PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 02-2017
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado - M. Klapp
A. Cataldo - J.T. Marquinez

Interrogación 1

Duración: 3 horas.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***

Pregunta 1 (15 puntos)

(a) **(4 puntos)** Considere el siguiente problema de optimización convexo $\min_{\{x \in S\}} f(x)$ donde $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es un dominio y $f := S \to \mathbb{R}$ es una función objetivo. Demuestre formalmente que si existe solución factible, entonces el subconjunto de todas las soluciones óptimas $S^* \subseteq S$ debe ser convexo.

Solución: Considere dos soluciones óptimas cualquiera $x_1 \in S$ y $x_2 \in S$ tal que ambas alcanzan el valor óptimo $v^* = f(x_1) = f(x_2)$. Sea $x_3 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ una combinación convexa cualquiera con $\lambda \in [0,1]$ entre ambas. Hay que demostrar que x_3 es factible y óptimo.

El dominio S es convexo, por lo que $x_3 \in S$. La función objetivo es convexa por lo que se tiene:

$$f(x_3) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) = \lambda v^* + (1-\lambda) v^* = v^*.$$

Esto implica que $f(x_3)$ es mejor o igual que el valor óptimo, por lo que x_3 debe ser óptimo.

(b) **(4 puntos)** Considere el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \ln(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}) \leq 1\}$. ¿Es S convexo? Justifique su respuesta con una demostración o un contraejemplo.

Solución: El conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \ln(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}) \leq 1\}$ puede ser reformulado como $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} e^{x_i} \leq 0\}$. La función $\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}$ es claramente convexa, por lo que su epígrafe debe serlo también.

(c) **(3 puntos)** Considere un problema de optimización lineal que posee algunas variables binarias $y_i \in \{0,1\}$ para cada $i \in I$, donde $I = \{1,2,3,\ldots\}$ es un subconjunto de alternativas de inversión. Así, un valor de y_i igual a 1 representa invertir en la alternativa i; un valor igual a 0 significa lo contrario. Modele la siguiente condición:

"Se debe invertir en 1 *y* 2 *o, alternativamente, en* 3*. Sin embargo, si se invierte en* 3 *no se puede invertir en* 4*."*

Se le permite definir nuevas variables y restricciones.

Solución: Sea $z = y_1 \wedge y_2$. Luego $z + y_3 \geq 1$(o se tiene $z + y_3 = 1$ si se considera o no inclusivo), $z \geq y_1 + y_2 - 1, z \leq y_1, z \leq y_2, y_3 + y_4 \leq 1$.

(d) **(4 puntos)** Considere un conjunto de m restricciones lineales $a_j^T x \leq b_j$, $j = \{1, \ldots, m\}$, donde $a_j \in \mathbb{R}^n$ y $b_j \in \mathbb{R}$ son parámetros y $x \in \mathbb{R}^n$ son las variables de decisión. Modele la siguiente condición:

"Se deben cumplir al menos k restricciones del conjunto".

Se le permite definir nuevas variables y restricciones.

Solución: Definir binaria y_i que vale 1 si se cumple la restricción i y 0 si se viola. El modelo solicitado es:

$$a_j^T x \leq b_j + M(1 - y_j), \ \forall j \in \{1, \ldots, m\} \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j \geq k \tag{2}$$

Pregunta 2 (18 puntos)

(a) **(10 puntos)** El equipo de operaciones de una compañía desarrolló el siguiente modelo de optimización que planifica la producción y el almacenaje de n tipos de productos mediante la compra, uso y almacenaje de m tipos de materias primas. En el modelo, $a_{ij} > 0$ corresponde a la cantidad de materia prima $i \in \{1, \ldots, m\}$ requerida por unidad de producto $j \in \{1, \ldots, n\}$, $d_{jt} > 0$ a la cantidad demandada del producto j el día $t \in \{1, \ldots, T\}$, $f_t > 0$ corresponde al costo fijo de producción del día t, $r_j > 0$ es el costo unitario de producción, $K > 0$ la capacidad de producción total diaria (en unidades producidas), y $c_i > 0$ es el costo de adquirir una unidad de materia prima i. Las variables de decision en el modelo, que puede asumir factible, son $x_{jt}, y_{it}, w_{it}, s_{jt}$ y z_t.

$$
\begin{array}{lll}
(P) \quad \text{mín} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} c_i y_{it} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} r_j x_{jt} + \sum_{t=1}^{T} f_t z_t & \\
\text{s.a.} & s_{jt} = s_{j,t-1} + x_{jt} - d_{jt} \qquad \forall j = 1, \ldots, n \quad \forall t = 2, \ldots, T & (R1) \\
& s_{j1} = x_{j1} - d_{j1} \qquad \forall j = 1, \ldots, n & (R2) \\
& w_{it} = w_{i,t-1} + y_{it} - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{jt} \qquad \forall i = 1, \ldots, m \quad \forall t = 2, \ldots, T & (R3) \\
& w_{i1} = y_{i1} - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{j1} \qquad \forall i = 1, \ldots, m & (R4) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{jt} \leq K z_t \qquad \forall t = 1, \ldots, T & (R5) \\
& \displaystyle\sum_{\theta=t}^{t+3} z_\theta \leq 3 \qquad \forall t = 1, \ldots, T-3 & (R6) \\
& x, y, w, s \geq 0 & \\
& 0 \leq z \leq 1 &
\end{array}
$$

(i) **(4 puntos)** Demuestre que el problema (P) admite una solución óptima.

Solución: Primero notemos que el dominio del problema es un conjunto cerrado, pues corresponde al de un problema lineal entero-mixto de restricciones $=$ y $\leq$. Además, la función objetivo es continua, pues es lineal. A pesar que z, x y s son acotadas, no hay restricciones que acoten superiormente a y y w, por lo que el dominio es no acotado. Por otro lado, tenemos $\|y\| \to \infty$ si y solo si $\|w\| \to \infty$. Por lo tanto, si $\|(x, y, z, s, w)\| \to \infty$, con (x, y, z, s, w) factible, debemos tener $\|y\| \to \infty$. Como $c > 0$, tenemos que la función objetivo crece arbitrariamente.

Luego, aplica el teorema de la Hipótesis H (o teorema de B-W extendido como se ve en algunas secciones) y luego el problema tiene solución óptima.

Considere para (ii) y para (iii) que, ahora, las variables z son variables binarias, es decir, $z \in \{0,1\}^T$.

(ii) **(3 puntos)** ¿Es el problema (P) convexo? Justifique.

Solución: A pesar de que la función objetivo es convexa, al ser lineal, el dominio no lo es. Esto se debe a la variable z_t. Al ser binaria, podemos tomar, para algún $\hat{t}$ particular, $z^1_{\hat{t}} = 0$ y $z^2_{\hat{t}} = 1$, ambas soluciones factibles del dominio, y su combinación lineal convexa $\lambda z^1_{\hat{t}} + (1-\lambda) z^2_{\hat{t}}$ (con $\lambda \in [0,1]$) considerará valores fraccionarios que no son factibles para (P). Luego, el dominio no es convexo, lo que hace que el problema tampoco lo sea.

(iii) **(Bonus) (3 puntos)** Explique por qué, si la variable es binaria, se sigue cumpliendo que existe solución.

Solución: En realidad, lo único que cambia es que ahora las variables son binarias y el dominio deja de ser continuo. El dominio ahora es la unión de un número finito de conjuntos cerrados, por lo que sigue siendo cerrado. Así, el Teorema de la Hipótesis H sigue aplicando.

(b) **(8 puntos)** A continuación se presentan 3 modelos de optimización. ¿Cuáles de ellos pueden ser reformulados en un problema lineal equivalente? En cada respuesta justifique cada paso de su desarrollo.

(i) **(2 puntos)** $\min_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} \max\{|2x_1+3x_2|, |x_1-x_2|\}$ s.a. $|x_1| + 2\max[x_1,x_2] \leq 1$

Solución: Este puede ser reformulado como un LP. Primero agregamos una variable adicional.

$\min_{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3} x_3$ s.a. $x_3 \geq |2x_1+3x_2|, x_3 \geq |x_1-x_2|, |x_1| + 2\max[x_1,x_2] \leq 1$

que equivale a

$\min_{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3} x_3$ s.a. $x_3 \geq 2x_1+3x_2, x_3 \geq -2x_1-3x_2, x_3 \geq x_1-x_2, x_3 \geq -x_1+x_2, x_1+2x_1 \leq 1, x_1+2x_2 \leq 1, -x_1+2x_1 \leq 1, -x_1+2x_2 \leq 1$

(ii) **(3 puntos)** $\min_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} \max\{|2x_1+3x_2|, |x_1-x_2|\}$ s.a. $|x_1| - |x_2| \geq 1$

Solución: Este no puede ser reformulado como un LP, pues el dominio no es convexo. $(1,0)$ y $(-1,0)$ son factibles, pero no $(0,0)$.

(iii) **(3 puntos)** $\max_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} 2\min\{|x_1+x_2|, 2x_2\} - |x_1-x_2|$ s.a. $(x_1^2+x_1^2) \leq 2, |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1$

Solución: Este puede ser reformulado como un LP. Primero agregamos dos variables adicionales.

$\max_{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^2} x_3 + x_4$ s.a. $x_3 \leq 2|x_1+x_2|, x_3 \leq 4x_2, x_4 \leq -|x_1-x_2|, (x_1^2+x_1^2) \leq 2, |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1$

La restricción cuadrática es redundante, por lo que es equivalente a:

$\max_{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^2} x_3+x_4$ s.a. $x_3 \leq 2|x_1+x_2|, x_3 \leq 4x_2, x_4 \leq -|x_1-x_2|, |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1$

Lo anterior es equivalente a:

$\max_{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^2} x_3 + x_4$ s.a. $x_3 \leq -2(x_1+x_2), x_3 \leq 2(x_1+x_2), x_3 \leq 4x_2, x_4 \leq x_1 - x_2, x_4 \leq -x_1+x_2, -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1$

Pregunta 3 (15 puntos)

(a) **(7 puntos)** Julito se encuentra en proceso de estabilizar su empresa de venta de repuestos de autos. Para ello ha estimado en $d_{it} > 0$ la demanda esperada por el repuesto $i \in I$ sobre un

conjunto I de posibles productos en el día $t \in \{1, \ldots, T\}$. Para satisfacer esta demanda Julito puede comprar los repuestos desde 3 mercados diferentes: Chile, Brasil o China. El costo de cada repuesto i comprado en el mercado j se encuentra definido por $c_{ij} > 0$. Sin embargo, la recepción del repuesto i al solicitarlo desde el mercado j tarda $e_{ij} > 0$ días. Adicionalmente los proveedores le han indicado que para realizar la compra de alguno de los repuestos al menos debe solicitar $r_{ij} > 0$ unidades del repuesto i en el mercado j. Por último, cada repuesto tiene un volumen de $v_i > 0$ metros cuadrados, Julito solo dispone de un galpón para almacenar los repuestos de un espacio máximo de $V > 0$ metros cuadrados, y actualmente el inventario del repuesto i es de q_i unidades.

Plantee un modelo de programación lineal con el cual Julito pueda satisfacer la demanda de cada semana minimizando los costos totales.

Solución:

Índices:

- $\diamond$ $i \in I$: repuesto
- $\diamond$ $j \in \{1, 2, 3\}$: mercado
- $\diamond$ $t \in \{1, \ldots, T\}$: día

Parámetros:

d_{it}: demanda del repuesto i en el día t.

c_{ij}: costo unitario del repuesto i en el mercado j.

e_{ij}: tiempo de espera del repuesto j comprado en el mercado j.

r_{ij}: compra mínima del repuesto i en el mercado j.

V: Volumen máximo del galpón.

v_i: Volumen en bodega del repuesto i.

Variables:

x_{ijt}: Cantidad a comprar del repuesto i en el mercado j en el día t.

y_{ijt}: Variable binaria con valor 1 si se compran unidades del repuesto i en el mercado j en el día t.

z_{it}: Inventario del repuesto i al término del día t.

Función objetivo:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{3} \sum_{t=1}^{T} x_{ijt}$$

Restricciones:

R1) Garantizar compra mínima de repuestos en el mercado.

$$x_{ijt} \leq M \cdot y_{ijt} \quad \forall i \in I, j \in \{1, 2, 3\}, t \in \{1, \ldots, T\}$$

$$y_{ijt} \cdot r_{ij} \leq x_{ijt} \quad \forall i \in I, j \in \{1, 2, 3\}, t \in \{1, \ldots, T\}$$

R2) Flujo de inventario y garantizar demanda

$$z_{i,(t-1)} + \sum_{j=1,2,3} \mathbb{I}(t \geq d_{ij}) x_{i,j,(t-d_{ij})} = z_{i,t} + d_{it} \quad \forall i \in I, t \in \{2, \ldots, T\}$$

$$\alpha = z_{i,1} + d_{i1} \quad \forall i \in I$$

R3) Volumen máximo galpón.

$$\sum_i z_{it} \cdot v_i \leq V \quad \forall t \in \{1, \ldots, T\}$$

R6) Naturaleza variables

$$y \in \{0,1\}^{|I| \times 3 \times T}$$
$$x, z \geq 0$$

(b) **(8 puntos)**

La sociedad de agricultores le ha solicitado planificar la temporada de cultivo para el año 2018. Los expertos le han indicado que existe un constante riesgo ante las amenazas de las plagas de insectos. Las larvas poseen un elevado índice de crecimiento, duplicando la cantidad de larvas existentes respecto del día anterior. Para combatir estas plagas, cada día se puede tomar la decisión de utilizar una mezcla de pesticidas que reducen hasta en un $\delta\,\%$ la cantidad de larvas presentes en los cultivos respecto del día anterior.

Por otro lado, el volumen de los cultivos crecen a una tasa de un $\mu_0\,\%$ respecto del día anterior, pero en los días en los que se ha utilizado pesticidas esta tasa se reduce a tan solo un $\mu_1 < \mu_0\,\%$. Adicionalmente, por cada día en los que se decide utilizar pesticidas, existe un incremento en los índices de los químicos presentes en los cultivos de γ ppm (partes por millón). La sociedad de agricultores le ha indicado que para poder comercializar sus cultivos, estos no pueden presentar jamás más de γ_{max} ppm de químicos, y que al mismo tiempo la proporción del total de larvas respecto del volumen total de las cosechas debe ser siempre inferior al $\rho\,\%$. Plantee un modelo de programación lineal entera que maximize el volumen total de las cosechas al término de la temporada, garantizando que se cumplan las exigencias de la sociedad de agricultores.

Asuma que al inicio de la temporada el volumen total de sus cultivos es de α hectáreas, la presencia de químicos es nula y que la cantidad de larvas iniciales es de β unidades. La temporada consta de T días.

Solución:

Índices:

- $\diamond$ $t \in \{1, \ldots, T\}$, día

Parámetros:

- μ_0: tasa de crecimiento de los cultivos sin pesticidas.
- μ_1: tasa de crecimiento de los cultivos con pesticidas.
- δ: tasa de reducción de las larvas con pesticidas.
- 2: tasa de crecimiento de las larvas.
- γ: Incremento en ppm de químicos tras un día de uso de los pesticidas.
- γ_{max}: cantidad máxima de ppm de químicos en cultivos.

Variables:

- x_t: Variable binaria con valor 1 si se decide utilizar pesticidas en el día t, 0 en otro caso.
- v_t: Volumen de las cosechas al término del día t.
- y_t: Cantidad de larvas al término del día t.
- y_t^-: Reducción de larvas en el día t.

y_t^+: Aumento de larvas en el día t.

v_t^-: Reducción de volumen de cosechas en el día t producto del uso de pesticidas.

Función objetivo:

$$\max v_T$$

Restricciones:

R1) Inventario del volumen de las cosechas y pérdida de crecimiento producto de pesticidas.

$$v_t = \mu_0 \cdot v_{t-1} - v_t^- \cdot \quad \forall t = 1...T$$

$$(\mu_0 - \mu_1) \cdot v_{t-1} - M(1 - x_t) \leq v_t^- \quad \forall t = 1...T$$

R2) Reducción de larvas por pesticidas.

$$y_t^- \leq \delta \cdot y_{t-1} \quad \forall t = 1, \ldots, T$$

$$y_t^- \leq M \cdot X_t \quad \forall t = 1, \ldots, T$$

R3) Incremento de larvas por ausencia de pesticidas.

$$2 \cdot y_{t-1} - M \cdot (1 - x_t) \leq y_t^+ \quad \forall t = 1...T$$

R4) Inventario de larvas

$$y_t = y_{t-1} + y_t^+ - y_t^- \quad \forall t = 1...T$$

R5) Ratio máximo de larvas versus volumen de cosechas

$$y_t \leq \rho \cdot v_t \quad \forall t = 1...T$$

R6) Cantidades de químicos máxima

$$\sum_t \gamma x_t \leq \gamma_{max}$$

R7) Inicialización variables

$$v_0 = \alpha$$

$$y_0 = \beta$$

R8) Naturaleza variables

$$\begin{aligned} x_t &\in \{0, 1\} && \forall t = 1, \ldots, T \\ v_t, y_t &\geq 0 && \forall t = 1, \ldots, T \\ y_t^+, y_t^-, v_t^- &\geq 0 && \forall t = 0, \ldots, T \end{aligned}$$

Pregunta 4 (15 puntos)

Este fin de semana se realizará en el estadio municipal la final del primer torneo de competencias deportivas escolares metropolitanas. Las distintas competencias se llevarán a cabo desde las 8am a las 18pm, en los días sábado y domingo.

En estas competencias participa un gran número de colegios que compiten en un conjunto D de competencias deportivas específicas. Cada una de estas competencias deportivas tiene una duración conocida y fija, debe ser continuada (esto quiere decir que una vez que comienza, se debe seguir hasta terminar la competencia) y tiene reglas establecidas que la relacionan con otras competencias deportivas. Específicamente, se conoce el parámetro t_d que indica la duración en minutos de la competencia deportiva d, el parámetro $R_{d,h}$ que toma valor 1 cuando las competencias deportivas d y h no pueden ser realizadas el mismo día (vale 0 en caso contrario), y el parámetro $Q_{d,h}$ que toma valor 1 cuando las competencias deportivas d y h deben ser realizadas el mismo día, pero con al menos δ minutos de separación entre el instante de finalización de la competencia deportiva h y el instante en que comienza la competencia deportiva d (vale 0 en caso contrario).

El estadio municipal está habilitado con un conjunto de E zonas, en las que se pueden realizar algunas de las competencias deportivas. Suponga que usted conoce que zonas están habilitadas para cada competencia deportiva, y esta información está identificada en el parámetro A_{ed} que tiene valor 1 si en la zona e se puede realizar la competencia deportiva d.

La administración del torneo, en conjunto con el estadio municipal, desean programar las competencias de manera de respetar los días y horarios establecidos, las reglas de ciertas competencias deportivas, y buscando terminar el torneo lo antes posible el día domingo (para disponer de tiempo para las premiaciones).

Solución: Variables:

$x^t_{d,e}$: Variable binaria con valor 1 si se decide que la competencia deportiva d se realice en zona e del estadio municipal durante el día t, 0 en otro caso.

$w^{p,t}_{d,e}$: Variable binaria con valor 1 si la competencia deportiva d es la p-ésima competencia que se realice en zona e del estadio municipal durante el día t, 0 en otro caso.

$y^t_{d,e}$: Variable continua que indica el instante en que comienza la competencia deportiva d en ña zona e durante el día t.

α: tiempo en que finaliza la última competencia durante el segundo día del torneo.

Función objetivo:

$$\min \alpha$$

Restricciones:

R1) Toda competencia deportiva debe ser realizada una única vez y única zona en el torneo.

$$\sum_{t=1}^{2} \sum_{e \in E: A_{e,d}=1} x^t_{d,e} = 1 \quad \forall d \in D.$$

$$\sum_{t=1}^{2} \sum_{e \in E: A_{e,d}=0} x^t_{d,e} = 0 \quad \forall d \in D.$$

R2) Asegurar que no se realicen el mismo día competencias que no se pueden realizar el mismo día.

$$\sum_{e \in E} x_{d,e}^t + \sum_{e \in E} x_{h,e}^t \leq 2 - R_{d,h} \quad \forall d, h \in D; t = 1, 2.$$

R3) Asegurar que las competencias que se deben realizar el mismo día, se realicen de esa manera.

$$\sum_{e \in E} x_{d,e}^t + \sum_{e \in E} x_{h,e}^t \geq 2Q_{d,h} \quad \forall d, h \in D; t = 1, 2.$$

R4) Asegurar que una competencia deportiva que ha sido programada para un día y zona en particular, está en alguna de las posiciones de la lista de esa zona/día.

$$\sum_{p \in D} w_{d,e}^{p,t} = x_{d,e}^t \quad \forall d \in D; e \in E; t = 1, 2.$$

R5) Asegurar que si a una zona/día se le asignaron n competencias deportivas, entonces se llenan las primeras n posiciones de la lista.

$$\sum_{d \in D} w_{d,e}^{p,t} \leq \sum_{d \in D} w_{d,e}^{f,t} \quad \forall e \in E; p, f \in D : ord(p) = 1 + ord(f); t = 1, 2.$$

R6) Construir el instante mínimo en que debe comenzar una competencia deportiva asignada a una zona/día.

$$y_{d,e}^t \geq \left(y_{h,e}^t + t_h\right) - M\left(2 - w_{d,e}^{p,t} - w_{h,e}^{f,t}\right) \quad \forall e \in E; p, f \in D : ord(f) = 1 + ord(p); t = 1, 2; \text{ y } M >>> 0.$$

R7) Asegurar que cada día las competencias programadas terminan antes de las 18hrs (para efecto de esta modelación, se considera que el día comienza a las 0, por lo tanto, hay 10 horas de competencias cada día).

$$y_{d,e}^t + t_d \leq 10 \quad \forall d \in D; e \in E; t = 1, 2.$$

R8) Asegurar que las competencias que deben comenzar con al menos δ minutos de separación cumplan con esto (para efecto de esta modelación, se considera que el día comienza a las 0, por lo tanto, hay 10 horas de competencias cada día).

$$y_{h,e}^t + t_h - M\left(1 - x_{h,e}^t\right) \leq y_{d,e}^t + \delta + M\left(1 - x_{d,e}^t\right) \quad \forall d, h \in D : Q_{d,h} = 1; e \in E; t = 1, 2; \text{ y } M >>> 0.$$

R9) Construir la variable α.

$$\alpha \geq y_{d,e}^2 + t_d \quad \forall d \in D; e \in E; .$$

R10) Naturaleza variables

$$\begin{aligned}
x_{d,e}^t &\in \{0, 1\} \quad \forall d \in D; e \in E; t = 1, 2. \\
y_{d,e}^t &\geq 0 \quad \forall d \in D; e \in E; t = 1, 2. \\
w_{d,e}^{p,t} &\in \{0, 1\} \quad \forall d, p \in D; e \in E; t = 1, 2. \\
\alpha &\geq 0
\end{aligned}$$