PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2023 - 1
Profesores: G. Angulo - R. Cuadrado - G. Méndez - G. Pérez

Interrogación 1
Duración: 150 minutos.

Pregunta 1 (20 puntos)

(a) **(14 puntos)**

A usted se le ha encargado la tarea de seleccionar y planificar los proyectos de construcción de una empresa inmobiliaria para un horizonte de tiempo de τ días. Concretamente, usted debe planificar cuándo serán realizados los proyectos (si son realizados). Todos los proyectos planificados deben terminar dentro de ese horizonte de tiempo. Se tiene un conjunto P de proyectos disponibles y hay proyectos que solo pueden realizarse si ya han sido terminados otros proyectos. Esta información se le entrega en la forma de un conjunto definido como R_i de proyectos "prerrequisito" de un proyecto i.

Considere que cada proyecto i requiere de t_i días para ser completado y que, una vez que comienza un proyecto, este es realizado sin interrupciones. Además, se tiene que algunos proyectos no pueden ser realizados si se realizan otros proyectos. Esta información viene dada por un conjunto N_i de proyectos "incompatibles" con un proyecto i. Por otro lado, hay proyectos que necesariamente deben ser realizados si se lleva a cabo un determinado proyecto. Esta información se le entrega en la forma de un conjunto F_i de proyectos que deben ser realizados en caso de decidir realizar el proyecto i.

La realización de cada proyecto implica un costo de c_i USD. Asimismo, cada proyecto genera un ingreso de γ_i USD al ser terminado. Usted dispone de un capital total de κ USD para financiar la realización de los proyectos que sean seleccionados. Considere que no puede usar los ingresos de un proyecto para pagar los costos de otro. Es decir, los proyectos solo son financiados con el capital disponible.

Por último, por decisiones de la empresa, se le pide solo considerar en la planificación proyectos que generen ingresos que sean al menos μ veces sus costos asociados.

Formule un modelo de programación lineal entera que permita generar una planificación de los proyectos a realizar de manera de maximizar las utilidades percibidas en todo el horizonte de tiempo. Puede definir las variables que considere necesarias. En caso de usar constantes de tipo *"Big M"* no es necesario especificar su valor.

(b) **(6 puntos)**

Ahora considere que algunos proyectos no pueden ser realizados en paralelo. Esta información se le entrega en un conjunto L_i que indica los proyectos que no pueden ser ejecutados mientras se está ejecutando el proyecto i.

Por otro lado, por motivos financieros, se le ha solicitado que su planificación considere que a la mitad del horizonte de planificación, ya se deben haber obtenido ingresos de al menos ρ USD.

Agregue las variables o restricciones que considere necesarias para modelar estas nuevas condiciones. En caso de usar constantes de tipo *"Big M"* no es necesario especificar su valor.

Solución:

En el caso de que se haya asumido que τ y t_i ($\forall i \in P$) eran números enteros y que se haya discretizado el tiempo se tiene la siguiente formulación:

Parámetros:

P : Conjunto de proyectos.

N_i : Conjunto de proyectos "incompatibles" con el proyecto i.

R_i : Conjunto de proyectos "prerrequisito" que deben haber sido realizados (terminados) antes de comenzar el proyecto i.

L_i : Conjunto de proyectos que no se pueden realizar en paralelo con el proyecto i.

F_i : Conjunto de proyectos que deben ser realizados si se realiza el proyecto i.

c_i : Costo de realizar al proyecto i.

γ_i : Ingreso obtenido por realizar el proyecto i.

t_i : Duración o tiempo de ejecución del proyecto i.

κ : Presupuesto disponible.

τ : Horizonte de tiempo para la planificación (límite de tiempo para el término de los proyectos planificados).

ρ : Ingreso mínimo requerido para la primera mitad de la planificación.

μ : Ratio entre ingreso y costo (umbral mínimo) aceptado por proyecto.

Variables:

w_i : Variable binaria que indica si se realiza (planifica) el proyecto i. Toma el valor de 1 si se realiza el proyecto y el valor de 0 en caso contrario.

α_{id} : Variable binaria que indica si se comienza a realizar el proyecto i en el día d. Toma el valor de 1 si se comienza el proyecto en ese día y el valor de 0 en caso contrario.

z_{id} : Variable binaria que indica si se trabaja en el proyecto i durante el día d.

Restricciones:

$$\sum_{i \in P} w_i \cdot c_i \leq \kappa \tag{R1}$$

$$\sum_{d=1}^{\tau} \alpha_{id} = w_i \qquad \forall i \in P \tag{R2}$$

$$\alpha_{id} = 0 \qquad \forall d \in \{\tau - t_i + 1, ..., \tau\}, \quad \forall i \in P \tag{R3}$$

$$\sum_{i \in P} \sum_{d=1}^{\lfloor \frac{\tau}{2} \rfloor - t_i + 1} \alpha_{id} \cdot \gamma_i \geq \rho \tag{R4}$$

$$w_i \cdot \gamma_i \geq \mu \cdot w_i \cdot c_i \qquad \forall i \in P \tag{R5}$$

$$w_i + w_j \leq 1 \qquad \forall j \in N_i, \quad \forall i \in P : i > j \tag{R6}$$

$$w_i \leq w_j \qquad \forall j \in F_i, \quad \forall i \in P \tag{R7}$$

$$w_i \leq w_j \qquad \forall j \in R_i, \quad \forall i \in P \tag{R8}$$

$$\alpha_{id} \leq \sum_{\tilde{d}=1}^{d-t_j} \alpha_{j\tilde{d}} \qquad \forall d \in \{1, ..., \tau\}, \quad \forall j \in R_i, \quad \forall i \in P \tag{R9}$$

$$z_{id} + z_{jd} \leq 1 \qquad \forall d \in \{1, ..., \tau\}, \quad \forall j \in L_i, \quad \forall i \in P : i > j \tag{R10}$$

$$\alpha_{id} \cdot t_i = \sum_{\tilde{d}=d}^{d+t_i-1} z_{i\tilde{d}} \qquad \forall d \in \{1, ..., \tau - t_i + 1\}, \quad \forall i \in P \tag{R11}$$

$$\sum_{d=1}^{\tau} z_{id} \leq t_i \qquad \forall i \in P \tag{R12}$$

$$w_i \in \{1, 0\} \qquad \forall i \in P \tag{R13}$$

$$\alpha_{id} \in \{1, 0\} \qquad \forall d \in \{1, ..., \tau\}, \quad \forall i \in P \tag{R14}$$

$$z_{id} \in \{1, 0\} \qquad \forall d \in \{1, ..., \tau\}, \quad \forall i \in P \tag{R15}$$

F.O. : Maximizar las ganancias.

R1 : Restricción de presupuesto.

R2 : Solo se puede comenzar un proyecto si este se planifica.

R3 : No se puede comenzar un proyecto en un día si este no alcanzará a ser terminado.

R4 : Restricción de los ingresos a la mitad del proyecto (esta es de la pregunta 1.b).

R5 : Restricción sobre el margen mínimo aceptado por proyecto.

R6 : Restricción de los proyectos incompatibles.

R7 : Restricción de los proyectos que deben ser realizados en caso de realizar un proyecto determinado.

R8 : Restricción de dependencia de los proyectos con sus proyectos "prerrequisitos".

R9 : Restricción de precedencia de los proyectos "prerrequisito".

R10 : Restricción sobre la ejecución en paralelo de proyectos.

R11 : Restricción que relaciona las variables z con las variables α.

R12 : Restricción que ayuda a definir el comportamiento esperado para las variables z (en conjunto con la restricción anterior asegura que los proyectos se desarrollen sin interrupciones).

R13 : Naturaleza de variables de las variables w.

R14 : Naturaleza de variables de las variables α.

R15 : Naturaleza de variables de las variables z.

Para la R5 también se acepta como correcto:

$$\sum_{i \in P} w_i \cdot \gamma_i \geq \mu \cdot \sum_{i \in P} w_i \cdot c_i$$

Función objetivo:

$$\text{maximizar} \quad \kappa - \sum_{i \in P} (w_i \cdot c_i) + \sum_{i \in P} (w_i \cdot \gamma_i)$$

También se acepta como correcto:

$$\text{maximizar} \quad \sum_{i \in P} w_i \cdot (\gamma_i - c_i)$$

A continuación se presenta otra formulación posible para el problema en donde no se asume que el horizonte del tiempo y las duraciones requeridas de los proyectos son números enteros. Es decir, se modela el tiempo de forma continua.

Parámetros:

P : Conjunto de proyectos.

N_i : Conjunto de proyectos "incompatibles" con el proyecto i.

R_i : Conjunto de proyectos "prerrequisito" que deben haber sido realizados (terminados) antes de comenzar el proyecto i.

L_i : Conjunto de proyectos que no se pueden realizar en paralelo con el proyecto i.

F_i : Conjunto de proyectos que deben ser realizados si se realiza el proyecto i.

c_i : Costo de realizar al proyecto i.

γ_i : Ingreso obtenido por realizar el proyecto i.

t_i : Duración o tiempo de ejecución del proyecto i.

κ : Presupuesto disponible.

τ : Horizonte de tiempo para la planificación (límite de tiempo para el término de los proyectos planificados).

ρ : Ingreso mínimo requerido para la primera mitad de la planificación.

μ : Ratio entre ingreso y costo (umbral mínimo) aceptado por proyecto.

M_0 : $\sum_{i \in P} t_i$ También podría definirse un M diferente para cada restricción.

M_1 : $\sum_{i \in P} t_i$ También podría definirse un M diferente para cada restricción.

M_2 : $|P|$. También podría definirse un M diferente para cada restricción como $|N_i|$.

M_3 : $\sum_{i \in P} t_i$ También podría definirse un M diferente para cada restricción.

M_4 : $\sum_{i \in P} t_i$ También podría definirse un M diferente para cada restricción.

Variables:

w_i : Variable binaria que indica si se realiza (planifica) el proyecto i. Toma el valor de 1 si se realiza el proyecto y el valor de 0 en caso contrario.

α_i : Variable continua que representa el tiempo en el que se comienza a realizar el proyecto i.

b_{ij} : Variable binaria que indica si el proyecto i se realiza antes que el proyecto j. Toma el valor de 1 si el proyecto i se realiza antes que el proyecto j y 0 en caso contrario.

a_{ij} : Variable binaria que indica si el proyecto i se realiza después que el proyecto j. Toma el valor de 1 si el proyecto i se realiza después que el proyecto j y 0 en caso contrario.

z_i : Variable binaria que indica si el proyecto i es terminado antes de la mitad del horizonte de tiempo.

Restricciones:

$$\sum_{i \in P} w_i \cdot c_i \leq \kappa \tag{R1}$$

$$\alpha_i + t_i \leq \frac{\tau}{2} + M_0 \cdot (1 - z_i) \qquad \forall i \in P \tag{R2}$$

$$\sum_{i \in P} z_i \cdot \gamma_i \geq \rho \tag{R3}$$

$$w_i \cdot \gamma_i \geq \mu \cdot w_i \cdot c_i \qquad \forall i \in P \tag{R4}$$

$$\alpha_i + t_i \leq \tau + M_1 \cdot (1 - w_i) \qquad \forall i \in P \tag{R5}$$

$$\sum_{j \in N_i} w_j \leq M_2 \cdot (1 - w_i) \qquad \forall i \in P \tag{R6}$$

$$w_i \leq w_j \qquad \forall j \in F_i, \quad \forall i \in P \tag{R7}$$

$$\alpha_j + t_j \leq \alpha_i \qquad \forall j \in R_i, \quad \forall i \in P \tag{R8}$$

$$w_i \leq w_j \qquad \forall j \in R_i, \quad \forall i \in P \tag{R9}$$

$$\alpha_i \geq \alpha_j + t_j - M_3 \cdot (1 - a_{ij}) \qquad \forall j \in L_i, \quad \forall i \in P : i > j \tag{R10}$$

$$\alpha_i + t_i \leq \alpha_j + M_4 \cdot (1 - b_{ij}) \qquad \forall j \in L_i, \quad \forall i \in P : i > j \tag{R11}$$

$$b_{ij} + a_{ij} = w_i \qquad \forall j \in L_i, \quad \forall i \in P : i > j \tag{R12}$$

$$\alpha_i \geq 0 \qquad \forall i \in P \tag{R13}$$

$$w_i \in \{1, 0\} \qquad \forall i \in P \tag{R14}$$

$$b_{ij} \in \{1, 0\} \qquad \forall j \in L_i, \quad \forall i \in P : i > j \tag{R15}$$

$$a_{ij} \in \{1, 0\} \qquad \forall j \in L_i, \quad \forall i \in P : i > j \tag{R16}$$

$$z_i \in \{1, 0\} \qquad \forall i \in P \tag{R17}$$

F.O. : Maximizar las ganancias.

R1 : Restricción de presupuesto.

R2 : Restricción para asegurar que los proyectos planificados se terminan antes de la mitad del horizonte de tiempo.

R3 : Restricción de los ingresos percibidos a la mitad del horizonte de tiempo.

R4 : Restricción de no planificar proyectos con un margen bajo el umbral determinado.

R5 : Restricción sobre el tiempo de término de los proyectos seleccionados (dentro del horizonte de tiempo).

R6 : Restricción de los proyectos incompatibles.

R7 : Restricción de los proyectos que deben ser realizados en caso de realizar un proyecto determinado.

R8 : Restricción de precedencia de los proyectos "prerrequisito".

R9 : Restricción de dependencia de los proyectos con sus proyectos "prerrequisitos".

R10 : Restricción sobre la ejecución en paralelo de proyectos.

R11 : Restricción sobre la ejecución en paralelo de proyectos.

R12 : Restricción asociada a la definición de las variables b y a.

R13 : Naturaleza de variables de las variables α.

R14 : Naturaleza de variables de las variables w.

R15 : Naturaleza de variables de las variables b.

R16 : Naturaleza de variables de las variables a.

R17 : Naturaleza de variables de las variables z.

Para la R4 también se acepta como correcto:

$$\sum_{i \in P} w_i \cdot \gamma_i \geq \mu \cdot \sum_{i \in P} w_i \cdot c_i$$

Función objetivo:

$$\text{maximizar} \quad \kappa - \sum_{i \in P} (w_i \cdot c_i) + \sum_{i \in P} (w_i \cdot \gamma_i)$$

También se acepta como correcto:

$$\text{maximizar} \quad \sum_{i \in P} w_i \cdot (\gamma_i - c_i)$$

Puntajes:

No es necesario definir las constantes M.

Independientemente de la formulación utilizada, se asignan los puntajes por haber modelado las condiciones descritas en el enunciado.

Para la pregunta a):

- ◇ Función objetivo (maximizar las ganancias). 1 punto.
- ◇ Restricción de presupuesto. 1 punto.
- ◇ Restricción/es del umbral mínimo de utilidad. 2 puntos.
- ◇ Restricciones de que los proyectos deben terminar dentro del horizonte de tiempo. 2 puntos.
- ◇ Restricciones de los proyectos que son incompatibles. 2 puntos.
- ◇ Restricciones de los proyectos "obligados" en caso de hacer un proyecto. 2 puntos.
- ◇ Restricciones de los proyectos "prerrequisitos". 2 puntos.
- ◇ Restricciones de naturaleza de las variables. 2 puntos.

Para la pregunta b):

- ◇ Restricciones sobre la ejecución en paralelo. 3 puntos.
- ◇ Restricciones sobre el ingreso mínimo a la mitad del horizonte de tiempo. 3 puntos.

Pregunta 2 (20 puntos)

Se está trabajando en decidir las ubicaciones de n compañías de bomberos en una determinada región. Para esto, se cuenta con un conjunto de $j \in J$ localizaciones candidatas y se conoce un conjunto $i \in I$ de construcciones que se desean cubrir, donde t_{ij} es el tiempo en minutos que se demora un vehículo de la compañía de bomberos j en llegar a la construcción i, donde para cada construcción $i \in I$ se tiene que $t_{ij} \neq t_{ik}, \forall j, k \in J : j \neq k$.

Lamentablemente, no es posible cubrir todas las construcciones, por lo que se pide que al menos el 85 % de estas estén cubiertas. Se considera una construcción cubierta si se encuentra alguna compañía a 10 minutos o menos. En el parámetro c_i se le entrega la estimación de llamadas que la construcción i realizará anualmente. El gobierno necesita atender correctamente al menos el 90 % de estas llamadas. Se entiende que una llamada será atendida correctamente si se encuentra alguna compañía a 8 minutos o menos.

Superar los requerimientos mínimos de porcentajes de cobertura y atenciones correctas es claramente beneficioso, por lo que el gobierno le asigna b_1 y b_2 puntos por cada porcentaje adicional que supere el limite mínimo de cobertura y atenciones correctas, respectivamente.

Por último, cada construcción es asignada a la compañía de bomberos más cercana (o de menor tiempo). Las construcciones que no logran ser cubiertas en el tiempo mínimo, de todas maneras deben ser asignadas a su compañía de bomberos más cercana. En este caso, el gobierno penaliza su evaluación con p puntos por cada minuto adicional de demora por sobre los 10 minutos que cada construcción posea.

Dada esta información, a usted se le facilita el siguiente modelo de programación lineal entero-mixto:

$$\max \quad b_1 z_1 + b_2 z_2 - p \sum_{i \in I, j \in J : t_{ij} > \alpha} (t_{ij} - \alpha) x_{ij} \tag{1}$$

s.a

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in I \tag{2}$$

$$\sum_{j \in J} y_j = n \tag{3}$$

$$x_{ij} \leq y_j \qquad \forall i \in I, j \in J \tag{4}$$

$$x_{ij} \geq y_j - \sum_{k \in J : t_{ik} < t_{ij}} y_k \qquad \forall i \in I, j \in J \tag{5}$$

$$v_i \leq \sum_{j \in J : t_{ij} \leq \alpha} y_j \qquad \forall i \in I \tag{6}$$

$$w_i \leq \sum_{j \in J : t_{ij} \leq \beta} y_j \qquad \forall i \in I \tag{7}$$

$$\frac{\sum_{i \in I} v_i}{|I|} = 0.85 + z_1 \tag{8}$$

$$\frac{\sum_{i \in I} c_i w_i}{\sum_{i \in I} c_i} = 0.9 + z_2 \tag{9}$$

$$y_j \in \{0, 1\} \qquad \forall j \in J \tag{10}$$

$$v_i, w_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in I \tag{11}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in I, j \in J \tag{12}$$

$$z_1, z_2 \geq 0 \tag{13}$$

(a) **(11 puntos)** Explique las variables, restricciones y función objetivo. Además, indique los valores de los parámetros positivos α y β, y determine las cotas superiores de las variables z_1 y z_2.

Solución:
$\alpha = 10$ y $\beta = 8$ (0.5 puntos)
La cota superior para z_1 es 0.15 y para z_2 es 0.1. (0.5 puntos)

Variables:

- x_{ij}: 1 si la construcción i es asignada a la compañia j, 0 si no.
- y_j: 1 si se localiza una compañía en j, 0 si no.
- v_i: 1 existe alguna compañía a 10 minutos o menos de la construcción i, 0 si no.
- w_i: 1 existe alguna compañía a 8 minutos o menos de la construcción i, 0 si no.
- z_1: Porcentaje de construcciones que son cubiertas dentro de 10 minutos sobre el 85 %.
- z_2: Porcentaje de llamadas que son correctamente atendidas (dentro de 8 minutos) sobre el 90 %.
  (0.5 puntos cada variable)

Función objetivo y restricciones:

- (1): Función objetivo que maximiza el beneficio social neto total. (1 puntos)
- (2): Cada construcción se asignada a exactamente una compañía de bomberos. (0.5 puntos)
- (3): Cantidad de compañías a localizar. (0.5 puntos)
- (4): Una construcción solo puede ser asignada a un lugar donde se encuentre una compañía localizada. (0.5 puntos)
- (5): Cada construcción es asignada a la compañía más cercana (o de menor tiempo). (2 puntos)
- (6): Una construcción puede ser cubierta siempre y cuando exista una compañía a 10 minutos o menos. (0.5 puntos)
- (7): Una llamada puede ser correctamente atendida siempre y cuando exista una compañía a 8 minutos o menos. (0.5 puntos)
- (8): Se debe cubrir al menos el 85 % de las construcciones. (0.5 puntos)
- (9): Se debe atender correctamente al menos el 90 % de las llamadas. (0.5 puntos)
- (10)-(13): Indican la naturaleza de las variables. (0.5 puntos)

(b) **(3 puntos)** Para la validez del modelo (1)-(13), es necesario que se cumpla el supuesto de que para cada construcción $i \in I$, $t_{ij} \neq t_{ik}, \forall j, k \in J : j \neq k$. Es decir, que si existe una compañía localizada en j y otra en k, habría que evitar el caso $t_{ij} = t_{ik}$. ¿Cuál sería el problema de que existan empates en estos tiempos? Puede apoyarse con un ejemplo si quiere.

Solución:
Podría eliminar soluciones factibles debido a la restricciones (2) y (5). A modo de ejemplo, imaginemos que se localizan las compañías j y k tal que, para una construcción i, se tiene que $t_{ij} = t_{ik}$, y son las de menor tiempo de demora entre todas las compañías localizadas. Si este es el caso, se tiene que por la restricción (5), $x_{ij} \geq 1$ y $x_{ik} \geq 1$. Lo cuál sería infactible por la restricción (2). Por lo que no se permite que existan compañías localizadas en j y k al mismo tiempo.

(c) **(6 puntos)** Suponga que se adquieren m (con $m \leq n$) vehículos de rescate especiales, los cuales pueden ser asignados a las compañías de bomberos. Estos son más rápidos que los vehículos tradicionales y demoran un tiempo t^e_{ij} en trasladarse desde la compañía j a la construcción i. Se pide que se cumpla al menos uno de los siguientes requerimientos.

- ◇ Requerimiento 1: Al menos el 70 % de las construcciones deben ser cubiertas por algún vehículo de rescate especial en menos de 6 minutos.
- ◇ Requerimiento 2: Al menos el 60 % de las construcciones deben ser cubiertas por algún vehículo de rescate especial en menos de 5 minutos.

Actualice el modelo de optimización.

Solución:
Se definen las siguientes variables binarias:

- ◇ y^r_j: 1 si se asigna un vehículo de rescate especial en j, 0 si no.
- ◇ u^1_i: 1 si la construcción i es cubierta por algún vehículo de rescate en menos de 6 minutos, 0 si no.
- ◇ u^2_i: 1 si la construcción i es cubierta por algún vehículo de rescate en menos de 5 minutos, 0 si no.
- ◇ r: 1 si el requerimiento 1 es forzado a cumplirse, 0 si el requerimiento 2 es forzado a cumplirse.

Sea $M \gg 0$ un número grande, se agregan las siguientes restricciones:

$$
\begin{array}{ll}
\sum_{j \in J} y^r_j = m & \\
y^r_j \leq y_j & \forall j \in K \\
u^1_i \leq \sum_{j \in J : t^e_{ij} < 6} y^r_j & \forall i \in I \\
u^2_i \leq \sum_{j \in J : t^e_{ij} < 5} y^r_j & \forall i \in I \\
\frac{\sum_{i \in I} u^1_i}{|I|} \geq 0.7 - M(1-r) & \\
\frac{\sum_{i \in I} u^2_i}{|I|} \geq 0.6 - Mr & \\
u^1_i, u^2_i \in \{0,1\} & \forall i \in I \\
y^r_j \in \{0,1\} & \forall j \in J \\
r \in \{0,1\} &
\end{array}
$$

Pregunta 3 (20 puntos)

(i) **(3 puntos)** Explique por qué en la definición de función convexa se requiere que el dominio sea un conjunto convexo.

Solución: Para que $f(\lambda x + (1-\lambda)y)$ esté bien definido, es necesario que $\lambda x + (1-\lambda)y$ pertenezca a D, lo cual se cumple si D es convexo.

(ii) **(5 puntos)** Sea A una matriz de $m \times n$. Para cada $b \in \mathbb{R}^m$, sea $P_b = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \geq b\}$. Demuestre que el conjunto $B = \{b \in \mathbb{R}^m : \ P_b \neq \emptyset\}$ es convexo.

Solución: Dados $b^1, b^2 \in B$ y $\lambda \in (0,1)$, sea $\bar{b} = \lambda b^1 + (1-\lambda)b^2$. Como $b^1 \in B$, existe $x^1 \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax^1 \geq b^1$. Como $b^2 \in B$, existe $x^2 \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax^2 \geq b^2$. Tomando $\bar{x} = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$, tenemos que $\bar{x}$ satisface $A\bar{x} = A\left(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2\right) = \lambda Ax^1 + (1-\lambda)Ax^2 \geq \lambda b^1 + (1-\lambda)b^2 = \bar{b}$, es decir, $\bar{x} \in P_{\bar{b}}$. Luego, $P_{\bar{b}} \neq \emptyset$ y por lo tanto $\bar{b} \in B$.

(iii) **(12 puntos)** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \ln(e^x + e^y)$.

1) **(5 puntos)** Demuestre que f es convexa sobre $\mathbb{R}^2$.
Solución: Tenemos

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{e^x + e^y} \begin{pmatrix} e^x \\ e^y \end{pmatrix},$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(e^x+e^y)^2} e^{x+y} & \frac{-1}{(e^x+e^y)^2} e^{x+y} \\ \frac{-1}{(e^x+e^y)^2} e^{x+y} & \frac{1}{(e^x+e^y)^2} e^{x+y} \end{bmatrix} = \frac{1}{(e^x+e^y)^2} e^{x+y} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como

$$(d_1, d_2) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = d_1^2 - 2d_1 d_2 + d_2^2 = (d_1 - d_2)^2 \geq 0$$

para todo $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$, concluimos que $\nabla^2 f(x, y)$ es sdp para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y por lo tanto f es convexa sobre $\mathbb{R}^2$.

2) **(4 puntos)** Demuestre que f es coercitiva sobre $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y \geq 1\}$.
Solución: Si $(x_k, y_k) \in D$ es tal que $\|(x_k, y_k)\| \to \infty$, entonces $|x_k| \to \infty$ o $|y_k| \to \infty$. Sin pérdida de generalidad, supongamos el primer caso. Como $y_k \geq 1 - x_k$, tenemos $f(x_k, y_k) \geq \ln(e^x + e^{1-x_k}) \geq \ln(e^x + e^{-x}) \geq \ln(e^{|x_k|}) = |x_k| \to \infty$, donde hemos usado que f es creciente por ser composición de funciones crecientes.

3) **(3 puntos)** Determine si f alcanza su mínimo sobre D.
Solución: Tenemos que f es continua sobre D por ser composición de funciones continuas. Además, D es cerrado por estar definido por una restricción lineal no estricta. Como $(1, 1) \in D$, D es no vacío. Finalmente, como f es coercitiva sobre D, por el teorema de Bolzano-Weierstrass extendido, obtenemos lo deseado.