PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2025 - 1
Profesores: G. Angulo - C. Balbontin - M. Castro
R. Cuadrado - G. Pérez

Examen
Duración: 180 minutos.

Instrucciones

- **Identificarse:** Escribir nombre completo, sección, número de lista en la primera hoja. Además, escribir número de lista en cada hoja. La falta de esta información será penalizada con 2 décimas en la prueba.
- Durante la prueba debe **poseer una identificación oficial** (con foto), por ejemplo: CI, TUC, pase escolar, etc. También debe firmar la lista de asistencia a la prueba.
- Al finalizar la prueba: cada estudiante debe **escanear su prueba y cargarla como ptF a CANVAS** en el buzón "Examen" y **entregar la prueba física** al ayudante. El buzón estará abierto desde el inicio de la evaluación hasta 15 minutos después de su hora de término. Procure que el escaneo sea legible, ya que se corregirá sobre el documento escaneado. Sin embargo, si el equipo docente no recibe el respaldo físico de la prueba, entonces podría asignarle nota mínima. **Se penalizará hasta con 2 décimas por escaneos poco legibles o incompletos**.
- La prueba es estrictamente individual. Otra forma de abordarla es una falta a la ética y será evaluada con nota mínima en la prueba.
- Escribir respuestas en la prueba después del tiempo de término o escribir solicitudes de puntaje o similares a los correctores se penaliza con nota mínima en la pregunta en cuestión o, incluso, en toda la prueba.
- Está prohibido el uso de dispositivos electrónicos (celular, calculadoras, computador, smart watch, etc.) durante la prueba. Solo se permite ocupar un dispositivo electrónico para escanear y subir su prueba a CANVAS. El uso de un dispositivo en otra circunstancia se considera una falta a la ética y se penaliza con nota mínima en la prueba.
- Si termina antes de tiempo, entonces favor avisar a un miembro del equipo docente para escanear y subir su prueba.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2025 - 1
Profesores: G. Angulo - C. Balbontin - M. Castro R. Cuadrado - G. Pérez

Examen
Duración: 180 minutos.

Pregunta 1 (15 puntos + 2 bonus)

Considere una pastelería que quiere optimizar la producción de pasteles para maximizar sus beneficios (ingresos menos costos) en un horizonte de H días (conjunto de días dado por $\mathcal{T} = \{1, ..., H\}$). La pastelería cuenta con recetas para producir pasteles de diferente tipo dados por el conjunto $\mathcal{P}$ y quiere determinar cuántos pasteles producir de cada tipo en cada día. Cada pastel de tipo $p \in \mathcal{P}$ requiere $a_{pi} \geq 0$ unidades del ingrediente $i \in \mathcal{I}$ para poder ser producido. A su vez, en cada día $t \in \mathcal{T}$ hay K_{ti} unidades disponibles del ingrediente $i \in \mathcal{I}$. Se asume que los ingredientes no se pueden guardar u ocupar en otros días ya que los ingredientes que sobran son donados a un comedor solidario al final del día (situación que no se modela en este problema). Finalmente, para cada pastel de tipo $p \in \mathcal{P}$ y día $t \in \mathcal{T}$ existe un costo $\$c_{pt}$ y un ingreso $\$b_{pt}$ por producir/vender una unidad de dicho pastel. Asuma que todos los pasteles producidos en un día son vendidos en ese mismo día.

(a) **(2 puntos)** El propietario de la pastelería le pide a una herramienta de IA que construya un modelo MILP para resolver su problema de producción. La IA ocupa una variable entera x_{pt} para indicar la cantidad de pasteles del tipo $p \in \mathcal{P}$ producidos en el día $d \in \mathcal{T}$. El modelo está dado por:

$$\text{máx} \sum_{t=1}^{H} \sum_{p \in \mathcal{P}} (b_{pt} - c_{pt}) \tag{1}$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{t=1}^{H} \sum_{p \in \mathcal{P}} x_{pt} a_{pi} \leq \sum_{t=1}^{H} K_{ti} \qquad \forall i \in \mathcal{I} \tag{2}$$

$$x_{pt} \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall p \in \mathcal{P},\ t \in \mathcal{T}$$

Según la IA, la función objetivo (1) maximiza los beneficios de la pastelería y la restricción (2) modela la producción considerando el límite de ingredientes por día. El dueño no sabe mucho de MILP y no está seguro si el modelo entregado está correcto, pero sabe con total certeza que las variables de decisión son correcta y no necesita variables adicionales.

Indique claramente si (1) y (2) están bien modeladas. Justifique brevemente su respuesta y escriba su versión correcta si alguna está incorrecta.

Solución: Ambas estás incorrectas. A la función objetivo le faltan las variables. La restricción suma sobre todos los días y debería ser para cada día. Modelo correcto:

$$\text{máx} \sum_{t=1}^{H} \sum_{p \in \mathcal{P}} x_{pt}(b_{pt} - c_{pt})$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{p \in \mathcal{P}} x_{pt} a_{pi} \leq K_{ti} \qquad \forall i \in \mathcal{I},\ t \in \mathcal{T}$$

$$x_{pt} \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall p \in \mathcal{P},\ t \in \mathcal{T}$$

Pauta de corrección: 1 punto por cada restricción/f.o. corregida. Solo se da puntaje si se dice que está incorrecta y se da la versión correcto. No hay puntos intermedios.

(b) **(8 puntos)** Considere que los pasteles se dividen en tres grupos: veganos V, con crema C y con manjar M. Cada pastel pertenece a un único grupo y estos grupos cubren todos los posibles pasteles (es decir, conjuntos disjuntos tal que $\mathcal{P} = V \cup C \cup M$). Agregue nuevas restricciones al modelo de optimización considerando las siguientes condiciones. Asuma que tiene un modelo correcto en la parte (a), puede ocupar las variables ya dadas y puede crear nuevas variables si estima necesario. Defina claramente cualquier nueva variable ocupada.

(i) **(2 puntos)** Para cada día $t \in \mathcal{T}$, existe una demanda d_t^V para pasteles veganos, d_t^C para pasteles con crema y d_t^M para pasteles con manjar. La pastelería no puede producir más pasteles que los demandados.

Solución: No se necesitan variables adicionales. Las restricciones son:

$$\sum_{p \in V} x_{pt} \leq d_t^V \qquad \forall t \in \mathcal{T}$$
$$\sum_{p \in C} x_{pt} \leq d_t^C \qquad \forall t \in \mathcal{T}$$
$$\sum_{p \in M} x_{pt} \leq d_t^M \qquad \forall t \in \mathcal{T}$$

Pauta de corrección: 2 puntos buena, 1 punto errores menores o falta algún caso.

(ii) **(3 puntos)** Por temas de capacidad, la pastelería ha decidido que a lo más se pueden producir 3 tipos de pasteles de crema distintos en cada día. Asuma $|C| > 3$.

Solución: Nueva variable $z_{pt} \in \{0, 1\}$ indica si se producen pasteles de tipo $p \in C$ en el día $t \in \mathcal{T}$. Considera W como una big-M.

$$x_{pt} \leq W z_{pt} \qquad \forall t \in \mathcal{T}, p \in C$$
$$\sum_{p \in C} z_{pt} \leq 3 \qquad \forall t \in \mathcal{T}$$

Pauta de corrección: 3 puntos buena, 2-1 punto errores menores o falta algo. 0 puntos totalmente mala o muchos errores.

(iii) **(3 puntos)** Por temas de trazas de comida, si un día cualquiera se produce algún pastel vegano, entonces no se puede producir ningún pastel de otro tipo (crema o manjar).

Solución: Es suficiente crear una única variable $y_t \in \{0, 1\}$ que indica si se producen pasteles veganos o no en el día $t \in \mathcal{T}$. Considera W como una cosntante big-M.

$$\sum_{p \in V} x_{pt} \leq W y_t \qquad \forall t \in \mathcal{T}$$
$$\sum_{p \in C \cup M} x_{pt} \leq W(1 - y_t) \qquad \forall t \in \mathcal{T}$$

Forma alternativa:

$$x_{pt} \leq W y_t \qquad \forall t \in \mathcal{T},\ p \in V$$
$$x_{pt} \leq W(1 - y_t) \qquad \forall t \in \mathcal{T}, p \in C \cup M$$

La primera restricción activa la variable y_t. La segunda restricción fuerza a que no se produzca ningún paste de crema o manjar si y_t está activa.

Pauta de corrección: 3 puntos buena. 2 punto errores menores. 1 punto si falta alguna restricción o algún otro error mayor. 0 puntos totalmente mala o muchos errores.

(c) **(7 puntos)** Ahora considere que la pastelería compra un refrigerador industrial que le permite guardar pasteles tal que duren todo el horizonte de tiempo (es decir, pueden ser producidos un día y vendidos en otro). Asuma que el refrigerador está vacío al inicio del día 1 (antes de producir pasteles en dicho día) y que tiene una capacidad máxima de R pasteles por día (capacidad medida al final del día). Además, existe un costo fijo $\$g_t$ por tener encendido el refrigerador (al menos un pastel guardado en él) y un costo $\$f_t$ por cada pastel guardado al final del día $t \in \mathcal{T}$. Finalmente, asuma una demanda infinita, es decir, se puede vender todo lo que uno quiera de un tipo de pastel en un día cualquiera.

Cree un modelo MILP que incluya este nuevo funcionamiento en conjunto con lo descrito al inicio de la pregunta (horizonte de días, conjunto de pasteles, costo de producción, etc.). Considere que esta pregunta es **independiente de la parte (b)**, es decir, no debe volver a modelar dichas restricciones. También, **no debe volver a modelar la restricción de ingredientes** (ya evaluada en (a)), pero sí debe modificar la función objetivo acorde al nuevo funcionamiento. Puede ocupar las variables entregadas en (a). Defina claramente cualquier nueva variable ocupada y explique brevemente en palabras lo que representa cada restricción.

Solución: Nuevas variables:

- $v_{pt} \in \mathbb{Z}_+$: pasteles del tipo $p \in \mathcal{P}$ vendidos en el día $t \in \mathcal{T}$
- $h_{pt} \in \mathbb{Z}$: pasteles del tipo $p \in \mathcal{P}$ guardados al final del día $t \in \mathcal{T}$
- $u_t \in \{0, 1\}$: indica si se ocupa el refrigerador en el día $t \in \mathcal{T}$ o no.

Modelo:

$$\text{máx} \quad \sum_{t=1}^{H} \sum_{p \in \mathcal{P}} b_{pt} v_{pt} - \sum_{t=1}^{H} \sum_{p \in \mathcal{P}} x_{pt} c_{pt} - \sum_{t=1}^{H} f_t \sum_{p \in \mathcal{P}} h_{pt} - \sum_{t=1}^{H} g_t u_t \tag{3}$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{p \in \mathcal{P}} x_{pt} a_{pi} \leq K_{ti} \qquad \forall i \in \mathcal{I},\ t \in \mathcal{T} \tag{4}$$

$$h_{tp} = h_{t-1,p} + x_{pt} - v_{pt} \qquad \forall p \in \mathcal{P},\ t \in \mathcal{T} \tag{5}$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} h_{tp} \leq R u_t \qquad \forall t \in \mathcal{T} \tag{6}$$

$$x_{pt}, v_{pt}, h_{pt} \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall p \in \mathcal{P},\ t \in \mathcal{T}$$

$$u_t \in \{0, 1\} \qquad \forall t \in \mathcal{T}$$

aquí consideramos el parámetro adicional $h_{0,p} = 0$ (inventario inicial).

La función objetivo (3) incluye el ingreso por venta y los costos de producción, inventario y costo fijo. La restricción (4) es la de ingredientes (se incluye solo por completitud, pero no es evaluada) y la restricción (5) representa el inventario del refrigerado. Finalmente, la restricción (6) modela la capacidad del refrigerador en cada periodo y la activación de la variable de uso de refrigerador.

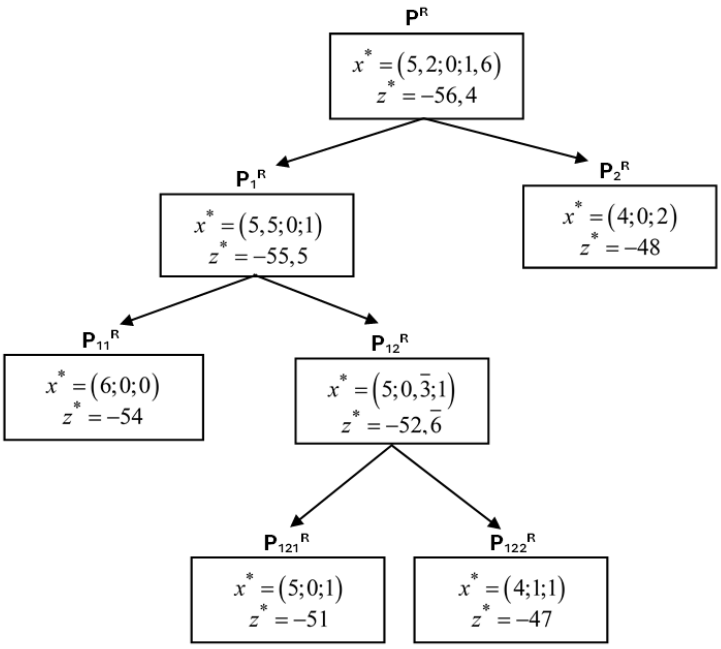
Pauta de corrección:

- 2 puntos por definir correctamente las variables nuevas y su naturaleza
- 1 punto por la nueva función objetivo

- ◇ 2 puntos por la restricción de inventario
- ◇ 2 puntos por la restricción de capacidad y activación. Estas restricciones pueden ser modeladas por separado, en dicho caso dar un punto por cada una.

Pregunta 2 (15 puntos)

(a) **(10 puntos)** Usted se encuentra con el siguiente árbol de Branch & Bound:



Nota: Este árbol no necesariamente sigue una regla de ramificación predefinida.

(i) **(2 puntos)** Indique si es un problema de maximización o minimización. Justifique.
Solución: Es de minimización pues los valores óptimos de los nodos son no decrecientes.
[1 pto por decir que es de minimización; 1 pto por explicación.]

(ii) **(3 puntos)** Identifique las restricciones que se incorporan en cada uno de los subproblemas. **Solución:** En la primera rama se incorpora $x_3 \leq 1$ y $x_3 \geq 2$, esto se ve porque el valor de x_1 en P_1^R sigue siendo fraccionario y entre 5 y 6, por lo que no se le pudo haber incorporado la restricción a ella. $x_3 \leq 1$. Desde P_1 se agrega $x_1 \leq 5$ y $x_1 \geq 6$. Desde P_{12} se agrega $x_2 \leq 0$ y $x_2 \geq 1$.
[1 pto por las restricciones correctas de cada rama.]

(iii) **(2 puntos)** Dado que este problema fue correctamente resuelto, indique si el el problema P_{11}^R o el P_{12}^R fue resuelto primero. Justifique.
Solución: El problema P_{12} fue resuelto primero, porque si no, se hubiera podado por tener peor solución óptima que el incumbente que hubiera sido actualizado al resolver P_{11}.
[1 pto por decir que el P_{12} fue resuelto primero; 1 pto por justificación.]

(iv) **(1 puntos)** Identifique cuál es la solución y valor óptimo de este problema.
Solución: La solución óptima es $x = (6, 0, 0)$ y el valor óptimo es -54.
[1 pto por ambas correctas, 0 ptos si alguna está mal o no está.]

(v) **(2 puntos)** ¿Cuál es el valor de la mejor cota inferior y superior después de haber resuelto todos los problemas excepto el P_{121}^R y P_{122}^R?
Solución: Ambos son iguales a -54.
[1 pto por cada cota.]

(b) **(5 puntos)** Tiene el siguiente problema de programación lineal:

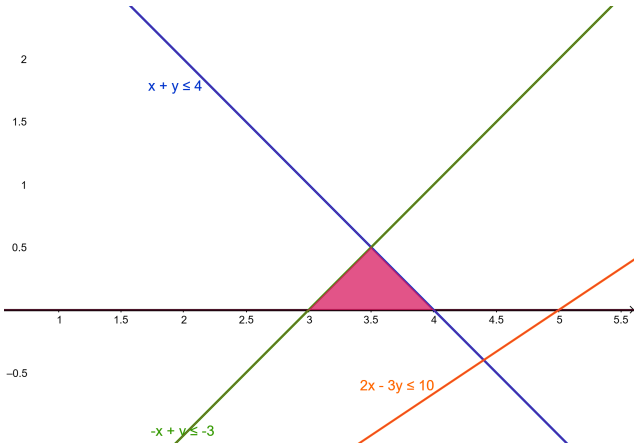
$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + ax_2 + 10x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \leq 0 \end{aligned}$$

Se le pide que encuentre su problema dual y, usando el método que prefiera, indique para qué valores de a el problema primal es no acotado.

Solución: Este problema se podría hacer con sensibilidad o dualidad. El dual sería:

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + y_2 \\ \text{sujeto a} \quad & y_1 + y_2 \leq 4 \\ & -y_1 + y_2 \leq a \\ & 2y_1 - 3y_2 \leq 10 \\ & y_1, y_2, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Y con esto podrían utilizar el método gráfico para ver que se convierte en infactible cuando $a \leq -4$. Como el primal es factible (por ejemplo $x = (0, 0, 0)$), concluimos que debe ser no acotado. En el ejemplo es con un $a = -3$:



[2 pts por encontrar el dual; 2 pts por decir que el dual es infactible cuando $a \leq -4$ (esto pueden hacerlo con el método gráfico o con sensibilidad); 1 pto por decir que, dado que el primal es factible, debe ser no acotado si el dual es infactible para valores $a \leq -4$.]

Pregunta 3 (15 puntos + 2 bonus)

(a) **(12 puntos)** Considere el siguiente problema de optimización no lineal:

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & e^{x_1} \\ \text{s. a:} \quad & x_1^2 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 \geq 2 \end{aligned}$$

(i) **(3 puntos)** Argumente por qué el problema admite solución óptima.

Solución: La función objetivo es continua, el dominio es cerrado (las restricciones están definidas por funciones continuas con desigualdades no estrictas) y es acotado dado que podemos ver de la primera restricción que $|x_1| \leq 2$ y también $x_2 \leq 4$. Por la segunda restricción, vemos que $x_2 \geq 0$. Por último, el dominio es no vacío. Basta tomar, por ejemplo, el punto $(x_1, x_2) = (1, 1)$. Entonces, podemos garantizar que hay solución óptima según el teorema de B-W.

Asignación de puntaje: 3 puntos por identificar las condiciones para aplicar al teorema y aplicarlo (indicar que B-W garantiza que hay solución óptima).

2 puntos si es que explica el argumento completo pero no muestra claramente por qué el conjunto es acotado o por qué es factible.

1 punto si identifica algunos de los conceptos pero no concluye correctamente usando el teorema.

0 puntos si no aplica el teorema.

(ii) **(7 puntos)** ¿El punto $(x_1, x_2) = (-1, 3)$ satisface las condiciones de KKT? ¿Es ese punto solución óptima del problema?

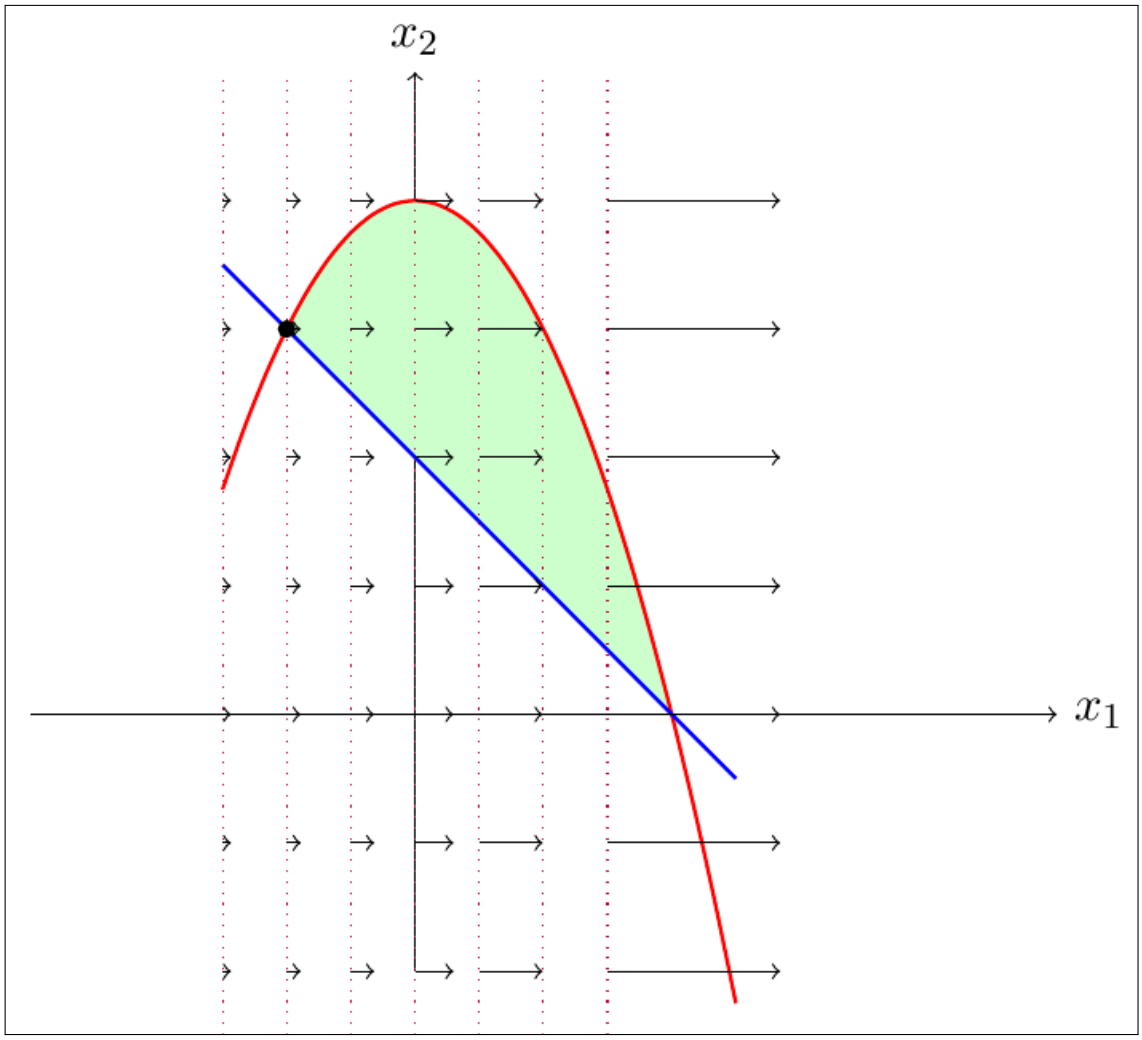
Solución: Podemos construir las condiciones de KKT a partir del Lagrangeano: $L(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2) = e^x + \mu_1(x^2 + x_2 - 4) + \mu_2(-x - x_2 + 2)$

Luego (además de factibilidad y que los multiplicadores sean no negativos), las condiciones quedan como:

$\frac{\partial L}{\partial x_1} = e_1^x + 2\mu_1 x_1 - \mu 2 = 0$
$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \mu_1 - \mu 2 = 0$
$\mu_1 \frac{\partial L}{\partial \mu_1} = \mu_1(x_1^2 + x_2 - 4) = 0$
$\mu_2 \frac{\partial L}{\partial \mu_2} = \mu_2(-x_1 - x_2 + 2) = 0$
El punto sí satisface las condiciones. Resolviendo el sistema encontramos que sí existen μ_1 y μ_2 no negativos que permiten satisfacer las condiciones en ese punto. En particular, $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{3e}$. Además, el punto es regular. Podemos verificar que los gradientes de las funciones que definen las restricciones activas en ese punto son linealmente independientes.

Vemos que el problema es convexo, por lo tanto ese punto es óptimo global del problema (para un problema de minimización convexo, un punto factible y regular que cumple las condiciones de KKT es mínimo global del problema).

Asignación de puntaje: 2 puntos por las condiciones de KKT. 1 punto por construir el Lagrangeano o si no lo hizo así, indicar como las construyó (armando la igualdad que indica que menos el gradiente sea una combinación cónica del gradiente de las restricciones activas y las holguras complementarias). También se puede otorgar el punto si hace la explicación gráficamente mostrando los gradientes en el gráfico. 2 punto por verificar que el punto las cumple y encontrar los mu. 1 punto por indicar que el punto es regular (ya sea porque el problema cumple la condición de slater o mirando los gradientes de las restricciones activas. 1 punto por indicar que por convexidad del problema el punto es la solución óptima. También se otorga un punto si resuelve el problema de manera gráfica y lo responde en base a eso.



(iii) **(2 puntos)** Si el lado derecho de la segunda restricción aumentara en $\frac{1}{10}$, aproximadamente, ¿cuánto sería el cambio en el valor óptimo del problema?

Solución: $\approx \frac{1}{3e} \cdot \frac{1}{10}$

Asignación de puntaje: 1 punto por explicar como se hace la aproximación (como menos la variable dual asociada, es decir el mu, por el cambio). 1 punto por calcularlo correctamente (entregar el valor).

(b) **(3 + 2 puntos)** A continuación se presenta un extracto del *MIP Log* de Gurobi para un problema de optimización lineal entera donde algunas informaciones han sido ocultas y marcadas con signos de interrogación. Responda, con la información disponible, las siguientes preguntas y, en cada una, justifique su respuesta.

```
Root relaxation: objective 1.890000e+02, 147 iterations, 0.00 seconds (0.00 work units)

    Nodes    |    Current Node    |     Objective Bounds      |     Work
 Expl Unexpl |  Obj  Depth IntInf | Incumbent    BestBd   Gap | It/Node Time

     0     0  189.00000    0   78          -   (1) ???      -     -    0s
     0     0  189.00000    0   78          -   (2) ???      -     -    0s
     0     2  189.00000    0   78          -   (3) ???      -     -    0s
*  347   380              46     108.0000000  187.50000  73.6%  14.3    0s
*  452   428              10     118.0000000  187.50000  58.9%  14.7    0s
*  462   428              13     131.0000000  187.50000  43.1%  14.8    0s
*  749   504              28     133.0000000  184.00000  38.3%  17.0    0s
*  755   504              27     134.0000000  184.00000  37.3%  16.9    0s
* 3975  1707              29     135.0000000  176.00000  30.4%  18.3    0s
* 9578  2814              27     137.0000000  165.50000  20.8%  18.4    0s
 17487  4408  149.50000   28   74  137.00000  159.50000  16.4%  18.1    1s
 48757  4083     cutoff   32       137.00000  148.00000  8.03%  17.4    2s

Explored 63280 nodes (1088782 simplex iterations) in 2.44 seconds (3.07 work units)
Thread count was 16 (of 16 available processors)

Solution count 7: 137 135 134 ... 108

Optimal solution found (tolerance 1.00e-02)
Best objective 1.370000000000e+02, best bound 1.370000000000e+02, gap (4)??? %
```

(i) **(1 punto)** ¿Cuánto valen los valores (1), (2) y (3)? Explique qué representan.

Solución: 189 los 3. Corresponden a la mejor cota superior que se tiene hasta el momento dado que el problema es de maximización. Se obtiene mirando el valor de la relajación lineal o el valor objetivo del nodo 0 o "raíz" que es lo mismo.

Asignación de puntaje: 1 punto si la explicación es correcta y clara.

(ii) **(1 punto)** Explique qué representa el *gap*.

Solución: De manera general, es una medida de la calidad de la solución que se tiene hasta el momento (el incumbente). En algunos *solvers* puede estar definido de forma ligeramente distinta. Una forma (la que usa Gurobi) es tomarlo como la diferencia absoluta entre el incumbente y la mejor cota y eso dividido por el valor absoluto del incumbente. En ese caso, el *gap* representa "cuánto (procentualmente) es lo más que podría mejorar con respecto a lo que tengo ahora". Otra definición del *gap* es la diferencia absoluta entre la mejor cota y el incumbente y eso dividido por el valor absoluto de la mejor cota. En ese caso, el *gap* representa "cuánto es a lo más que puedo estar del valor óptimo del problema" o "a cuánto (porcentualmente), estoy de lo mejor a lo que podría aspirar".

Asignación de puntaje: 1 punto si la explicación es correcta y clara.

(iii) **(1 punto)** ¿Cuánto vale (4)? ¿Siempre se obtiene ese valor? Comente.

Solución: Vale 0 %. Siempre que el problema se resuelva a optimalidad (y este tenga solución) el gap va a ser 0. Es posible que Gurobi termine de correr y llegue a un gap diferente de 0 si es que, por ejemplo, se le ha definido un límite de tiempo o un gap aceptable o si el gap es diferente de 0 pero está bajo la "tolerancia" aceptada definida en el *solver*.

Asignación de puntaje: 1 punto si la explicación es correcta y clara.

(iv) **(1 punto bonus)** ¿Puede asegurar que el problema tiene solución única? ¿Por qué?

Solución: No, porque el algoritmo de *branch and bound* solo guarda la solución incumbente cuando esta representa una mejora. No guarda/actualiza soluciones múltiples por defecto.

Asignación de puntaje: 1 punto si la explicación es correcta y clara.

(v) **(1 punto bonus)** ¿Puede el valor del *gap* aumentar a medida que se resuelve el problema? Comente.

Solución: Sí, puede aumentar si, por ejemplo, el valor del incumbente cambia de signo (si "se cruza el 0").

Asignación de puntaje: 1 punto si la explicación es correcta y clara.

Pregunta 4 (15 puntos)

(a) **(2 puntos)** Para un problema de maximización, explique en palabras los conceptos de valor óptimo y solución óptima.

Solución: El valor óptimo es la mayor cota inferior para el valor objetivo de cualquier solución factible. Una solución óptima es una solución factible cuyo valor objetivo es mayor o igual al de cualquier otra solución factible.

- ◇ **(1 punto)** por cada definición

(b) **(3 puntos)** Sea x^* la única solución óptima de $\min\{f(x) : \ x \in X\}$. Suponga que al agregar la restricción $g(x) \leq b$, la solución óptima es $\bar{x}$. Indique una condición necesaria y suficiente para que $\bar{x} = x^*$. Justifique claramente.

Solución: La condición es $g(x^*) \leq b$. Por un lado, es necesaria pues x^* debe ser factible para el problema modificado. Por otro lado, es suficiente pues implica que x^* es factible para el problema modificado y por ende óptimo, y como la solución del problema original es única, debemos tener $\bar{x} = x^*$.

- ◇ **(1 punto)** por indicar que la condición es $g(x^*) \leq 0$
- ◇ **(1 punto)** por necesidad
- ◇ **(1 punto)** por suficiencia

(c) **(4 puntos)** Explique claramente por qué (P_1) $\min\{f(x) : \ \max\{g(x,z) : \ z \in Y\} \geq b, \ x \in X\}$ es equivalente a (P_2) $\min\{f(x) : \ g(x,y) \geq b, \ x \in X, \ y \in Y\}$. Suponga que todos los problemas involucrados tienen solución óptima.

Solución: Por un lado, si (x,y) es factible para (P_2), entonces x es factible para (P_1) pues $b \leq g(x,y) \leq \max\{g(x,z) : \ z \in Y\}$. Por otro lado, si x es factible para (P_1), tomando y como solución óptima de $\max\{g(x,z) : \ z \in Y\}$, tenemos $b \leq \max\{g(x,z) : \ z \in Y\} = g(x,y)$ y por ende (x,y) es factible para (P_2).

- ◇ **(2 puntos)** por cada sentido

(d) **(3 puntos)** Suponga que el problema $\min\{f(x) : \ (x,y) \in Z, \ x \in \{0,1\}^n\}$ es factible. Explique claramente por qué tiene solución óptima.

Solución: Notemos que Z puede ser dividido en 2^n partes, una por cada $x \in \{0,1\}^n$, y todas las soluciones dentro de cada parte tienen el mismo valor objetivo. Luego, de todas las partes no vacías, basta considerar la de menor valor objetivo asociado.

- ◇ **(2 puntos)** por argumentar que hay una cantidad finita de valores para $f(x)$
- ◇ **(1 punto)** por concluir

(e) **(3 puntos)** En relación a la Pregunta 1, considere una instancia con dos tipos de pastel, dos ingredientes y tres periodos. Sean

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \; K = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Escriba explícitamente el vector de variables de decisión junto con la matriz de restricciones y el lado derecho asociados a (2).

Solución: Escribiendo $x = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23})$, el sistema queda

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

- ◇ **(1 punto)** por escribir correctamente x
- ◇ **(1 punto)** por dimensionar correctamente el sistema
- ◇ **(1 punto)** por todos los coeficientes correctos

Si alguien considera una modificación de (2), también puede obtener el puntaje correspondiente a los puntos anteriores.