PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2012
Profesores: J. Vera, C. Prieto, M. Klapp
J.C. Muñoz, A. Cataldo

Interrogación 2

Duración: 3 horas.

Se debe contestar cada pregunta en cuadernillos separados, y en cada uno de ellos debe colocar su nombre y número de lista asignado. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras y de celulares de cualquier tipo.*

Pregunta 1 (20 puntos)

Responda brevemente cada una de las siguientes preguntas:

a) (**4 puntos**) Considere el siguiente problema de mochila:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ s.a. & 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 5 \\ & x_i \in \{0,1\}, i = 1, \ldots, 5 \end{array}$$

La solución óptima de la relajación lineal del problema es $x_1^0 = 0,5$,$x_2^0 = 1$,$x_3^0 = 1$,$x_4^0 = 0$, con valor óptimo igual a $z^0 = 5,5$. Determine, usando la estructura de la restricción del problema, un plano cortante que sea válido para el problema anterior, y que efectivamente corte la solución relajada del problema. Justifique con precisión.

Respuesta: Para esto basta definir un corte basado en los coeficientes de la restricción (un *cover*). Observemos que los coeficientes de x_1, x_2 y x_3 son tales que $2+1+3 > 5$. Luego, debe tenerse que:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

Reemplazando los valores de la solución relajada podemos ver que el corte efectivamente la deja fuera.

b) (**4 puntos**) Demuestre formalmente que el siguiente problema lineal es no acotado:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \min & 2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & & \\ s.a: & x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & \geq & 20 \\ & 5x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & & & \geq & 50 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Respuesta: El problema tiene solución factible, ya que $x_1 = 20$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ y $x_4 = 0$ cumple las restricciones. Dicho esto, hay dos opciones: (1) Tiene solución óptima ó (2) es no acotado. Para que tenga solución óptima, el problema dual debe tener solución óptima también, de lo contrario será no acotado.

El dominio del problema dual es:

$$\begin{array}{lrcrcr} (1) & y_1 & + & 5y_2 & \leq & 2 \\ (2) & 3y_1 & + & 6y_2 & \leq & 3 \\ (3) & 2y_1 & - & y_2 & \leq & -4 \\ (4) & -y_1 & & & \leq & 1 \end{array}$$

De (4) se tiene que $y_1 \geq -1$.
En la restricción (1) implica que $5y_2 \leq 2 - y_1 \leq 3 \mapsto y_2 \leq \frac{3}{5}$.
En la restricción (3) implica que $-y_2 \leq -4 - 2y_1 \leq -2 \mapsto y_2 \geq 2$.
Luego el dominio dual es infactible, lo que necesariamente exige que el problema primal sea no acotado.

c) (**4 puntos**) Considere el siguiente Tableau asociado a una solución básica de un problema de maximización:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
2	4	0	1	0	-2	10
3	e	0	c	1	-5	a
5	-1	1	0	0	f	6
d	-4/5	0	0	b	g	-25

i) ¿Qué condiciones deben necesariamente satisfacer los parámetros a,...,g del Tableau para que corresponda efectivamente al de una solución básica factible de un problema de maximización?

ii) ¿Qué condiciones adicionales deben cumplirse para que el Tableau esté asociado a una solución óptima no única del problema?

iii) ¿Qué condiciones deben satisfacerse para que este Tableau muestre que el problema corresponde a un problema no acotado?

iv) ¿Qué condiciones deben satisfacerse para que el Tableau esté asociado a una solución no óptima y que en la iteración siguiente la solución sea degenerada?

Respuesta:

i) $a \geq 0$, $b = 0$, $c = 0$

ii) $d \leq 0$ y $g \leq 0$, y además $d = 0$ ó $g = 0$

iii) $g > 0$, $f \leq 0$

iv) $d > 0$, $a = \frac{18}{5}$

d) (**4 puntos**) Considere un problema de Programación Lineal de la forma $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$, con 3 restricciones y 5 variables, $x_1, \ldots, x_5$. Suponga que usted arma el Tableau correspondiente para hacer Fase I a este problema para obtener una base inicial factible, y hace a mano todas las iteraciones necesarias hasta llegar al óptimo de la Fase I. Suponga que el valor óptimo del problema de Fase I es > 0, y las variables x_1, x_2 y x_4 tienen valores positivos en el óptimo. Qué puede decir? Justifique con precisión.

Respuesta: Esta situación no se puede dar, por lo tanto usted debe haberse equivocado en los cálculos.

e) (**4 puntos**) En el proceso de resolver un problema de programación lineal entera de maximización (PE) con el algoritmo de Ramificación y Acotamiento (Branch and Bound), se ramificó un problema en dos subproblemas P^- y P^+. Sea $\bar{Z}$ la mejor cota inferior obtenida hasta el momento (incumbente) y Z^-,Z^+ los valores óptimos de los problemas lineales P^- y P^+ respectivamente. Para cada una de las siguientes situaciones diga, justificando, cuáles de los subproblemas no es necesario ramificar?

i) $Z^- > \bar{Z} > Z^+$

ii) $Z^- > Z^+ > \bar{Z}$ y la solución óptima de P^- es factible para (PE).

iii) P^+ es infactible, la solución óptima de P^- es factible para (PE) y $Z^- \leq \bar{Z}$

Respuesta:

i) No es necesario ramificar P^+ porque los problemas en esta rama tienen un valor óptimo menor o igual a Z^+, por lo tanto no hay soluciones con valor mejor que $\bar{Z}$.

ii) No es necesario ramificar P^- porque su solución óptima es factible para (PE). La cota inferior puede ser actualizada a $\bar{Z}$. Como Z^+ es menor que el valor de una solución factible para (PE), no es necesario ramificar P^+.

iii) No es necesario ramificar P^+ porque este problema es infactible. No es necesario ramificar P^- porque su valor óptimo es mejor que $\bar{Z}$ o porque su solución es factible para (PE).

Bono (6 puntos)
Puede responder la siguiente pregunta para obtener una bonificación extra máxima de 6 puntos.

Considere un problema de programación lineal en forma estándar el cual es infactible, pero que se convierte en factible y con un costo óptimo finito cuando la última restricción de igualdad es omitida. Muestre que el problema dual del original es factible y el costo es infinito, es decir, no acotado.

Respuesta: Tenemos los siguientes problemas:

$$\begin{array}{lrl} (P)\ \min & c^T x & \\ s.a: & Ax & = b \\ & a_{m+1}x & = b_{m+1} \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

el cual es infactible. Asumiremos, sin perder generalidad, que la última restricción es la que hace el problema infactible.

Luego, se tiene que el siguiente problema es factible y tiene un costo óptimo finito, pues eliminaremos la última restricción:

$$\begin{array}{lrl} (\tilde{P})\ \min & c^T x & \\ s.a: & Ax & = b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

El dual de ($\tilde{P}$) es:

$$\begin{array}{lrl} (\tilde{D})\ \max & b^T y & \\ s.a: & A^T y & \leq c \end{array}$$

que posee un espacio de soluciones factibles no vacío y tiene óptimo con costo finito pues ($\tilde{P}$) lo tiene (por teorema fuerte de dualidad).

Ahora, el dual de (P) es:

$$\begin{array}{lll} (D)\ \max & b^T y + b_{m+1} y_{m+1} & \\ s.a: & A^T y + a_{m+1}^T y_{m+1} & \leq c \end{array}$$

Como (P) es infactible, (D) es infactible o no acotado. Pero (D) no puede ser infactible, ya que basta con tomar el punto óptimo de (D) que cumple $A^T y^* \leq c$ y fijar $y_{m+1} = 0$ para que la desigualdad $A^T y^* + a_{m+1}^T y_{m+1} \leq c$ se cumpla al menos para ese punto, haciendo factible (D). Con esto, (D) debe ser no acotado, y entonces factible y con costo infinito.

Pregunta 2 (20 puntos)

Parte A (10 puntos)

Considere el siguiente problema:

$$\begin{array}{lrcrcrcll} \min & & & 20x_2 & + & 2x_3 & & & \\ s.a: & x_1 & + & x_2 & & & \geq & 2 & (1) \\ & -x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & \geq & 0 & (2) \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

i) (**2 puntos**) Encuentre la solución óptima del problema dual y su valor óptimo.

ii) (**3 puntos**) Encuentre la solución óptima del problema primal, su valor óptimo y verifique el teorema fuerte de dualidad.

iii) (**2 puntos**) ¿Cómo cambia el valor óptimo del problema primal si es que aumenta de 0 a 1 el lado derecho de la segunda restricción?

iv) (**3 puntos**) Considere ahora el siguiente problema, estrechamente relacionado con el anterior:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcll} \min & & & 20x_2 & + & 2x_3 & + & 10x_4 & & \\ s.a: & x_1 & + & x_2 & + & & & x_4 & \geq & 2 & (1) \\ & -x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & x_4 & \geq & 0 & (2) \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 & \end{array}$$

Encuentre su solución óptima.

Solución:

i) El problema dual es:

$$\begin{array}{lrcrcrcll} \max & 2y_1 & & & & & & & \\ s.a: & y_1 & - & y_2 & \leq & 0 & & (1) \\ & y_1 & + & 4y_2 & \leq & 20 & & (2) \\ & & & -y_2 & \leq & 2 & & (3) \\ & y_1 & , & y_2 & \geq & 0 & & \end{array}$$

La solución se puede obtener gráficamente (Fig. 1).

El dominio corresponde al área destacada y la solución óptima se encuentra en el punto B. En el óptimo $y_1 = 4$, $y_2 = 4$, $h_1 = 0$, $h_2 = 0$ y $h_3 = 6$. El valor óptimo será $V = 0 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 8$.

ii) Considerando los valores de la solución óptima dual, del teorema de holguras complementarias se tiene que:

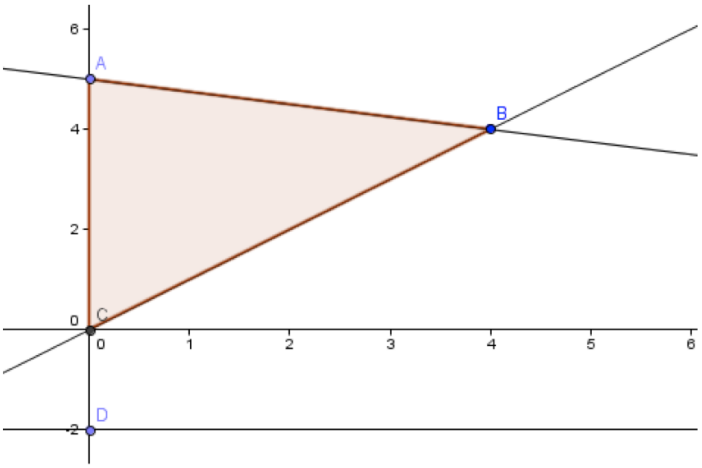


Figura 1: Gráfico pregunta 2, parte A

1) $y_1 = 4 \mapsto x_1 + x_2 = 2$
2) $y_2 = 4 \mapsto -x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$
3) $h_3 = 6 \mapsto x_3 = 0$

del sistema de ecuaciones anterior, la solución óptima del problema primal será: $x_1 = \frac{8}{5}$, $x_2 = \frac{2}{5}$ y $x_3 = 0$. El valor óptimo será: $z = 0 \cdot \frac{8}{5} + 20 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot 0 = 8$.

iii) La segunda variable dual representa el costo reducido de la holgura de la segunda restricción primal y, simultáneamente, el precio sombra de la segunda restricción primal.

Luego, $\Delta FO = y_2 \cdot \Delta b_2 = 4 \cdot 1 = 4$. Esto señala que si se aumenta el lado derecho de la segunda restricción primal de 0 a 1, la función objetivo cambiará de 8 a 12. Esto se asegura en este caso pues, tal como se puede apreciar en el gráfico mostrado en la parte a), la solución óptima no es degenerada y el cambio de una unidad en b_2 no cambia la estructura de la solución óptima actual.

iv) El problema dual de este nuevo problema es:

$$\begin{array}{lrcrcrl} \max & 2y_1 & & & & & \\ s.a: & y_1 & - & y_2 & \leq & 0 & (1) \\ & y_1 & + & 4y_2 & \leq & 20 & (2) \\ & & & -y_2 & \leq & 2 & (3) \\ & y_1 & + & y_2 & \leq & 10 & (4) \\ & y_1 & , & y_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Este nuevo problema corresponde al problema dual anteriormente resuelto con una restricción adicional. Se puede verificar que la cuarta restricción es redundante para la solución óptima anteriormente encontrada: $y_1 = 4$ e $y_2 = 4$.

Luego, por teorema de holguras complementarias, la cuarta variable de nuevo problema primal estará fuera de base. Dicho esto, la solución del nuevo problema primal será: $x_1 = \frac{8}{5}$, $x_2 = \frac{2}{5}$, $x_3 = 0$ y $x_4 = 0$. El valor óptimo es 8.

Parte B (10 puntos)

Considere el siguiente problema de Programación Entera en dos variables:

$$
P) \quad \begin{array}{lrcrcll}
\max & 3x_1 & & & & & \\
s.a. & 2x_1 & - & 2x_2 & \leq & 3 & \\
 & x_1 & - & 6x_2 & \leq & 19 & \\
 & & & x_2 & \leq & 4 & \\
 & & & x_1 & \geq & 0, & \text{entero} \\
 & & & x_2 & \geq & 0, & \text{entero}
\end{array}
$$

i) (**3 puntos**) Dibuje la región factible del problema indicando en ella los puntos enteros factibles. Identifique, además, la solución óptima del problema P) y la solución óptima de su correspondiente relajación lineal. Indique también los correspondientes valores óptimos.

ii) (**3 puntos**) Escriba los dos problemas que resultan de la primera ramificación del algoritmo de ramificación y acotamiento (Branch and Bound) cuando se aplica al problema P). Usando el gráfico, identifique las correspondientes soluciones óptimas de los problemas generados.

iii) (**4 puntos**) Si el procedimiento se detuviera aquí, sobre la base de lo que tiene en ii), ¿cuáles son sus mejores valores para una cota inferior y una cota superior al valor óptimo del problema P)?

Solución:

i) La figura 2 muestra la región factible, la solución óptima entera y también la solución de la relajación lineal. El valor óptimo entero es 9 y el valor óptimo de la relajación lineal es 12:

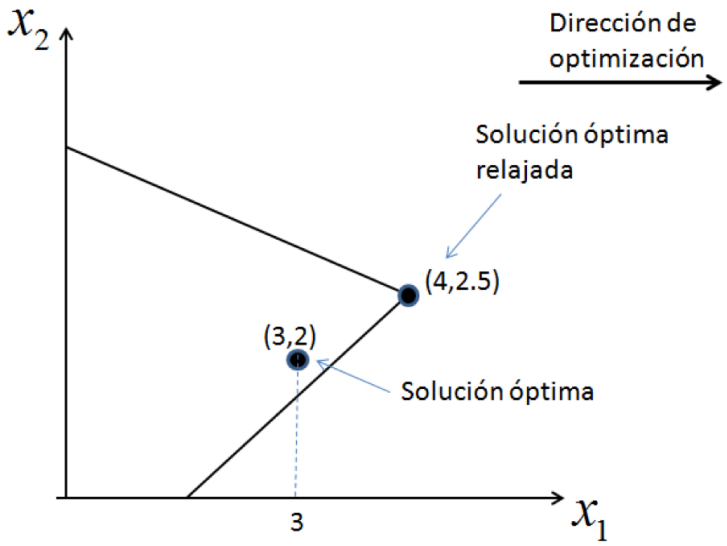


Figura 2: Gráfico 1 pregunta 2, parte B

ii) Tenemos que la solución óptima de la relajación lineal es $(4, 2{,}5)$. Luego, para ramificar en el esquema del Branch and Bound debemos usar la variable x_2. Esto genera los siguientes dos problemas:

$$P_1) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & 3x_1 \\ s.a. & 2x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & x_1 - 6x_2 \leq 19 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_2 \geq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ enteros} \end{array}$$

y

$$P_2) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & 3x_1 \\ s.a. & 2x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & x_1 - 6x_2 \leq 19 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ enteros} \end{array}$$

El gráfico de la figura 3 muestra los cortes:

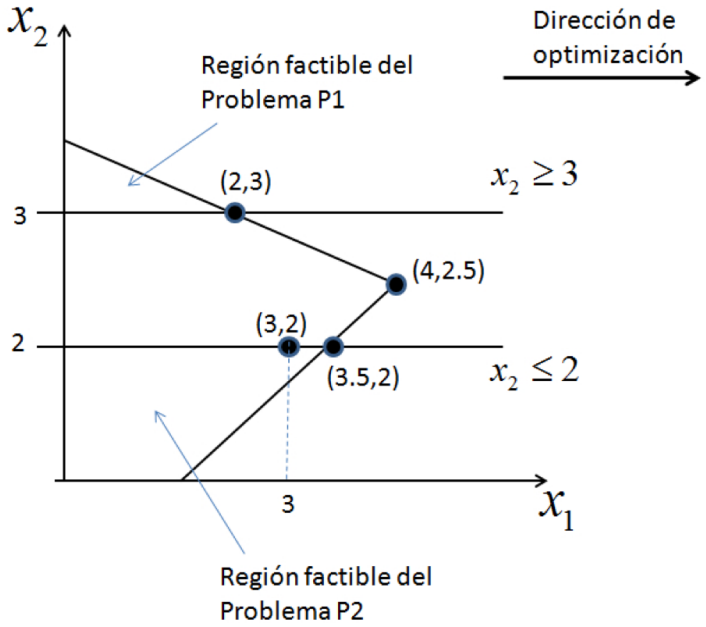


Figura 3: Gráfico 2 pregunta 2, parte B

Usando el gráfico se puede ver fácilmente que la solución óptima de P_1) es el punto de coordenadas $(1, 3)$, que es entero y da un valor igual a 3. Por otro lado, la solución óptima de P_2) es el punto de coordenadas (3,5, 2) con valor óptimo igual a 10,5.

iii) Tenemos que la mejor cota superior es 10,5 y tenemos una solución entera con valor igual a 3. Por lo tanto, si el Branch and Bound se detiene en este momento, sólo podemos asegurar que $3 \leq z^* \leq 10,5$.

Pregunta 3 (20 puntos)

Una fotógrafa ha decidido confeccionar un libro con sus mejores fotos. Ella cuenta con R fotos y desea que su libro tenga exactamente N páginas (donde $R > 2N$), que cada página no tenga más

de dos fotos (claramente tampoco pueden haber páginas sin fotos) y que cada foto se use a lo más una vez en el libro.

La editorial que ha aceptado publicar este libro le impuso como condición que a lo más W páginas (con $W < N$) contengan exactamente dos fotos. Además, le ha indicado que el atractivo que tendrá el libro corresponde a la suma de los atractivos individuales de cada página, y que el atractivo de cada página depende de las fotos que en ella se coloquen. Es así como si en una página se coloca la foto r junto a la foto i, el atractivo de la página corresponderá a un valor $B_{ri} > 0$ conocido y dado (obviamente $B_{ri} = B_{ir}$).

Por último, existe una línea editorial que ha analizado las potenciales combinaciones de las R fotos, y le ha comunicado a la fotógrafa que para cada foto existe un cierto conjunto de otras fotos que no pueden ser colocadas en la misma página. Especificamente, para la foto r, se conoce un conjunto $V(r)$ tal que r no puede ser colocada en la misma página que las fotos que se encuentran en el conjunto $V(r)$, y esto para todas las fotos $r = 1, \ldots, R$.

a) (**14 puntos**) Con la información anterior formule un modelo de programación lineal entera que permita a la fotógrafa confeccionar su libro, respetando sus propios deseos y los requerimientos de la editorial, y que le permita maximizar el atractivo total del libro.

b) (**6 puntos**) Antes de tener decidida la confección del libro, la editorial le comunica a la fotógrafa que se debe seleccionar una de las páginas para que sea la página destacada. Para ello, se le ha pedido que esa página tenga sólo una fotografía y que para destacarla, tanto la página anterior como la posterior deben ser páginas con dos fotografías. Desde la editorial creen que esta página destacada contribuirá al atractivo total del libro. Específicamente, se sabe que si la página n-ésima es la página destacada, el atractivo total del libro aumentará en $P^n > 0$. Considere la nueva información para reformular el modelo de programación lineal entera construido en la parte a).

Solución:

a) Se definen las siguientes variables.

Variables

$$x_r^n: \begin{cases} 1 & \text{si la foto } r, \text{ con } r = 1, \ldots, R, \text{ es colocada en la página } n, \text{ con } n = 1, \ldots, N. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$y_{ri}^n: \begin{cases} 1 & \text{si la foto } r, \text{ con } r = 1, \ldots, R \text{ y la foto } i = 1, \ldots, R \text{ están en la página } n = 1, \ldots, N. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Función objetivo La función objetivo consiste en maximizar el atractivo del libro.

$$\text{máx} \quad \sum_{n=1}^{N} \sum_{r=1}^{R} \sum_{i=1}^{R} B_{ri} \cdot y_{ri}^n$$

Restricciones

R1) Asegurar que cada página tiene el mínimo y máximo de fotos deseado por la fotógrafa.

$$1 \leq \sum_{r=1}^{R} x_r^n \leq 2 \quad \forall\, n = 1, \ldots, N.$$

R2) Asegurar que cada foto es usada a lo más una vez.

$$\sum_{n=1}^{N} x_r^n \leq 1 \quad \forall\, r = 1, \ldots, R.$$

R3) Construir la variable de atractivo (y_{ri}^n).

$$x_r^n + x_i^n \geq 2 \cdot y_{ri}^n \quad \forall\, r = 1, \ldots, R; \quad \forall\, i = r+1, \ldots, R; \quad \forall\, n = 1, \ldots, N.$$

donde se debe asegurar que:

$$y_{ri}^n = 0 \quad \forall\, r = 1, \ldots, R; \quad \forall\, i = 1, \ldots, r-1; \quad \forall\, n = 1, \ldots, N.$$

R4) Asegurar que no hay más de W páginas que contengan dos fotografías.

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{r=1}^{R} \sum_{i=1}^{R} y_{ri}^n \leq W$$

R5) Asegurar que la foto r no es colocada en la misma página con alguna foto del conjunto $V(r)$.

$$x_r^n + x_i^n \leq 1 \quad \forall\, r = 1, \ldots, R; \quad \forall\, i \in V(r); \quad \forall\, n = 1, \ldots, N.$$

que también puede escribirse como:

$$x_r^n + \frac{\sum\limits_{i \in V(r)} x_i^n}{M} \leq 1 \quad \forall\, r = 1, \ldots, R; \quad , \quad \forall\, n = 1, \ldots, N.$$

donde $M >>> 0$, y que en este caso particular puede ser $M = R - 1$.

R6) Naturaleza de las variables.

$x_r^n \in \{0, 1\}$, para foto $r = 1, \ldots, R$ y página $n = 1, \ldots, N$.
$y_{ri}^n \in \{0, 1\}$, para fotos $r = 1, \ldots, R$ e $i = 1, \ldots, R$ y página $n = 1, \ldots, N$.

b) Se define la siguiente variable adicional.

Variables

$$\beta_i^n: \begin{cases} 1 & \text{si la página } n, \text{ con } n = 1, \ldots, N, \text{ que tiene la fotografía } i = 1, \text{ con } i = 1, \ldots, R, \\ & \text{será la página destacada.} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Función objetivo La función objetivo se modifica quedando como sigue:

$$\text{máx} \quad \sum_{n=1}^{N} \sum_{r=1}^{R} \sum_{i=1}^{R} B_{ri} \cdot y_{ri}^n + \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{R} P_i^n \cdot \beta_i^n$$

Restricciones adicionales

R1A) Asegurar que exactamente una página es la destacada.

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{R}\beta_i^n = 1$$

R2A) Asegurar que la página destacada contiene sólo una fotografía.

$$\beta_i^n \leq \left(1 - \sum_{r=i+1}^{R} y_{ir}^n\right) \quad \forall\, n = 1,\ldots,N; \quad \forall\, i = 1,\ldots,R.$$

R3A) Asegurar que tanto la página anterior como la posterior son páginas con dos fotografías.

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{R}\beta_i^n \leq \sum_{r=1}^{R}\sum_{i=1}^{R}\left(y_{ir}^{n+1} + y_{ir}^{n-1}\right) \quad \forall\, n = 2,\ldots,N-1.$$

la primera y la última página no pueden ser seleccionadas, entonces:

$$\beta_i^n = 0 \quad \forall\, n \in \{1, N\}; \quad \forall\, i = 1,\ldots,R.$$

R4A) Naturaleza de la variable nueva.

$\beta_i^n \in \{0,1\}$, para la página $n = 1,\ldots,N$ que contiene la fotografía $i = 1,\ldots,R$.