PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2023 - 2
Profesores: M. Castro - M. Klapp - G. Perez - E. Salgado

Interrogación 1
Duración: 120 minutos.

Instrucciones

- **Deben rellenar sus datos en cada hoja de su prueba**.
- Deben responder cada **pregunta en hojas separadas**.
- La evaluación es **individual**.
- Está **prohibido escribir respuestas después de finalizar el tiempo de desarrollo**. Se penalizará con puntaje de la prueba a los estudiantes que no cumplan con esta regla.
- Al finalizar, cada estudiante debe **escanear su prueba y cargarla** en formato PDF a CANVAS en el buzón "Interrogación 1 ICS1113". El buzón estará abierto desde el inicio de la evaluación hasta 10 minutos después determinar el tiempo de desarrollo de la prueba.
- **Debe entregar la prueba física** antes de irse: esta es la versión que será corregida. El PDF subido a CANVAS es una copia de seguridad.
- Está **prohibido el uso de dispositivos electrónicos** durante el desarrollo de la prueba. Solo pueden ocupar un dispositivo electrónico al momento de escanear y subir su prueba a CANVAS.
- Si un estudiante termina antes de finalizar el tiempo de desarrollo, debe avisar a algún miembro del equipo docente para escanear y subir su prueba a CANVAS en su puesto.
- Favor acercarse a un miembro del equipo docente en caso de cualquier inconveniente técnico durante el escaneo de la prueba.

Pregunta 1 (20 puntos)

Suponga que se le solicita planificar la plantación de un predio agrícola con $A > 0$ hectáreas disponibles. Durante el periodo de siembra ($t = 0$), usted dispone de I diferentes tipos de plantas a sembrar. Su decisión es escoger qué fracción de las A hectáreas destinará a cada tipo de planta. Usted puede libremente escoger cuanta superficie dedicar a cada tipo. Sin embargo, se le pide que la superficie sembrada de la planta que posea más área dedicada no supere en más del doble a la superficie de la planta que posee menos área dedicada.

Luego del periodo de siembra, usted debe gestionar la cosecha y el riego del predio durante un horizonte de T días. Cada hectárea sembrada es cosechada e inmediatamente vendida cuando usted lo decida. No se puede volver a sembrar un terreno cosechado. Si cosecha una hectárea de la planta $i \in \{1, ..., I\}$ en el día $t \in \{1, ..., T\}$, entonces generará g_{it} kilogramos de producto final. Cada kilogramo cosechado del producto i en el día t genera $\$u_{it}$ de utilidad. Hasta el día anterior a su cosecha, cada hectárea de superficie sembrada de la planta $i \in \{1, ..., I\}$ en el día $t \in \{1, ..., T\}$ requiere exactamente de r_{it}[litros] de agua de riego. No se debe regar un terreno desde el día en que es cosechado.

El agua disponible para riego la trae un estero que atraviesa el predio y que brinda un caudal $Q_t \left[\frac{\text{litros}}{\text{día}}\right]$ en el día $t \in \{1, ..., T\}$. El costo de extraer un litro de agua del estero en el día t es $\$h_t$. En cada día, el agua extraída puede utilizarse para regar o ser almacenada en un estanque de V[litros] para riego futuro.

(a) (15 puntos) Formule un modelo de programación lineal con variables continuas que permita planificar la plantación, riego y cosecha del predio que maximice la utilidad total generada en el horizonte de T días considerando el costo de extraer agua.

Solución:

◇ Variables de decisión (5 puntos):

- x_i: hectáreas de terreno a plantar de $i \in \{1, ..., I\}$.
- y_t: litros de agua a almacenar al final del día $t \in \{1, ..., T\}$.
- z_t: litros de agua extraída el día $t \in \{1, ..., T\}$.
- w_{it}: hectáreas de terreno cosechados de $i \in \{1, ..., I\}$ en el día $t \in \{1, ..., T\}$.
- v_{it}: hectáreas de terreno de $i \in \{1, ..., I\}$ que deben ser regadas en el día $t \in \{1, ..., T\}$.

◇ Objetivo (2 puntos):

$$\max_{x,y,z,w,v} \quad \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{I} u_{it} \cdot g_{it} \cdot w_{it} - \sum_{t=1}^{T} h_t \cdot z_t \tag{1}$$

◇ Restricciones (8 puntos):

$$\sum_{i=1}^{I} x_i \leq A \tag{2}$$

$$2 \cdot x_i \geq x_j \qquad \forall i, j \in \{1, ..., I\} : i \neq j \tag{3}$$

$$v_{it} = x_i - \sum_{t'=1}^{t} w_{it'} \qquad \forall i \in \{1, ..., I\}, \quad \forall t \in \{1, ..., T\} \tag{4}$$

$$y_t = \mathbf{1}_{t>1} \cdot y_{t-1} + z_t - \sum_{i=1}^{I} r_{it} \cdot v_{it} \qquad \forall t \in \{1, ..., T\} \tag{5}$$

$$y_t \leq V \qquad \forall t \in \{1, ..., T\} \tag{6}$$

$$z_t \leq Q_t \qquad \forall t \in \{1, ..., T\} \tag{7}$$

$$x_i \geq \sum_{t=1}^{T} w_{it} \qquad \forall i \in \{1, ..., I\} \tag{8}$$

$$w_{it} \geq 0 \qquad \forall i \in \{1, ..., I\}, \quad \forall t \in \{1, ..., T\} \tag{9}$$

$$y_t \geq 0 \qquad \forall t \in \{1, ..., T\} \tag{10}$$

$$z_t \geq 0 \qquad \forall t \in \{1, ..., T\} \tag{11}$$

(2) : Limitación del terreno.

(3) : Terreno de mayor tamaño no supera en más del doble al de menor tamaño.

(4) : Calcular cantidad de hectáreas que se deben regar.

(5) : Inventario de agua.

(6) : Capacidad de estanque.

(7) : Capacidad máxima de extracción.

(8) : Cosecha total no supera siembra.

Observación de corrección: La variable v_{it} no es necesaria ya que se puede reemplazar la expresión de (4) en la restricción (5). Cada restricción vale 1 punto excepto las de naturaleza de variables que, en conjunto, valen 1 punto y la de inventario que vale 2 puntos. Las restricciones 6 y 7 valen medio punto cada una. En cualquier caso, la asignación de puntaje parcial queda a criterio del corrector. Por otra parte, se asume que el estanque parte vacío y que no es necesario vaciarlo al final del horizonte de tiempo. Si se modeló que partiera con alguna cantidad de agua o que al último periodo quede vacío también se considera correcto. Si agregaron restricciones de no negatividad adicionales (no eran necesarias para las variables v_{it} y x_{it} dado el resto de las restricciones) no hay descuento (está bien también).

(b) (5 puntos) Pruebe que el modelo anterior admite al menos una solución óptima.

Solución: Sí, el problema admite solución óptima. Para demostrarlo hacemos uso del teorema de Bolzano-Weierstrass.

- ◇ La función objetivo es continua.
- ◇ El origen es factible (no sembrar, no extraer agua y no cosechar).
- ◇ El dominio es cerrado (está definido solo por desigualdades no estrictas y funciones continuas)
- ◇ El dominio es acotado: Todas las variables son no negativas. La primera restricción acota la siembra a A, la cosecha está acotada por la siembra, el almacenamiento de agua por la capacidad de estanque y la extracción por el caudal.

Debe admitir solución al cumplirse las condiciones descritas anteriormente.

Pregunta 2 (20 puntos)

Un supermercado funciona en cada uno de los T días hábiles a lo largo de un mes. En cada día $t \in \mathcal{T} = \{1, ..., T\}$, el gerente de recursos humanos debe asignarle a cada trabajador y trabajadora disponible una función en la tienda. Estas funciones son, por ejemplo, cajero, reponedor de góndolas, limpieza de pasillos, carnicería, panadería, fiambrería, pescadería y están definidas en el conjunto $\mathcal{S} = \{1, ..., m\}$. Asuma que $m \geq 4$ y que $T \geq 20$. Su objetivo es planificar una asignación diaria de funciones a personas a mínimo costo salarial. El conjunto de trabajadores y trabajadoras disponibles se define por $\mathcal{E} = \{1, ..., n\}$. Cada persona $e \in \mathcal{E}$ cuenta con habilidades que le permiten o no trabajar cada posible función. En particular, el parámetro $h_{es} \in \{0, 1\}$ indica si la persona $e \in \mathcal{E}$ tiene las habilidades para trabajar en la función $s \in \mathcal{S}$. Asuma que las primeras tres funciones no requieren de habilidad especial, es decir, $h_{es} = 1$ para todo $e \in \mathcal{E}$ y $s \in \{1, 2, 3\}$. Cada persona puede trabajar en a lo más una función por día y no puede trabajar en la misma función por más de tres días consecutivos. Por ejemplo, la persona 1 puede trabajar por sus primeros 3 días seguidos en la panadería, pero en el cuarto día debe cambiar de función. También, asuma que el supermercado posee un requerimiento mínimo de $b_{ts} \geq 0$ personas a trabajar cada día $t \in \mathcal{T}$ en la función $s \in \mathcal{S}$. Finalmente, asignar a la persona $e \in \mathcal{E}$ a la función $s \in \mathcal{S}$ en el día $t \in \mathcal{T}$ cuesta $\$c_{ets} > 0$ por conceptos de salario.

(a) (12 puntos) Formule un modelo de programación lineal entera mixta que represente a este problema. Defina y explique claramente las variables (continuas y/o discretas), restricciones y función objetivo de su modelo. También, defina claramente cualquier notación adicional ocupada.

Solución:

- Variables (4 puntos):
  - $x_{ets} \in \{0, 1\}$: binaria, indica si asigna a $e \in \mathcal{E}$ en función $s \in \mathcal{S}$ en día $t \in \mathcal{T}$

◇ Modelo (8 puntos):

$$\min_{x} \sum_{e\in\mathcal{E}}\sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{s\in\mathcal{S}} c_{ets}\cdot x_{ets}$$

$$\text{s.a.} \quad x_{ets} \le h_{es} \qquad \forall e\in\mathcal{E}, t\in\mathcal{T}, s\in\mathcal{S} \qquad (12a)$$

$$\sum_{s\in\mathcal{S}} x_{ets} \le 1 \qquad \forall e\in\mathcal{E}, t\in\mathcal{T} \qquad (12b)$$

$$\sum_{e\in\mathcal{E}} x_{ets} \ge b_{ts} \qquad \forall t\in\mathcal{T}, s\in\mathcal{S} \qquad (12c)$$

$$\sum_{t=t'}^{t'+3} x_{ets} \le 3 \qquad \forall e\in\mathcal{E}, t'\in\{1,...,T-3\}, s\in\mathcal{S} \qquad (12d)$$

$$x_{ets} \in \{0,1\} \qquad \forall e\in\mathcal{E}, t\in\mathcal{T}, s\in\mathcal{S} \qquad (12e)$$

La función objetivo representa el costo de asignación que se desea minimizar. La restricción (12a) fuerza a que un empleado no pueda ser asignado a una función de la que no tiene habilidad. La restricción (12b) impone que cada empleado puede ser asignado a lo más a una función por día. La restricción (12c) modela el requerimiento mínimo de empleados por función y día. La restricción (12d) modela que un empleado no trabaje más de 3 días consecutivos en la misma función. Finalmente, (12e) impone naturaleza binaria.

(b) (4 puntos) Suponga, adicional a la parte (a), que cada persona en $e \in \mathcal{E}$ puede trabajar a lo sumo D días en el mes en las condiciones anteriormente descritas, donde $1 < D < T$. Sin embargo, es posible pagarle a la persona $e \in \mathcal{E}$ un salario extra $\$f_e$ por día trabajado sobre el máximo de D días. Por ejemplo, si la persona 1 trabaja $D+2$ días, entonces recibe el pago normal por días trabajado más $\$2 \cdot f_1$. Modifique el modelo en la parte (a) e incorpore esta nueva consideración. No necesita redefinir todo el modelo. Sólo indique qué cambiaría, quitaría y/o agregaría al modelo anterior.

Solución:

Variables adicionales:

◇ y_e = número de días por sobre D que trabaja la persona $e \in \mathcal{E}$.

Modelo modificado:

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{e\in\mathcal{E}}\sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{s\in\mathcal{S}} c_{ets}\cdot x_{ets} + \sum_{e\in\mathcal{E}} f_e y_e \\
\text{s.a.} \quad & (12a) - (12e) \\
& \sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{s\in\mathcal{S}} x_{ets} \leq D + y_e && \forall e \in \mathcal{E} && (13a) \\
& y_e \in \{1, ..., T - D\} && \forall e \in \mathcal{E} && (13b)
\end{aligned}$$

La nueva función objetivo incluye la paga extra por cada día adicional sobre D. La restricción (13a) cuenta la cantidad de días trabajados y fuerza a la variable y_e a contar cuantos de ellos están sobre D. Finalmente, (13b) representa la naturaleza de las variables y. También es válido considerar $y_e \in \mathbb{Z}^+$ o $y_e \in \mathbb{R}^+$ para todo $e \in \mathcal{E}$, ya que el modelo fuerza a que sea entera entre 0 y $T - D$.

Observación de corrección: Solo se evalúa las nuevas consideraciones del problema y no hay puntaje/descuento por errores de arrastre en el modelo anterior.

(c) (4 puntos) Suponga, adicional a la parte (b), que si una persona $e \in \mathcal{E}$ es contratada (es decir, trabaja al menos un día al mes), entonces recibe adicionalmente un pago fijo igual a $\$d_e > 0$ adicional a su pago normal por cada día trabajado y por días extra. Por otro lado, toda persona contratada, debe trabajar al menos M días (asuma que $1 \leq M < D < T$). Modifique el modelo en la parte (a) e incorpore esta nueva consideración. No necesita redefinir todo el modelo. Sólo indique qué cambiaría, quitaría y/o agregaría al modelo anterior.

Solución:

Variables adicionales:

- $z_e \in \{0, 1\}$ = indica si el empleado $e \in \mathcal{E}$ está contratado o no.

Modelo modificado:

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{e\in\mathcal{E}}\sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{s\in\mathcal{S}} c_{ets}x_{ets} + \sum_{e\in\mathcal{E}} f_e y_e + \sum_{e\in\mathcal{E}} d_e z_e \\
\text{s.a.} \quad & (12a) - (12e), (13a), (14c) \\
& x_{ets} \leq z_e && \forall e \in \mathcal{E}, t \in \mathcal{T}, s \in \mathcal{S} && (14a) \\
& \sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{s\in\mathcal{S}} x_{ets} \geq M \cdot z_e && \forall e \in \mathcal{E} && (14b) \\
& z_e \in \{0, 1\} && \forall e \in \mathcal{E} && (14c)
\end{aligned}$$

La nueva función objetivo incluye el costo fijo de contratar a un empleado (bono inicial). Se mantienen intactas las restricciones y variables de la parte (a) y (b) del problema. La restricción (14a) activa la variable de contratación de que un empleado trabaja en una función en algún día. La restricción (14b) modela el número mínimo de días a trabajar si este está contratado. Finalmente, la restricción (14c) representa la naturaleza binaria de las variables z.

Observación de corrección: Solo se evalúa las nuevas consideraciones del problema y no hay puntaje/descuento por errores de arrastre en los modelos anteriores. También, se considera bueno si agrega esta nuevas consideraciones al modela en (a) o en (b) ya que el enunciado es un poco confuza al respecto.

Observación de corrección 2: La restricción (14a) es equivalente a imponer para todo $e \in \mathcal{E}$ que

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{s \in \mathcal{S}} x_{ets} \leq T \cdot z_e$$

o imponer que

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} x_{ets} \leq z_e$$

para todo $e \in \mathcal{E}$ y $t \in \mathcal{T}$.

Pregunta 3 (20 puntos)

(a) (10 puntos) Considere el siguiente problema de optimización

$$\left.\begin{array}{lrcll} \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & \prod\limits_{i=1}^{n} e^{-c_i\cdot|x_i|} & & & (1) \\ & \max\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}}\{x_i^2\} & \leq & 2 & (2) \\ & \min\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}}\{\sqrt{x_i}\} & \geq & 1 & (3) \end{array}\right\} \texttt{(P)},$$

donde $c \in \mathbb{R}^n$ es un vector fijo y no-negativo.

(i) (4 puntos) Encuentre un modelo lineal de **minimización** equivalente al problema `(P)`.

Solución: Por propiedad de la exponencial, el modelo es equivalente a:

$$\left.\begin{array}{lrcl} \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\cdot|x_i|} & & \\ & \max\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}}\{x_i^2\} & \leq & 2 \\ & \min\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}}\{\sqrt{x_i}\} & \geq & 1 \end{array}\right\} \texttt{(P')}$$

Por composición de funciones con $\ln(\cdot)$ se tiene el problema equivalente

$$\left.\begin{array}{lrcl} \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & -\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\cdot|x_i| & & \\ & \max\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}}\{x_i^2\} & \leq & 2 \\ & \min\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}}\{\sqrt{x_i}\} & \geq & 1 \end{array}\right\} \texttt{(P'')}$$

Por equivalencia *max-min* se tiene que `(P')` es equivalente a

$$\left.\begin{array}{lrcl} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\cdot|x_i| & & \\ & \max\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}}\{x_i^2\} & \leq & 2 \\ & \min\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}}\{\sqrt{x_i}\} & \geq & 1 \end{array}\right\} \texttt{(P'')}$$

Por linealización de máximos y mínimos:

$$\left.\begin{array}{rlrcl} \min\limits_{x,z\in\mathbb{R}^n} & \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \cdot |x_i| & & & \\ (\forall\, i \in \{1,\ldots,n\}) & & x_i^2 & \leq & 2 \\ (\forall\, i \in \{1,\ldots,n\}) & & \sqrt{x_i} & \geq & 1 \end{array}\right\} \texttt{(P'''''')}$$

Solicitar que $\sqrt{x_i} \geq 1$ equivale a imponer $x_i \geq 1$. Luego, podemos ver que las variables son no-negativas y remover valores absolutos en el objetivo:

$$\left.\begin{array}{rlrcl} \min\limits_{x,z\in\mathbb{R}^n} & \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i & & & \\ (\forall\, i \in \{1,\ldots,n\}) & & x_i & \leq & \sqrt{2} \\ (\forall\, i \in \{1,\ldots,n\}) & & x_i & \geq & 1 \end{array}\right\} \texttt{(P'''''''')}$$

Que es un modelo lineal.

(ii) (4 puntos) Muestre que `(P)` admite al menos una solución óptima utilizando un teorema de existencia visto en clase.

Solución:

- ◇ La función objetivo es composición y producto de funciones continuas en $\mathbb{R}^n$ y, por ende, continua.
- ◇ El dominio es compacto (cerrado y acotado) ya que cada variable está entre $[1, \sqrt{2}]$.
- ◇ El dominio es no vacío. Por ejemplo, $x = (1, 1, \ldots, 1)$ es factible.

Por Bolzano-Weierstrass `(P)` el problema admite solución óptima.

(iii) (2 puntos) Deduzca una solución óptima del problema `(P)`. Expliqué en palabras por qué cree que está solución es óptima.

Solución: Claramente $x = (1, 1, \ldots, 1)$ es la solución óptima del problema, pues el problema es separable por componente y el objetivo del problema lineal disminuye al reducir el valor de cada componente al mínimo.

(b) (10 puntos) Para cada una de las siguientes afirmaciones, demuestre que es siempre verdadera o detalle un contraejemplo donde es falsa.

(i) (3 puntos) Sea f y g dos funciones convexas definidas sobre el dominio $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$. Suponga que la función $h : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ es alguna combinación convexa entre f y g. Entonces, h es una función convexa.

Solución: Es cláramente verdadero y se debe probar por definición.

Tome dos funciones convexas f y g sobre un dominio $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$. Se cumple para todo $x, y \in \mathbb{X}$, $\lambda \in [0, 1)$, y $x' := \lambda \cdot x + (1 - \lambda)y$ que:

$$f(x') \leq \lambda \cdot f(x) + (1 - \lambda) \cdot f(y)$$

$$g(x') \leq \lambda \cdot g(x) + (1-\lambda) \cdot g(y)$$

Luego pondere la primera función por $\mu \in [0,1)$ y la segunda por $1-\mu$ y sume, el resultado es una función convexa $h(x) = \mu f(x) + (1-\mu)g(x)$ que cumple:

$$h(x') \leq \lambda \cdot h(x) + (1-\lambda) \cdot h(y)$$

(ii) (3 puntos) El conjunto de soluciones óptimas de un problema de optimización convexo es convexo.

Solución: Es verdadera.

Alternativa de prueba 1: Sea f la función objetivo convexa sobre un dominio $\mathbb{X}$ convexo. Esto implica que el conjunto epígrafe $E_f = \{x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{R} : f(x) \leq y\}$ es convexo. Sea v^* el valor óptimo del problema. Claramente, el conjunto de soluciones óptimas $\mathbb{X}^* := \{x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{R} : f(x) \leq v^*\}$ es convexo, pues intersecta a E_f con el conjunto convexo $\{x \in \mathbb{X}, y = v^*\}$ (y la intersección de convexos es convexa).

Alternativa de prueba 2: Sea $\mathbb{X}^*$ el conjunto de soluciones óptimas de un problema de optimización convexo con función objetivo convexa f.

- ◇ Si el problema no admite solución óptima se tiene $\mathbb{X}^* = \emptyset$ que es convexo.
- ◇ Si el problema tiene solución óptima única $|\mathbb{X}^*| = 1$, entonces $\mathbb{X}^*$ es trivialmente convexo.
- ◇ Si $|\mathbb{X}^*| \geq 2$, sea v^* el valor óptimo y tome dos puntos distintos $x, y \in \mathbb{X}^*$. Para $\lambda \in (0,1)$ se tiene

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \\ &= \lambda v^* + (1-\lambda) v^* \\ &= v^* \end{aligned}$$

Como v^* es el valor óptimo se tiene que $f(\lambda x + (1-\lambda)y) = v^*$ y, por ende $\lambda x + (1-\lambda)y \in X^*$ (es decir, X^* es convexo).

(iii) (4 puntos) Si f es una función convexa definida sobre $x \in \mathbb{R}$ y, además, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, entonces se cumple que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Solución:

Es verdadera.

Como f es convexa, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y)$$

En particular, si $y = -x$ se tiene

$$f(0) \leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y)$$

Claramente, cuando $x \to -\infty$ se debe cumplir que $y \to \infty$. Luego:

$$\lim_{y \to \infty} f(y) \geq 2 \cdot \left(f(0) - \frac{1}{2} \lim_{x \to -\infty} f(x) \right) = \infty.$$