ICS1113 OPTIMIZACION, 2010/1.
INTERROGACION 1. SOLUCION.

Instrucciones: La prueba tiene 4 partes que totalizan 100 puntos. Responda la prueba en los cuadernillos que se le han entregado, son uno por parte. Coloque su **nombre, sección y número de lista** en cada una de las hojas de los cuadernillos. **Si no se atiene a estas instrucciones se le descontarán 5 puntos** del puntaje de la prueba. No puede usar calculadoras ni teléfonos celulares. Tiene 120 minutos.

Parte 1 (25 pts).

a) (15 pts) La fábrica de ropa BB quiere fabricar 3 tipos de pijamas: P1, P2 y P3. La siguiente tabla proporciona información sobre recursos usados en la producción y utilidades generadas por los productos.

Recurso usado	**Tipo de pijama**			**Disponibilidad**
	P1	**P2**	**P3**	
Género (m)	1,2	2,5	4	100.000
Mano de obra (horas)	3	5	8	6.000
Utilidad generada ($/unidad)	2.000	3.000	4.000	

Para que la producción de cada tipo de pijama sea factible desde el punto de vista tecnológico, si se decide hacer de un tipo, se tienen que fabricar por lo menos 500, 800 y 1.000 pijamas del tipo P1, P2 y P3 respectivamente (puede no fabricarse algún tipo de pijama, pero si se fabrica tiene que hacerse en una cantidad mayor a las unidades señaladas). Formule un modelo matemático lineal entero que determine cuánto debe producirse de cada tipo de pijama de modo que se maximicen las utilidades de BB.

Respuesta: 1,5 pts. por definir variables

Sean x_1, x_2 y x_3 las cantidades a producir de cada tipo de pijama. Definamos también las variables z_1, z_2 y z_3 como variables binarias que valen 1 si el respectivo tipo de pijama es fabricado y 0 si no. El modelo es:

1 pt. por definir variables z_i.

$$\begin{aligned}
\max \quad & 2.000x_1 + 3.000x_2 + 4.000x_3 & & \text{2 pts.}\\
s.a. \quad & 1,2x_1 + 2,5x_2 + 4x_3 \le 100.000 & (1) & \text{2 pts.}\\
& 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 \le 6.000 & (2) & \text{2 pts.}\\
& 500z_1 \le x_1 & (3) & \\
& x_1 \le Mz_1 & (4) & \\
& 800z_2 \le x_2 & (5) & \text{4 pts.}\\
& x_2 \le Mz_2 & (6) & \\
& 1.000z_3 \le x_3 & (7) & \\
& x_3 \le Mz_3 & (8) & \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 & (9) & \text{1,5 pts.}\\
& z_1 \in \{0,1\}, z_2 \in \{0,1\}, z_2 \in \{0,1\} & (10) & \text{1 pt.}
\end{aligned}$$

En este modelo "M" representa un número suficientemente grande. Las restricciones (1) y (2) son típicas restricciones de consumo de recursos. Las siguientes son las que hacen que funcione la cantidad mínima si hay producción. En efecto, tomemos (3) y (4), por ejemplo. Si se decide producir, entonces x_1 será >0 y (4) obligará a z_1 a ser = 1. Por otro lado, (3) obligará adicionalmente a que x_1 sea al menos 500. Las demás restricciones son análogas.

Nota: Si se consideró que la producción de un pijama implicaba que se debían producir todos los otros tipos, y el procedimiento no está correcto, el puntaje máximo es 2 pts. de 4 en esa parte (aquellos que lo consideraron así, pero su procedimiento está correcto, tienen los 4 pts.).

b) (10 pts) Considere el problema

$$P) \quad \begin{array}{ll} \max & \min\{x+8y, 9x+2y\} \\ s.a. & \dfrac{x+y}{3x-1} \le 8 \\ & x \ge 1, y \ge 0 \end{array}$$

Escriba este problema en una forma equivalente sólo con términos lineales. Explique con precisión cada paso.

Respuesta:
Primero eliminemos el "min" de la función objetivo. Eso se hace con una variable adicional:

$$P) \quad \begin{array}{ll} \max & t \\ s.a. & x+8y \ge t \\ & 9x+2y \ge t \\ & \dfrac{x+y}{3x-1} \le 8 \\ & x \ge 1, y \ge 0 \end{array}$$

5 pts.

Nota: Si se consideran a la inversa las desigualdades, el puntaje máximo de esa parte son 2,5 pts.

Ahora hay que linealizar el término fraccionario de la restricción. Como $x \ge 1$ está excluida la posibilidad de que el denominador se **ANULE**, y además hace que éste **NO SEA NEGATIVO**, por lo que no afecta el sentido de la desigualdad. Considerando estos dos aspectos, el problema equivalente final es:

1,5 pts.

1,5 pts.

$$P) \quad \begin{array}{ll} \max & t \\ s.a. & x+8y \ge t \\ & 9x+2y \ge t \\ & x+y \le 24x-8 \\ & x \ge 1, y \ge 0 \end{array}$$

2 pts.

Nota: Para obtener los 3 pts, bastaba decir que, dado que $x \ge 1$, 3x-1 es siempre positivo.

Parte 2 (25 pts).

a) (5 pts) Considere un problema de optimización de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ s.a. & x \in D \end{array}$$

Donde D es un conjunto cerrado. Suponga que x^1 y x^2 son dos puntos en D tales que cada uno de ellos es mínimo local del problema. Suponga que adicionalmente sabe que la función f es convexa. Demuestre que entonces el problema tiene un número infinito de soluciones.

Respuesta: Esto es sólo consecuencia de la convexidad. Como f es convexa, los dos puntos son mínimos globales y $f(x^1) = f(x^2)$. Como D es convexo, se tiene que $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in D, \forall \lambda \in [0,1]$. Luego,

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \le \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2) = f(x^1)$$

Y como los puntos son mínimos globales debe necesariamente tenerse que:

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) = f(x^1), \forall \lambda \in [0,1]$$

Es decir, todos los puntos entre x^1 y x^2 son mínimos del problema.

b) (20 pts) Responda brevemente las siguientes preguntas, justificando con claridad su respuesta:

i) (5 pts) Considere el problema general:

$$\min \quad f(x)$$
$$s.a. \quad g_i(x) \le b_i \ , i = 1,...,n$$

Suponga que *f* es convexa. Para que el problema sea convexo las funciones g_i deben ser convexas. ¿Cierto o no?

Respuesta: Falso.
Puede haber funciones no convexas que den origen a conjuntos de nivel convexos y el dominio es el que tiene que ser convexo para que el problema sea convexo.

ii) (5 pts) Si un problema de programación lineal está definido sobre un dominio no acotado, entonces el problema no tiene solución ¿cierto o no?

Respuesta: Falso.

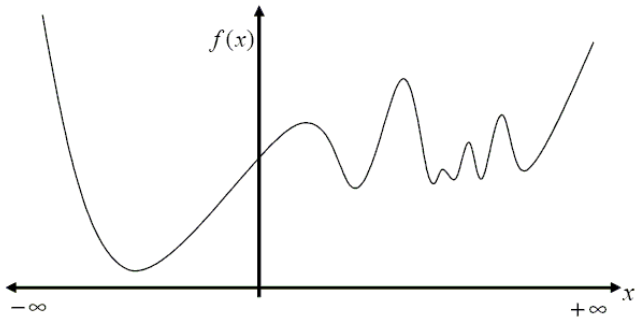
Por el Teorema 1 (Existencia de soluciones óptimas), dado el problema de optimización:

$$P) \ Min \ f(x)$$
$$x \in D$$

Si $f(x)$es continúa sobre D, con D cerrado y no vacío sobre bajo la hipótesis:

$$H) \ f(x) \to +\infty \ si \ \|x\| \to +\infty, x \in D$$

P) admite al menos 1 solución óptima.



Intuición: Eso depende de la función objetivo, si esta "apunta" en la dirección contraria a donde el conjunto es no acotado, entonces el problema puede perfectamente tener solución óptima.

iii) (5 pts) Si la función objetivo de un problema no es estrictamente convexa entonces el problema no es convexo. ¿Cierto o no?

Respuesta: Falso.

Un problema se dice convexo si D es una parte convexa de R^n y $f(x)$ es convexo sobre D (Definición 11). Por lo que tan sólo basta con que $f(x)$ sea convexa.

iv) (5 pts) Considere el problema:

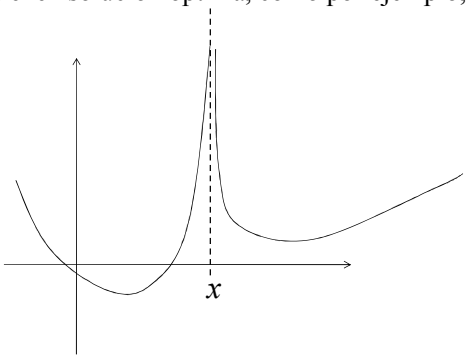
$$\min \quad f(x)$$
$$s.a. \quad x \in D$$

Suponga que *D* es cerrado y acotado. Si *f* presenta discontinuidades en el conjunto *D* entonces el problema no tiene solución. ¿Cierto o no?

Respuesta: Falso.

El Teorema de Bolzano-Weierstrass (Corolario 2) dice que si *f* es continua, sobre un dominio no vacío, cerrado y acotado, entonces el problema necesariamente tendrá solución óptima, ya que la imagen de una función continua sobre un set compacto, es también compacta (cerrada y acotada).

Es importante notar que estos teoremas identifican condiciones suficientes para existencia de optimalidad, pero no condiciones necesarias. Así, muchos problemas que no satisfacen las condiciones identificadas en el Teorema de Bolzano-Weierstrass tienen solución óptima, como por ejemplo, la función de la figura:



Como se puede ver, esa función podría ser discontinua en x pero eso no elimina el hecho de que la función sí tiene mínimo.

Parte 3 (25 pts).

a) (12 pts) Dado el siguiente Problema de Programación Lineal:

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha x_1 + 2x_2 \\ s.a. \quad & 2x_1 - x_2 \geq 0 \quad (1) \\ & x_1 + x_2 \geq 10 \quad (2) \\ & -x_1 + 2x_2 \geq 2 \quad (3) \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (4) \end{aligned}$$

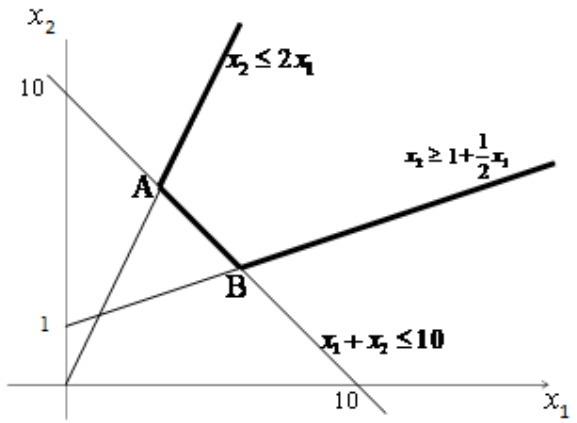
Donde α es una constante. Determine y justifique para qué valores de la constante "α" se tiene que el problema:

- **i.** Tiene solución única.
- **ii.** Tiene múltiples soluciones.
- **iii.** Es no acotado.

(**Ind:** basta que de un valor válido y adecuadamente justificado para cada una de las partes).

Respuesta:

La región factible del problema es como se muestra en la figura:



La función objetivo es $\alpha x_1 + 2x_2$ y es minimizada. Podemos entonces ver que la solución al problema consiste en definir pendientes adecuadas para esta.

i) Para que la solución sea única, podría ser, por ejemplo, el punto B. Ese se obtiene si se pone $\alpha = 0$ ya que en ese caso la función objetivo busca el punto factible con menor coordenada x_2. (4 ptos.)
ii) Para que el problema tenga múltiples soluciones podemos hacer que la función objetivo sea paralela a la restricción $x_1 + x_2 \le 10$, o al segmento A-B. Eso se logra poniendo $\alpha = 2$. (4 ptos.)
iii) Para que el problema sea no acotado debemos cambiar la orientación de la función objetivo de modo que "apunte" en la dirección de no acotamiento de la región factible. Notemos, por ejemplo, que si elegimos $\alpha = -1$, la función objetivo es $-x_1 + 2x_2$ y es paralela a la tercera restricción. Basta hacer α un poco más negativo y ya tendremos que el problema es no acotado. Por ejemplo, con $\alpha = -2$ la función objetivo es $-2x_1 + 2x_2$. Si parametrizamos el movimientos sobre la restricción (3) en función de la coordenada x_2, tenemos que $x_1 = 2x_2 - 2$. Reemplazando en la función objetivo tenemos que esta vale (4 ptos.)

$$-2(2x_2 - 2) + 2x_2 = -4x_2 + 4 + 2x_2 = -2x_2 + 4$$

De esa forma podemos movernos sobre la restricción (por ejemplo, a partir del punto B) avanzando hacia la derecha y haciendo disminuir el valor de la función objetivo.

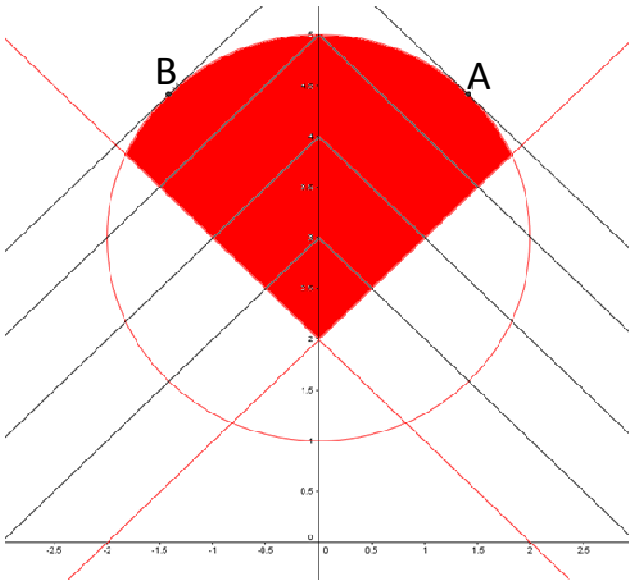
Si se ponen intervalos que contenga algún valor válido también se pondrá 4 ptos., pero si se ponen intervalos que contengan algún valor no válido, a pesar de tener algunos que sí lo estén, se pondrá la mitad.

b) (13 pts) Resuelva gráficamente el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x,y) \\ s.a. \quad & x^2 + (y-3)^2 \le 4 \\ & y + x \ge 2 \\ & y - x \ge 2 \end{aligned}$$

donde $f(x,y) = \max\{x+y, y-x\}$. (**Ind**: dibuje el dominio y luego visualice cuidadosamente cómo son los conjuntos de nivel de la función objetivo).

Respuesta:
El siguiente gráfico muestra las restricciones y las curvas de nivel. El área pintada es la región factible:



(6 ptos. por dibujar bien el dominio)

El por qué de las curvas de nivel de esa forma puede verse del hecho que $\max\{x+y, y-x\} = x+y$ cuando $x \geq -x$ y eso ocurre únicamente cuando $x \geq 0$. En ese caso, la línea de nivel está dada por la ecuación $x+y=$ constante. Por otro lado, $\max\{x+y, y-x\} = y-x$ cuando $x \leq 0$ y en ese caso, estamos sobre la línea $y-x=$ constante. La solución óptima se encuentra gráficamente en los puntos marcados y corresponde a

(8 ptos. por dibujar bien el dominio y las curvas de nivel)

$$A = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}+3\right)$$

$$B = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}+3\right)$$

(13 ptos por dibujar bien todo, y comentar que las soluciones óptimas son los puntos A y B, sin necesidad de calcularlos).

Parte 4. (25 pts)

Plan quinquenal de cosecha de una empresa forestal. Usted es el encargado de programación de cosecha de una empresa forestal, y debe generar el plan de cosecha mes a mes para los próximos 5 años. Suponga que usted dispone de 500 fundos forestales ubicados en distintos lugares, los cuales abastecen a 5 plantas donde la madera es procesada. Cada una de las plantas necesita un abastecimiento mensual de madera igual a Q_k m^3 para la planta k. Usted debe decidir la cosecha mensual de madera en cada uno de los fundos para el período de tiempo señalado, y además determinar cuánta madera debe enviarse desde cada fundo a cada planta en cada periodo. Suponga que cosechar en el fundo j en el periodo t tiene un costo igual a B_{jt} \$/m^3. Por otro lado, se sabe que la distancia entre el fundo j y la planta k es d_{jk}, y que el costo por kilómetro de mover un metro cúbico de madera en el mes t es de C_t \$/m3-km. La cantidad inicial de madera disponible en el fundo j es V_j m^3, la cual puede ser cosechada completa en un mes o dividida a lo largo de diferentes meses (o cosechada parcialmente o simplemente no cosechada).

a) (17 pts) Formule un modelo de programación lineal que entregue la planificación de cosecha mes a mes para los próximos 5 años de modo tal que se minimicen los costos involucrados.

b) (8 pts) Suponga ahora que debido a consideraciones medioambientales se agrega la restricción adicional de que en un fundo no puede haber cosecha en más de tres meses (no necesariamente consecutivos) a lo largo del horizonte total de cinco años. Escriba las modificaciones adicionales que deben introducirse al modelo de **a)** para tomar en cuenta este nuevo requerimiento.

Respuesta:

a) Definamos las variables x_{jt} como la cantidad de madera cosechada en el fundo *j* en el mes *t*, y y^t_{jk} como la cantidad de madera transportada desde el fundo *j* a la planta *k* en el mes *t*.. Con esto el modelo queda:

$$\min \quad \sum_{t=1}^{60}\{\sum_{j=1}^{500} B_{jt}x_{jt} + \sum_{j=1}^{500}\sum_{k=1}^{5} C_t d_{jk} y^t_{jk}\}$$

$$s.a. \quad \sum_{t=1}^{60} x_{jt} \le V_j \qquad j = 1,...,500$$

$$\sum_{k=1}^{5} y^t_{jk} = x_{jt} \qquad j = 1,...,500; t = 1,...60$$

$$\sum_{j=1}^{500} y^t_{jk} = Q_k \qquad k = 1,...,5$$

$$x_{jt} \ge 0, y^t_{jk} \ge 0 \qquad j = 1,...,500; t = 1,...60; k = 1,...,5$$

b) En este caso hay que introducir variables binarias z_{jt} que vale 1 si se cosecha en el fundo *j* en el mes *t*, y 0 si no. Con estas variables es posible agregar al modelo las siguientes restricciones:

$$x_{jt} \le M z_{jt}\ , j = 1,...,500; t = 1,...60.$$

$$\sum_{t=1}^{60} z_{jt} \le 3\ , j = 1,...,500.$$

Donde "M" es una constante grande (podemos, de hecho, tomar V_j). La primera restricción hace que si es necesario que haya cosecha en un fundo en un mes específico, entonces z_{jt} tome valor 1. La segunda asegura que solo tres de esas variables por fundo sean a lo más igual a 1, garantizando que no se coseche en más de tres meses. Nótese que si bien un valor $z_{jt} = 1$ junto con $x_{jt} = 0$ es válido, no tiene sentido que se de ya que estaría ocupando "turno" de cosecha para otros períodos, y si en esos otros es necesario cosechar, la variable binaria puede tomar el valor 0, que también es factible.

Puntaje:

a)

- Definición de variables de decisión: 1 punto cada una.
- Función objetivo: 4 puntos (2 puntos cada sumando)
- Restricciones de No Negatividad: 1 punto cada una.
- Otras restricciones: 3 puntos cada una.

Total: 17 puntos.

b)

- Definición de variable binaria: 2 puntos.
- Restricciones: 3 puntos cada una.

Total: 8 puntos.