ICS1113 OPTIMIZACION, 2011-1.
EXAMEN.

Instrucciones: La prueba tiene 4 partes que totalizan 100 puntos. Responda en el cuadernillo que se le ha entregado de tal forma de que las partes queden en hojas separadas. Coloque su **nombre, sección y número de lista (no número de alumno)** en cada una de las hojas de los cuadernillos. **Si no se atiene a estas instrucciones se le descontarán 5 puntos del puntaje de la prueba, sin derecho alguno a reclamo posterior.** No usar calculadoras programables ni teléfonos celulares. Dispone de 150 minutos.

Parte 1 (30pts).

Considere el siguiente problema de optimización:

$$Min: (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 7)^2 + x_2$$
$$s.a.$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) (10pts) Plantee las condiciones de KKT para este problema.

Necesitamos determinar el Lagrangiano, que es

$$L = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 7)^2 + x_2 + \mu(x_1 + 2x_2 - 4)$$

Las condiciones son entonces:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \mu \geq 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} \geq 0 \qquad 2(x_1 - 1) + \mu \geq 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} x_1 = 0 \qquad 2x_1(x_1 - 1) + \mu x_1 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} \geq 0 \qquad 2(x_2 - 7) + 1 + 2\mu \geq 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} x_2 = 0 \qquad 2x_2(x_2 - 7) + x_2 + 2\mu x_2 = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} \leq 0 \qquad x_1 + 2x_2 - 4 \leq 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} \mu = 0 \qquad \mu(x_1 + 2x_2 - 4) = 0 \quad (7)$$

b) (10pts) ¿Son suficientes para detectar mínimos locales en cada punto obtenido? Justifique.

Las condiciones suficientes para detectar mínimos locales implican analizar la matriz Hessiana asociado al problema, que en este caso es:

$$H[f(X)] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Lo que significa que es definida positiva. Esta condición, sumada a las condiciones de KKT, permite determinar que los puntos obtenidos serán mínimos locales estrictos.

NOTA: NO es necesario que pongan que son puntos mínimos locales estrictos, pero ayuda a clarificar la importancia de que la matriz es definida positiva.

c) (10pts) Determine el punto óptimo global utilizando las condiciones de KKT y argumentos acerca de la solución global.

Si consideramos $x_1 = 0$, implica que las condiciones quedan como

$$-2+\mu \geq 0 \quad \rightarrow \mu \geq 2$$
$$2(x_2-7)+1+2\mu \geq 0$$
$$x_2(2(x_2-7)+1+2\mu=0$$
$$2x_2-4 \geq 0 \rightarrow x_2 \leq 2$$
$$\mu(2x_2-4)=0$$

Si $\mu = 0 \rightarrow -2 \geq 0$ *lo cual no es posible, por lo que se descarta esta opción.*
Si $\mu \neq 0 \rightarrow x_2 = 2 \rightarrow \ \mu = \frac{9}{2}$

Lo cual es consistente con todo el resto de las condiciones. Hemos encontrado un mínimo local.

Basta terminar acá el análisis, pues el problema es estrictamente convexo. Luego sólo puede haber un punto crítico en todo el dominio y el mínimo local es global.

A través del análisis de las condiciones KKT se determina que la única solución candidata al óptimo es $x_1 = 0; x_2 = 2; \mu = \frac{9}{2}$. Como el problema es estrictamente convexo en todo el dominio y este no es vacío, entonces existe solución óptima única y se determina que este punto es un mínimo global.

Parte 2 (30pts).

a) (15pts) Dado el siguiente problema:

$$\begin{aligned} P) \quad Min \quad & 2x_1+3x_2+5x_3+2x_4+3x_5 \\ s.a. \quad & x_1+x_2+2x_3+x_4+3x_5 \geq 4 \\ & 2x_1-2x_2+3x_3+x_4+x_5 \geq 3 \\ & x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

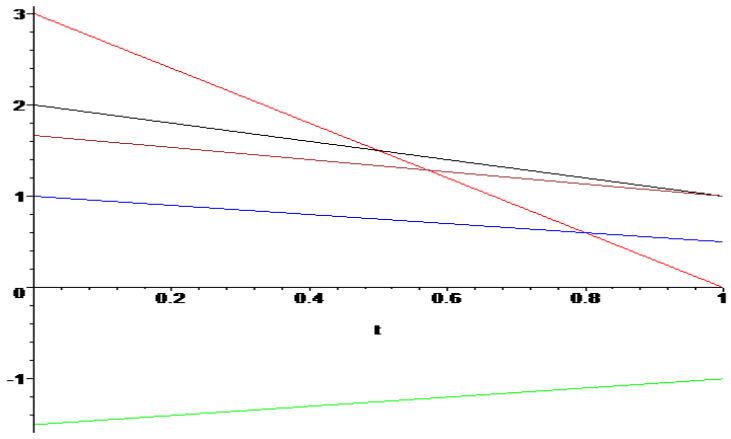
Encuentre la solución óptima y su valor como usted estime conveniente.

NOTA: LA FORMA MÁS FÁCIL DE RESOLVER ESTE PROBLEMA ES CON DUALIDAD, SIN EMBARGO SE ACEPTA CUALQUIER FORMA DE RESOLVERLO QUE ESTÉ JUSTIFICADA.

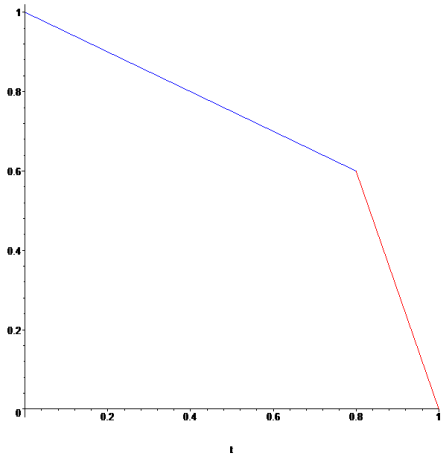
El problema de optimización dual del problema entregado es:

$$Max \quad 4y_1+3y_2$$
$$sa\ y_1+2y_2 \leq 2 \ \ (1)$$
$$y_1-2y_2 \leq 3 \ \ (2)$$
$$2y_1+3y_2 \leq 5 \ \ (3)$$
$$y_1+y_2 \leq 2 \ \ (4)$$
$$3y_1+y_2 \leq 3 \ \ (5)$$
$$y_1,y_2 \geq 0$$

Graficando el dominio del problema tenemos lo siguiente:



Acercando el dominio factible:



Donde la recta azul corresponde a la restricción (1) y la recta roja a la restricción (5). De aquí es fácil ver que la solución óptima se encuentra en (4/5 , 3/5) y el valor óptimo es 5 que es el mismo que el del problema primal. **Esto implica que ambas restricciones primales están activas.**

Las restricciones (1) y (5) del problema dual están activas, por lo que sus holguras son 0, el resto de las restricciones tiene holguras distintas a cero. **Esto implica que en el problema primal x_1 y x_5 son variables básicas y $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ no básicas.**

Realizando un sistema de ecuaciones con las restricciones duales y considerando $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ es fácil ver que el resto de los valores de la solución primal es:

$$x_1 = 1$$
$$x_5 = 1$$

Y el valor óptimo es 5.

b) (15 ptos) Considere el siguiente problema:

$$P) \quad Min \quad x_1 + x_2$$
$$s.a. \quad 4x_1 + 3x_2 \geq 24$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Cuyo TABLEAU óptimo es:

x_1	X_2	e_1	e_2	L. D.
1	0	-2/5	3/5	18/5
0	1	1/5	-4/5	16/5
0	0	1/5	1/5	-34/5

a) (2pts) Explicite la solución y el valor óptimo. ¿Cuál es la base?

Del tableau óptimo es fácil ver que la solución óptima es:

$$x_1 = \frac{18}{5}$$
$$x_2 = \frac{16}{5}$$

Y el valor óptimo es 34/5. La base está dada por x_1 y x_2

b) (3pts) ¿Cuánto cambiará el valor óptimo si se aumenta a 12 el lado derecho de la segunda restricción?

En el óptimo, el costo reducido del segundo exceso es de 1/5. Con ello el aumento de la función objetivo sería de 2*1/5 = 2/5.

Alternativamente se puede analizar el nuevo valor óptimo (La base se puede invertir ó obtener directamende del Tableau en las columnas de los excesos):

$$V = c_b^T * B^{-1} * b = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{36}{5}$$

Vemos que el valor optimo aumento en 2/5.

d) (5pts) ¿Cuál es el rango de variación posible para el costo asociado a x_1, actualmente en 1, para que la base óptima siga siendo la misma? ¿Y para que la solución óptima sea la misma?

Analizamos los costos reducidos de las variables no básicas:

$$r = c_d^T - c_b^T * B^{-1} * D = [0 \quad 0] - [c_1 \quad 1] \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} = \left[\frac{2}{5}c_1 - \frac{1}{5} \quad -\frac{3}{5}c_1 + \frac{4}{5}\right]$$

Para que la base siga siendo la misma los costos reducidos deben ser mayores ó iguales a 0:

$$\frac{2}{5}c_1 - \frac{1}{5} \geq 0 \rightarrow c_1 \geq \frac{1}{2}$$
$$-\frac{3}{5}c_1 + \frac{4}{5} \geq 0 \rightarrow c_1 \leq \frac{4}{3}$$

Finalmente vemos que para que la base (y la solución óptima) siga siendo la misma el costo asociado a x_1 debe estar entre:

$$\frac{1}{2} \leq c_1 \leq \frac{4}{3}$$

Hay que notar que si el costo cambia en cualquier valor, el valor óptimo va a cambiar pues es un costo básico.

e) (5pts) Considere ahora el siguiente problema a continuación. ¿Cuál es la solución óptima? Justifique.

$$\begin{aligned} P_2) \quad & Min \quad x_1 + x_2 + x_3 \\ & s.a. \quad 4x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 24 \\ & \quad\quad x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10 \\ & \quad\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Analizamos el costo reducido de la nueva variable:

$$r = c_r^T - c_b^T * B^{-1} * v = [1] - [1 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}$$

Como el costo reducido de la nueva variable es mayor que 0 no conviene incorporar x_3 a la base, por lo tanto la solución sigue siendo la misma de a).

Parte 3 (20 pts)

Comente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique:

a. En un problema cuadrático el método del gradiente converge en una sola iteración.

FALSO. Ya que en un problema cuadrático, –Grad(F) no necesariamente apunta hacia el punto mínimo local, por lo que no necesariamente converge a este en una sola iteración.
NOTA: Un contraejemplo es válido.

b. Las condiciones KKT son capaces de encontrar a todos los puntos que son posibles candidatos a solución óptima.

FALSO. Las condiciones de KKT no son capaces de encontrar puntos singulares.

c. En el método del gradiente la velocidad de convergencia depende exclusivamente del punto de partida.

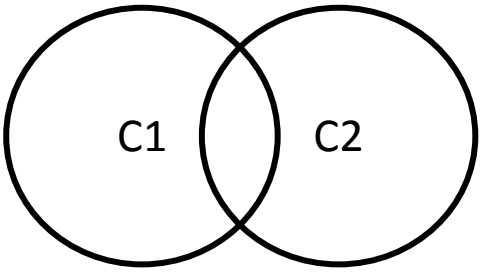
FALSO. La velocidad de convergencia depende en fuertemente del punto de partida, pero en la gran mayoría de los casos también hay otros factores, como por ejemplo, la forma de las curvas de nivel.

d. Si un mínimo local es global, entonces el problema es convexo.

FALSO. La convexidad implica que un mínimo local es global, pero no al revés.
NOTA: Un contraejemplo es válido.

e. La unión de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

FALSO. La intersección de conjuntos convexos es convexa, no la unión de ellos. Basta con ver la siguiente figura en donde claramente la unión no es convexa:



NOTA: Un contraejemplo es válido

Parte 4 (20 pts)

a) **(5 pts)** Utilizando la Matriz Hessiana, analice la concavidad ó convexidad de la siguiente función:

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1 - x_2}$$

La matriz Hessiana es:

$$\begin{bmatrix} e^{x_1-x_2} & -e^{x_1-x_2} \\ -e^{x_1-x_2} & e^{x_1-x_2} \end{bmatrix}$$

Obtenemos que los determinantes de las submatrices son:

$$\Delta_1 = e^{x_1-x_2} \geq 0$$
$$\Delta_2 = 0$$

Luego la matriz Hessiana es semidefinida positiva por lo que f(x) es convexa en todos los reales.

b) **(5 pts)** Obtenga las condiciones necesarias de primer orden para el siguiente problema unidimensional restricto:

$$Max: f(x) \quad s.a. \quad g(x) \geq 0$$

Planteamos el problema equivalente:

$$Min - f(x)$$
$$s.a. - g(x) \leq 0$$

Luego las condiciones necesarias de primer orden son:

$$L = -f(x) + \lambda(-g(x))$$
$$\frac{dL}{dx} = -\frac{df}{dx} - \lambda\frac{dg}{dx} = 0$$
$$-\frac{dL}{d\lambda}g(x) \leq 0$$
$$\lambda\frac{dL}{d\lambda} = -g(x)\lambda = 0$$
$$\lambda \geq 0$$

c) **(5 pts)** Considere ahora un Problema de Flujo a Costo Mínimo sobre un grafo dirigido. ¿Qué condición deben cumplir los coeficientes de costos, C_{ij}, para que el problema pueda ser no acotado?

Se debe dar que exista un circuito dirigido de arcos donde el costo total de pasar por el sea negativo. De esta manera, podría pasar infinito flujo por él y se minimizarían infinitamente los costos.

d) (5pts) Demuestre que el siguiente problema admite solución:

$$\begin{aligned} Min \quad & x^2 + y^2 - 2x \\ s.a. \quad & y \leq 3 \\ & |xy| \leq 4 \end{aligned}$$

La función corresponde a la suma de una función cuadrática y una lineal que siendo factorizada corresponde a curvas de nivel circunferenciales. Es continua sobre todos los reales y en particular sobre el dominio.

El dominio es cerrado ya que las restricciones incluyen la igualdad.

El punto (0,0) pertenece al dominio, luego este es no vacio.

Se tiene además que:

$$\lim_{|x,y|\to\infty} x^2 + y^2 - 2x = (x-1)^2 + y^2 - 1 = \infty$$

→f(x) no se minimiza infinitamente,

Luego por la extensión del teorema Bolzano Wairtrass podemos asegurar que el problema admite al menos una solución optima.