$$

Entra el flujo del arco $EP4$ a la base. La figura 8 permite reasignar flujo y determinar el flujo que abandona la base. Luego, abandona la base $EP4$ y la solución factible actual es la que se muestra en la figura 9.

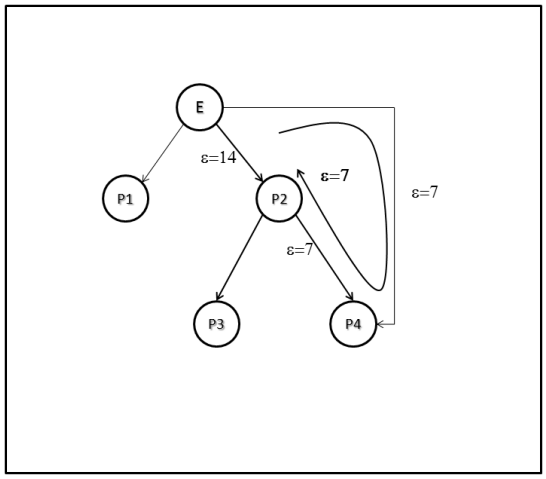


Figura 8: Circuito para incrementar flujo.

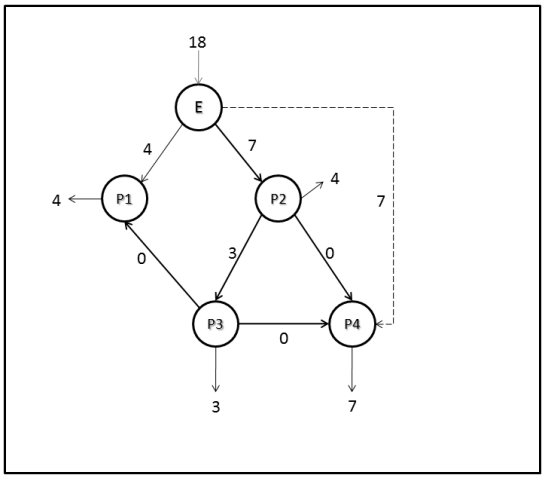


Figura 9: Solución factible iteración 1.

y la base factible se muestra en la figura 10.

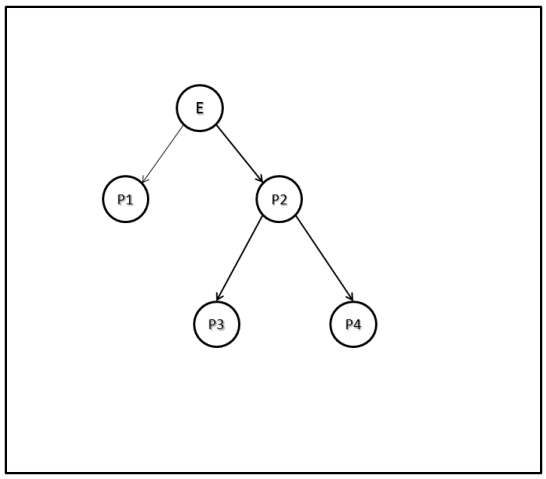


Figura 10: Base factible iteración 1.

Ahora obtenemos el valor de las variables duales π_i con el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcccccccc}
\bar{c}_{EP1} & = & 25 - \pi_E + \pi_{P1} & = & 0 & \mapsto & 25 & = & \pi_E - \pi_{P1} \\
\bar{c}_{EP2} & = & 15 - \pi_E + \pi_{P2} & = & 0 & \mapsto & 15 & = & \pi_E - \pi_{P2} \\
\bar{c}_{P2P3} & = & 5 - \pi_{P2} + \pi_{P3} & = & 0 & \mapsto & 5 & = & \pi_{P2} - \pi_{P3} \\
\bar{c}_{P2P4} & = & 10 - \pi_{P2} + \pi_{P4} & = & 0 & \mapsto & 10 & = & \pi_{P2} - \pi_{P4}
\end{array}$$

Luego al resolver este sistema (fijando alguno de los $\pi's$) se obtiene (fijaremos $\pi_E = 0$):

$$\begin{array}{rcc}
\pi_E & = & 0 \\
\pi_{P1} & = & -25 \\
\pi_{P2} & = & -15 \\
\pi_{P3} & = & -20 \\
\pi_{P4} & = & -25
\end{array}$$

y ahora se calcula el costo reducido de los flujos no básicas. Entonces:

$$\begin{array}{rcccccccc}
(CS) & \bar{c}_{EP4} & = & 15 - \pi_E + \pi_{P4} & = & 15 - (0) + (-25) & = & -10 < 0 \text{ cumple} \\
(CI) & \bar{c}_{P3P1} & = & 10 - \pi_{P3} + \pi_{P1} & = & 10 - (-20) + (-25) & = & 5 > 0 \text{ cumple} \\
(CI) & \bar{c}_{P3P4} & = & 30 - \pi_{P2} + \pi_{P3} & = & 30 - (-15) + (-20) & = & 25 > 0 \text{ cumple}
\end{array}$$

Luego, estamos en la solución óptima del problema planteado en a) (que corresponde a la figura 9). El costo total de la solución es 325.

c) (1,0 punto) Formulemos el problema de flujo a costo mínimo de la parte a):

$$\begin{array}{c}
\text{mín } 25f_{EP1} + 15f_{EP2} + 15f_{EP4} + 5f_{P2P3} + 10f_{P2P4} + 10f_{P3P1} + 30f_{P3P4} \\
f_{EP1} + f_{EP2} + f_{EP4} = 18 \quad \leftarrow y_1 \\
f_{EP1} + f_{P3P1} = 4 \quad \leftarrow y_2 \\
f_{EP2} - f_{P2P3} - f_{P2P4} = 4 \quad \leftarrow y_3 \\
f_{P2P3} - f_{P3P1} - f_{P3P4} = 3 \quad \leftarrow y_4 \\
f_{EP4} + f_{P2P4} + f_{P3P4} = 7 \quad \leftarrow y_5 \\
f_{EP1} \leq 20 \quad \leftarrow y_6 \\
f_{EP2} \leq 20 \quad \leftarrow y_7 \\
f_{EP4} \leq 7 \quad \leftarrow y_8 \\
f_{P2P3} \leq 20 \quad \leftarrow y_9 \\
f_{P2P4} \leq 20 \quad \leftarrow y_{10}
\end{array}$$

$$f_{P3P1} \leq 20 \quad \leftarrow y_{11}$$
$$f_{P3P4} \leq 20 \quad \leftarrow y_{12}$$
$$f_{EP1}, f_{EP2}, f_{EP4}, f_{P2P3}, f_{P2P4}, f_{P3P1}, f_{P3P4} \geq 0$$

El dual de este problema (y la variable primal asociada a cada restricción) es el siguiente:

$$\text{máx } 18y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 3y_4 + 7y_5 + 20y_6 + 20y_7 + 7y_8 + 20y_9 + 20y_{10} + 20y_{11} + 20y_{12}$$
$$y_1 + y_2 + y_6 \leq 25 \quad \leftarrow f_{EP1}$$
$$y_1 + y_3 + y_7 \leq 15 \quad \leftarrow f_{EP2}$$
$$y_1 + y_5 + y_8 \leq 15 \quad \leftarrow f_{EP4}$$
$$-y_3 + y_4 + y_9 \leq 5 \quad \leftarrow f_{P2P3}$$
$$-y_3 + y_5 + y_{10} \leq 10 \quad \leftarrow f_{P2P4}$$
$$y_2 - y_4 + y_{11} \leq 10 \quad \leftarrow f_{P3P1}$$
$$-y_4 + y_5 + y_{12} \leq 30 \quad \leftarrow f_{P3P4}$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \text{ son irrestrictas}$$
$$y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12} \leq 0$$

La solución de primal es: $f_{EP1} = 4$, $f_{EP2} = 7$, $f_{EP4} = 7$, $f_{P2P3} = 3$, $f_{P2P4} = 0$, $f_{P3P1} = 0$ Y $f_{P3P4} = 0$. Luego, las restricciones 1, 2, 3 y 4 del dual son activas. Además, está información permite determinar que las variables duales y_6, y_7, y_9, y_{10}, y_{11} E y_{12} valen 0. Entonces, nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$y_1 + y_2 = 25 \ \ (E1)$$
$$y_1 + y_3 = 15 \ \ (E2)$$
$$y_1 + y_5 + y_8 = 15 \ \ (E3)$$
$$-y_3 + y_4 = 5 \ \ (E4)$$

de donde la ecuación $(E4)$ queda $y_4 = 5 + y_3$. Entonces, $4(E1) + 7(E2) + 7(E3) + 3(E4)$ queda:

$$\text{máx } 18y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 3y_4 + 7y_5 + 20y_6 + 20y_7 + 7y_8 + 20y_9 + 20y_{10} + 20y_{11} + 20y_{12} = 325$$

Luego, tenemos que la solución primal y dual tienen el mismo valor para sus respectivas funciones objetivo. Además, ambas son factibles (esto por la forma de construir la solución dual) de sus respectivos problemas. En consecuencia, por el teorema fuerte de dualidad se asegura que ambas son soluciones óptimas de sus respectivos problemas.

d) (0,5 puntos) En este caso todas las cotas máximas son superiores al flujo total que ingresa a la red ($18 < 20$), en consecuencia, es perfectamente posible formular el problema como uno de ruta más corta que termina cuando el conjunto de nodos a visitar queda vacío, y en el cual el transporte se realizará por el árbol de rutas más cortas.

e) (1,0 punto) La inicialización del algoritmo se muestra en la siguiente tabla:

Nodo	d_i	l_i	Fue visitado?
E	0	E	Si
$P1$	∞	-	No
$P2$	∞	-	No
$P3$	∞	-	No
$P4$	∞	-	No

Se actualiza la información y se escoge el nodo que será visitado, quedando:

Nodo	d_i	l_i	Fue visitado?
E	0	E	Si
$P1$	25	E	No
$P2$	15	E	Si
$P3$	∞	-	No
$P4$	15	E	No

Se actualiza nuevamente y se escoge el nodo que será visitado, quedando:

Nodo	d_i	l_i	Fue visitado?
E	0	E	Si
$P1$	25	E	No
$P2$	15	E	Si
$P3$	20	$P2$	No
$P4$	15	E	Si

Se actualiza nuevamente y se escoge el nodo que será visitado, quedando:

Nodo	d_i	l_i	Fue visitado?
E	0	E	Si
$P1$	25	E	No
$P2$	15	E	Si
$P3$	20	$P2$	Si
$P4$	15	E	Si

Se actualiza nuevamente y se escoge el nodo que será visitado, quedando:

Nodo	d_i	l_i	Fue visitado?
E	0	E	Si
$P1$	25	E	Si
$P2$	15	E	Si
$P3$	20	$P2$	Si
$P4$	15	E	Si

Luego, el árbol de rutas más cortas se muestra en la figura 11:

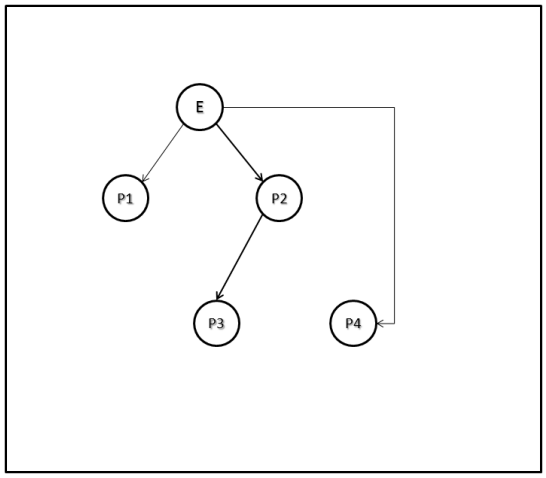


Figura 11: Árbol de rutas más cortas.

Con este árbol de rutas más cortas se puede obtener la solución del problema de flujo a costo mínimo de la parte a). En este caso, se transporta directamente desde E los 4 litros demandados por el predio $P1$, los 4 litros demandados por el predio $P2$ directamente desde E, los 7 litros demandados por el predio $P4$ no se entregan, y los 3 litros del predio $P3$ se envían pasando por el predio $P2$. Todo esto acarrea un costo de 325.

Pregunta 3 (40 %)

El jefe de operaciones de una aerolínea tiene que planificar los viajes desde el aeropuerto de Santiago a los J ($j = 1, \ldots, J$) destinos a los que se dirige para los próximos T ($t = 1, \ldots, T$) días. Para ello dispone de I aviones ($i = 1, \ldots, I$).

Según estudios de mercado, la demanda máxima esperada para cada día a cada destino será de d_j^t pasajeros, la que por política de la empresa debe ser satisfecha al menos en un 90 %. Adicionalmente, en cada uno de los J destinos hay r_j^t pasajeros que deben tomar el avión en su viaje de retorno a Santiago. Debe asegurarse que exista capacidad suficiente para estos pasajeros en los viajes con destino a Santiago.

Cada avión tiene capacidad para Q_i pasajeros y solo es posible de hacer un viaje (ida y vuelta) al día entre Santiago y cualquiera de los destinos. Cada viaje tiene un costo fijo, que depende del destino y del avión utilizado, F_{ij}.

(a) (3,0 puntos) Plantee un modelo de programación lineal, que permita definir qué aviones enviar a cada destino y cuántos pasajes vender por vuelo con origen en Santiago, considerando que cada pasajero transportado desde Santiago al destino j o de retorno desde el destino j a Santiago, reporta una utilidad U_j.

Considere ahora, que la administración del aeropuerto ha establecido un máximo para el uso de las mangas para el embarque de los vuelos de la compañía. Este máximo, para el día t, es de M_t horas. Con esta nueva condición, además de programar los vuelos, se debe decidir si el embarque se realiza por una manga o en bus (no hay limitación en el uso de buses).

Cada vuelo requiere para su embarque, un tiempo de H_i horas de manga (que solo depende del tipo de avión utilizado). Se sabe que los pasajeros prefieren embarcar por las mangas a usar los buses. Considerando esto, la compañía determinó que la pérdida de utilidad (en concepto de calidad de servicio) es de P por cada pasajero que es embarcado en bus, independientemente de su destino.

(b) (3,0 puntos) Modifique el modelo de la parte anterior para incluir la decisión de cómo embarcar a los pasajeros, considerando que todos los vuelos deben ser embarcados de alguna manera.

Pauta Pregunta 3

(a) Para plantear el modelo definimos las siguientes variables **(0,4 puntos por cada grupo de variables)**:

x_{ijt}: variable binaria que toma el valor 1 si el avión i realiza el viaje de Santiago a j y vuelta el día t; en caso contrario toma el valor 0.

y_{ijt}: cantidad de pasajeros transportados por el avión i con destino j desde Santiago (variable entera no negativa).

Con estas variables planteamos las siguientes restricciones y función objetivo.

Restricciones

(I) Capacidad de los aviones **(0,3 puntos)**

$$y_{ijt} \leq Q_i x_{ijt} \quad \text{para todo día } t = 1, \ldots, T \text{ y destino } j = 1, \ldots, J.$$

(II) A lo más un viaje diario por avión **(0,3 puntos)**

$$\sum_{j=1}^{J} x_{ijt} \leq 1 \quad \text{para todo día } t = 1, \ldots, T \text{ y avión } i = 1, \ldots, I.$$

(III) Cumplimiento de al menos el 90 % de la demanda que parte de Santiago **(0,3 puntos)**

$$\sum_{i=1}^{I} y_{ijt} \geq 0{,}9 d_j^t \quad \text{para todo día } t = 1, \ldots, T \text{ y destino } j = 1, \ldots, J.$$

(IV) Cumplimiento de la demanda de pasajeros retornando a Santiago **(0,3 puntos)**

$$\sum_{i=1}^{I} Q_i x_{ijt} \geq r_j^t \quad \text{para todo día } t = 1, \ldots, T \text{ y destino } j = 1, \ldots, J.$$

(V) Naturaleza de las variables **(0,2 puntos por cada grupo de variables)**.

$x_{ijk} \in \{0, 1\} \geq 0$, para cada avión $i = 1, \ldots, I$, destino $j = 1, \ldots, J$ y día $t = 1, \ldots, T$.
$y_{ijk} \in \mathbb{Z}_+$, para cada avión $i = 1, \ldots, I$, destino $j = 1, \ldots, J$ y día $t = 1, \ldots, T$.

Función objetivo La función objetivo consiste en maximizar la utilidad por pasajeros transportados menos los costos fijos por uso de aviones:

$$\text{máx} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{t=1}^{T} U_j y_{ijt} + \sum_{j=1}^{J} \sum_{t=1}^{T} U_j r_j^t - \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{t=1}^{T} F_{ij} x_{ijt}\,.$$

El segundo término que representa la utilidad de transportar los pasajeros de retorno a Santiago no es necesario ya que este valor es constante: estos pasajeros *deben* ser transportados de retorno **(0,6 puntos: 0,2 puntos por término bueno)**.

(b) Para incluir las nuevas condiciones debemos modificar el modelo de la primera parte de la siguiente manera.

Primero, definimos las variables adicionales:

z_{it}: variable binaria que toma el valor 1 si el vuelo realizado por el avión i el día t es cargado vía manga y, el valor 0, si no (i.e., o el avión i no realiza vuelo ese día o el vuelo correspondiente se embarca en bus) **(0,3 puntos)**.

w_{it}: variable binaria que toma el valor 1 si el vuelo realizado por el avión i el día t es embarcado vía buses y, el valor 0, si no **(0,3 puntos)**.

b_{it}: cantidad de pasajeros embarcados en bus en el avión i el día t (variable entera no negativa) **(0,4 puntos)**.

Luego, se incluyen las restricciones

(I) Tiempo máximo de uso de mangas **(0,3 puntos)**

$$\sum_{i=1}^{I} H_i z_{it} \leq M_t \quad \text{para todo día } t = 1, \ldots, T \text{ y avión } i = 1, \ldots, I.$$

(II) Vuelo que realiza el avión i debe ser embarcado por manga o en buses **(0,3 puntos)**

$$z_{it} + w_{it} = \sum_{j=1}^{j} x_{ijt} \quad \text{para todo día } t = 1, \ldots, T \text{ y avión } i = 1, \ldots, I.$$

(III) Número de pasajeros embarcados en bus (definición de las variables b_{it}) **(0,4 puntos)**

$$\sum_{j=1}^{J} y_{ijt} \leq b_{it} + Q_i(1 - w_{it}) \quad \text{para todo día } t = 1, \ldots, T \text{ y avión } i = 1, \ldots, I.$$

(IV) Naturaleza de las variables **(0,2 puntos por cada grupo de variables)**.

$z_{it} \in \{0, 1\}$, para cada avión $i = 1, \ldots, I$ y día $t = 1, \ldots, T$.
$w_{it} \in \{0, 1\}$, para cada avión $i = 1, \ldots, I$ y día $t = 1, \ldots, T$.
$b_{it} \in \mathbb{Z}_+$, para cada avión $i = 1, \ldots, I$ y día $t = 1, \ldots, T$.

Finalmente, a la función objetivo se le debe agregar un término que representa el costo de los pasajeros embarcados en buses: $-P \sum_{i=1}^{I} \sum_{t=1}^{T} b_{it}$ **(0,4 puntos)**.

INFORMACIÓN PARA LA PRUEBA: tabla de transformación Primal-Dual

Minimización	Maximización
Variables	Restricciones
≥ 0	$\leq$
≤ 0	$\geq$
Irrestrictas	$=$
Restricciones	Variables
$\leq$	≤ 0
$\geq$	≥ 0
$=$	Irrestrictas