PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2016
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado - F. Palomino
A. Cataldo - P. Carrillo - J.T. Marquinez
G. Angulo

Solución Tarea 3

Fecha de Entrega: 25 de octubre.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos ya asignados para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cuatro grupos de hojas el día de la entrega.
- El plazo de entrega vence impostergablemente el día martes 25 de octubre a las 12:30 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta.
- Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta la escalación a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[2].
- Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1. (15 puntos)

a) (6 puntos) Considere el problema P) definido por

$$\begin{array}{lll} P) & \max & 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 \\ & s.a & x_1 + x_3 + x_4 \leq \delta \\ & & 4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 7 \\ & & -8x_1 + 3x_2 + 9x_4 \leq 8 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 0, \end{array}$$

con $\delta \geq 0$. Responda las siguientes preguntas:

i) (2 puntos) Para $\delta = 1$, resuelva el problema primal como estime conveniente. Debe explicar en detalle su procedimiento.

ii) (1 punto) Calcule el dual de P).

iii) (1 punto) Resuelva el dual para $\delta = 1$ sin utilizar la respuesta de *i*).

iv) (2 puntos) ¿Para qué valor(es) de δ, el problema P) tiene solución única? Justifique su respuesta.

b) (3 puntos) Considere un problema de optimización lineal en su forma estándar que es infactible, pero se vuelve factible si es que omitimos la ultima restricción. Demuestre que el dual del problema primal original (el infactible) es factible y que el valor del óptimo (función objetivo) es infinito.

c) (1 puntos) Dé un ejemplo de un primal y su dual, ambos con múltiples soluciones optimas.

d) (5 puntos) Una antigua empresa de helados tiene 4 tipos de helados. Para fabricar estos helados, se necesitan los siguientes materiales: yogur, fruta, azúcar y hielo. La empresa consta para el próximo mes con 1000kg de yogur, 800kg de fruta, 500kg de azúcar y 2500kg de hielo.

Para maximizar utilidades, se usa el siguiente modelo:

$$\begin{array}{lll} P) & \max & 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 5x_4 \\ & s.a & x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 1000 \\ & & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 800 \\ & & 7x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 500 \\ & & 17x_1 + 12x_2 + 25x_3 + 15x_4 \leq 2500 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \end{array}$$

Con esta información, responda:

i) (1 punto) Explique el modelo con sus palabras, es decir, a qué corresponden las variables, las restricciones, parámetros y función objetivo.

ii) (1 punto) Resuelva el problema con Simplex (minimización) y anote en forma canónica su última iteración.

iii) (2 puntos) ¿Cuál es el beneficio unitario mínimo del helado tipo 2 y 3 para que convenga producirlos? (cada helado independientemente)

iv) (1 punto) Suponga que se ha encontrado en la bodega que realmente habían 10kg de hielo extra. Sin resolver nuevamente, indique cuánto sería el nuevo valor óptimo del problema P) con ese cambio. Justifique con precisión todo su desarrollo.

Solución Problema 1.

a) *i)*

$$\begin{aligned} P) \quad \max \quad & 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 \\ s.a \quad & x_1 + x_3 + x_4 \leq \delta \\ & 4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 7 \\ & -8x_1 + 3x_2 + 9x_4 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 0, \end{aligned}$$

Podemos tomar $x_i' = -x_i$, con lo que nos queda un nuevo problema

$$\begin{aligned} P) \quad \max \quad & -5x_1' - 6x_2' - 7x_3' - 8x_4' \\ s.a \quad & -x_1' - x_3' - x_4' \leq \delta \\ & -4x_1' - x_2' - x_3' + 2x_4' \leq 7 \\ & 8x_1' - 3x_2' - 9x_4' \leq 8 \\ & x_1', x_2', x_3', x_4' \geq 0, \end{aligned}$$

lo que nos deja un problema mas fácil de visualizar, ya que al pasarlo a su forma estándar vemos que el óptimo es el $x'^* = (0,0,0,0) = x^*$, ya que los costos reducidos son negativos y estamos maximizando, esto es cierto siempre que $delta >= 0$ (en el caso de 0, el punto es degenerado), ya que sino la base de las holguras no sería factible. Por lo tanto en particular es cierto para $\delta = 1$.

ii) El dual es

$$\begin{aligned} D) \quad \min \quad & \delta y_1 + 7y_2 + 8y_3 \\ s.a \quad & y_1 + 4y_2 - 8y_3 \geq 5 \\ & + y_2 + 3y_3 \geq 6 \\ & y_1 + y_2 \geq 7 \\ & y_1 - 2y_2 + 9y_3 \geq 8 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0, \end{aligned}$$

iii) Pasando el dual a su forma estándar nos queda:

$$\begin{aligned} DFE) \quad \min \quad & \delta y_1 + 7y_2 + 8y_3 \\ s.a \quad & y_1 + 4y_2 - 8y_3 + h_1 = 5 \\ & + y_2 + 3y_3 + h_2 = 6 \\ & y_1 + y_2 + h_3 = 7 \\ & y_1 - 2y_2 + 9y_3 + h_4 = 8 \\ & y_1, y_2, y_3, h_1, h_2, h_3, h_4 = 0, \end{aligned}$$

Luego, tenemos que si $\delta > 0$ el punto $y^* = (0,0,0)$ es óptimo, ya que minimizamos y los costos reducidos de la base de las holguras son todos positivos, cabe mencionar que en este caso, si $\delta \leq 0$ solo se pierde la optimalidad, pero sigue siendo este punto un punto básico factible.

iv) Como la solución del primal es la única solución óptima para $\delta \in [0, \infty)$ tenemos que analizar que pasa para $\delta \in [-1/2, 0)$. Pero el punto $(0,0,0,0)$ no es factible del primal, pero para no hacer Simplex Fase I en el primal, podemos aprovecharnos de lo que se dijo en *iii)* del dual, busquemos el óptimo en el dual si es que $\delta < 0$, en este caso, tenemos que entra x_1 y sale h_1. El nuevo sistema

(matricialmente) queda:

$$DFE) \quad \min \quad \delta - \delta h_1 + (7-4\delta)y_2 + (8+8\delta)y_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 17 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Con esto, tenemos que si $\delta \in (-1, 0)$ entonces el óptimo es $y^* = (5, 0, 0)$ (usamos los costos reducidos para deducir esto). Entonces podemos usar holguras complementaria, en donde tenemos para $\delta \in [-1/2, 0)$ el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_3 + x_4 - \delta)y_1 &= 0 \\ (4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - 7)y_2 &= 0 \\ (-8x_1 + 3x_2 + 9x_4 - 8)y_3 &= 0 \\ (y_1 + 4y_2 - 8y_3 - 5)x_1 &= 0 \\ (y_2 + 3y_3 - 6)x_2 &= 0 \\ (y_1 + y_2 - 7)x_3 &= 0 \\ (y_1 - 2y_2 + 9y_3 - 8)x_4 &= 0, \end{aligned}$$

y al usar el punto $y^* = (5, 0, 0)$, las ecuaciones que nos dicen algo son:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_3 + x_4 - \delta) &= 0 \\ (-6)x_2 &= 0 \\ (5-7)x_3 &= 0 \\ (5-8)x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Lo que nos dice que $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ y $x_1 = \delta$, lo que nos dice que la solución óptima es única para todo $\delta \geq -0{,}5$.

b) Asumamos que A es de mxn, siendo esta la matriz del problema primal. Como se verá en la pregunta 4, el eliminar una restricción puede verse como dejar pa variable dual como 0. En este caso, como al eliminar la última restricción en P) el problema se hace factible con óptimo finito, eso quiere decir que el problema dual tiene el punto $(y_1^*, .., y_{m-1}^*, 0)$ con $(y_1^*, .., y_{m-1}^*)$ el óptimo dual (que da valor óptimo dual finito) que existe por los teoremas de dualidad sobre el problema P) sin la última restricción. Entonces, como D) es factible y P) es infactible, podemos asegurar que D) es no acotado.

c) Un ejemplo puede ser el que aparece en el libro Sierksma (2001) llamado *Linear and Integer Programming: Theory and Practice* en su segunda edición. El ejemplo es:

$$\begin{aligned} P) \quad \min \quad & 4x_2 \\ s.a \quad & -2x_2 \geq 0 \\ & x_1 + 4x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0, & \end{aligned}$$

y su dual

$$\begin{aligned} D) \quad \max \quad & 3y_2 \\ s.a \quad & y_2 \leq 0 \\ & -2y_1 + 4y_2 \leq 5 \\ y_1, y_2 \geq 0. & \end{aligned}$$

Donde la solución de P) es $(a, 0)$ con $a \geq 3$ y la solución de D) es (b,0) con $b \geq 0$. Sirve cualquier ejemplo en donde muestren que el óptimo es múltiple en ambos, pero lo deben justificar o con Simplex o dibujando, como en este caso, el ejemplo es facilmente graficable.

d) *i)* Las variables x_i son la cantidad de helado del tipo i que se producirá el próximo mes. La función objetivo maximiza utilidades, por lo que las utilidades para los tipos de helados son 2, 3, 7 y 5 respectivamente. Cada restricción se asocia a un material, respectivamente son yogur, fruta, azúcar y hielo. Y los parametros a_{ij} (de la matriz de las restricciones) es la cantidad gastada del material i por el tipo de helado j.

ii) Pasamos el problema a minimización y en su forma estandar nos queda

$$\begin{aligned} P) \quad \min \quad & -2x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 5x_4 \\ s.a \quad & x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 1000 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 = 800 \\ & 7x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + x_7 = 500 \\ & 17x_1 + 12x_2 + 25x_3 + 15x_4 + x_8 = 2500 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0. \end{aligned}$$

Al resolver por Simplex, se llega a que la ultima iteración se escribe en su forma canónica como

$$\begin{aligned} P) \quad \min \quad & 3,91x_1 + 0,45x_2 + 0,18x_7 + 0,27x_8 - 772,73 \\ s.a \quad & -1,15x_1 - 0,87x_2 + x_5 + 0,09x_7 - 0,16x_8 = 1000 \\ & -0,33x_1 - 0,46x_2 + x_6 - 0,05x_7 - 0,12x_8 = 800 \\ & 1,44x_1 + 0,12x_2 + x_4 + 0,23x_7 - 0,01x_8 = 500 \\ & -0,18x_1 + 0,4112x_2 + x_3 - 0,14x_7 + 0,05x_8 = 2500 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0. \end{aligned}$$

Esta forma canónica vista como fracciones, terminaría con las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-63}{55} & \frac{-48}{55} & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{11} & \frac{-9}{55} \\ \frac{-18}{55} & \frac{-51}{110} & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{22} & \frac{-13}{110} \\ \frac{79}{55} & \frac{13}{110} & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{22} & \frac{-1}{110} \\ \frac{-2}{11} & \frac{9}{22} & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{22} & \frac{1}{22} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \frac{7000}{100} \\ \frac{5300}{11} \\ \frac{1000}{11} \\ \frac{500}{11} \end{pmatrix},$$

y el valor de la función objetivo es $\frac{8500}{11}$.
Además, como se ve en la forma canónica, la solución es $x^* = (0, 0, \frac{500}{11}, \frac{1000}{11})$.

iii) De la forma canónica se observa que la base esta compuesta por x_5, x_6, x_4 y x_3, por lo cual se deben analizar de manera distinta x_2 y x_3.
Antes de trabajar, calculamos cuanto es B^{-1}.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{9}{55} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{22} & -\frac{13}{110} \\ 0 & 0 & \frac{5}{22} & -\frac{1}{110} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{22} & \frac{1}{22} \end{pmatrix}$$

Primero, para x_2 esta fuera de la base, por lo que nos basta ver que su costo reducido sea negativo.

$$\overline{c}_2 = c_2 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{9}{55} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{22} & -\frac{13}{110} \\ 0 & 0 & \frac{5}{22} & -\frac{1}{110} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{22} & \frac{1}{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} \leq 0.$$

Lo que nos deja que $c_2 \leq -\frac{38}{11} = -3,\overline{45}$. Lo que significa en el problema original (de maximización) que si el beneficio de producir helado del tipo 2 es al menos $3,\overline{45}$, se producirá.
Para el de tipo 3 (que está en la base), tenemos que ver cuanto podemos modificar el costo sin que los costos reducidos de las no básicas se hagan negativos. Es decir, tenemos que ver que se cumpla que:

$$(\overline{c}_1, \overline{c}_2, \overline{c}_7, \overline{c}_8) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{9}{55} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{22} & -\frac{13}{110} \\ 0 & 0 & \frac{5}{22} & -\frac{1}{110} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{22} & \frac{1}{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 0 \\ 17 & 12 & 0 & 1 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Lo que se puede trabajar como se ve a continuación:

$$(\overline{c}_1, \overline{c}_2, \overline{c}_7, \overline{c}_8) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & c_3 \end{pmatrix} \frac{1}{110} \begin{pmatrix} -126 & -96 & 10 & -18 \\ -36 & -51 & -5 & -13 \\ 158 & 13 & 25 & -1 \\ -20 & 45 & -15 & 5 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} \overline{c}_1 \\ \overline{c}_2 \\ \overline{c}_7 \\ \overline{c}_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{110} \begin{pmatrix} -790 - 20c_3 \\ -65 + 45c_3 \\ -125 - 15c_3 \\ 5 + 5c_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} \overline{c}_1 \\ \overline{c}_2 \\ \overline{c}_7 \\ \overline{c}_8 \end{pmatrix} = \frac{1}{110} \begin{pmatrix} -220 + 790 + 20c_3 \\ -330 + 65 - 45c_3 \\ 125 + 15c_3 \\ -5 - 5c_3 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Por lo que llegamos a que,

$$\begin{pmatrix} 570 + 20c_3 \\ -265 - 45c_3 \\ 125 + 15c_3 \\ -5 - 5c_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

Por lo tanto la base es óptima si $c_3 \in [-\frac{-25}{3}, -\frac{53}{9}]$. Lo que nos dice que si el beneficio unitario del problema original para el helado 3 es mayor a $\frac{53}{9}$, entonces se producira de ese helado.

iv) Para esto, tenemos que ver la factibilidad del nuevo valor del óptimo, es decir,

$$x_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{9}{55} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{22} & -\frac{13}{110} \\ 0 & 0 & \frac{5}{22} & -\frac{1}{110} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{22} & \frac{1}{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 800 \\ 500 \\ 2510 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6982}{11} \\ \frac{5287}{11} \\ \frac{999}{11} \\ \frac{505}{11} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, seguimos en el óptimo (aquí podrían haber sacado el intervalo). Luego, para saber el valor óptimo, debemos ver como aumentó el valor objetivo, para lo cual podemos ver el valor dual relacionado con esta restricción. Al calcular el valor dual, tenemos que y_4 (la variable dual de la cuarta restricción) es $0,273$ y eso significa que el nuevo valor óptimo es (del problema original de utilidades)

$$z = 772,73 + 0,273 * 10 = 775,46$$

Problema 2. (15 puntos)

a) (8 puntos) Imagine que usted esta llegando a trabajar a una empresa y le cuentan que la persona que estaba en su puesto estaba optimizando un proceso y había resuelto el modelo P) en un solver que le entregaba el árbol de B&B y que en cada iteración utilizaba Simplex. Pero entre que se fue el ex-trabajador y tú llegaste, se actualizó el sistema operativo del computador y algunos archivos se dañaron. En particular, la información de la solución del problema P), con el que debes trabajar, se dañó y solo se pudo recuperar lo que se ve en la figura 1.

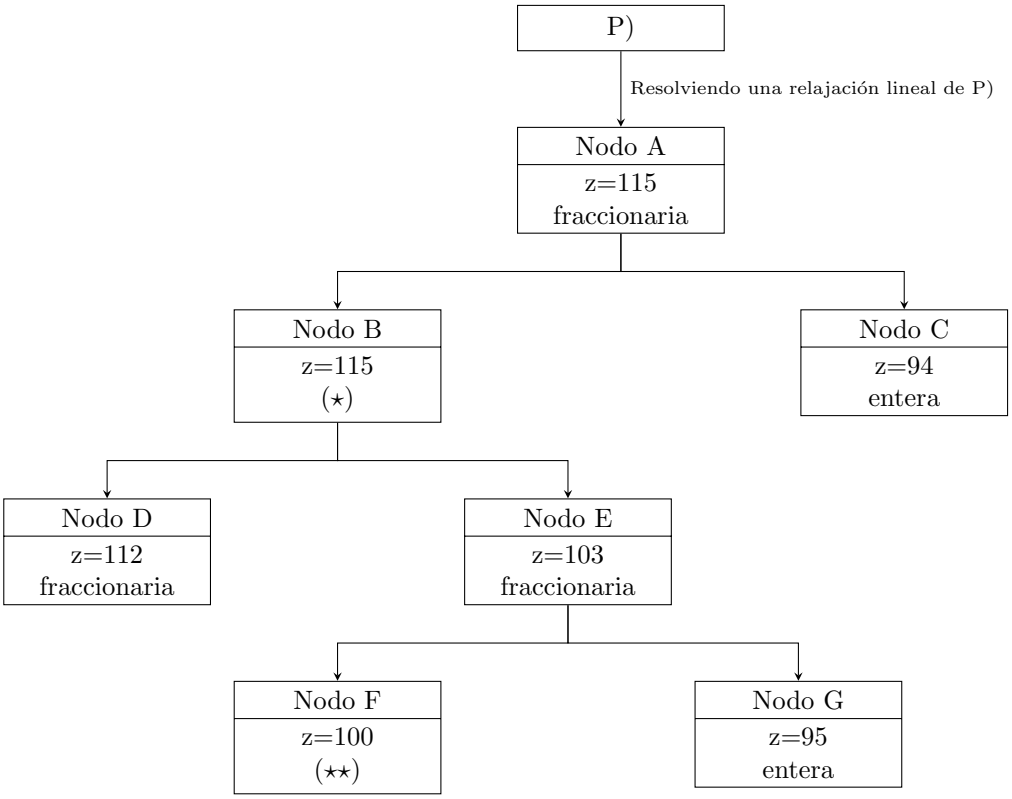


Figura 1: Recuperación de la resolución de P).

En la figura 1, se distinguen los nodos sin un orden (las letras son identificaciones, sin necesariamente que se haya resuelto en ese orden), z se refiere a la Función Objetivo y cuando dice fraccionaria o entera, se refiere a la solución encontrada.

Su jefe quiere saber si es apto para el trabajo y le quiere hacer unas preguntas para ver qué tanto sabe de optimización. Las preguntas son:

i) (1 puntos) ¿Qué me puedes decir de la estructura del problema P)? Es decir, quiere que le responda que tipo de problema de optimización es P) y cuál es la forma de sus condiciones y función objetivo.

ii) (1 puntos) ¿Qué me puedes decir de $(\star)$ y $(\star\star)$?

iii) (1 puntos) ¿Qué es lo que se sabe del incumbente?¿Sabes cuánto vale?

iv) (1 puntos) ¿Cuál es la mejor cota superior e inferior del óptimo de P)?

Luego, usted se comunica con Juan (el ex-trabajador) y él le cuenta que recuerda cierta información. Usted toma nota:

- ◇ Recuerda que el problema era de la forma P) dado por $\max\{c^T x : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^5\}$.
- ◇ Recuerda algunos puntos óptimos de los nodos. Estos son: $x^*_A = (10, 1, 7, \frac{7}{8}, \frac{2}{3})$, $x^*_B = (10, \frac{9}{8}, 7, 0, 1)$, $x^*_E = (10, 1, 7, 0, \frac{4}{5})$, $x^*_F = (10, 1, 7, 0, 0)$, $x^*_G = (10, 1, 7, 0, 1)$
- ◇ En la primera bifurcación (bajo el Nodo A), las restricciones agregadas fueron $x_4 \leq 0$ y $x_4 \geq 1$.

Con esa información usted, responda:

v) (1 puntos) ¿Cómo cambian las respuesta de *ii*), *iii*) y *iv*)?

vi) (1 puntos) Agregue las restricciones en las lineas correspondientes (dibuje el nuevo árbol) y agregue en las demás bifurcaciones, las restricciones faltantes.

Finalmente, Juan le envía un correo, en donde le dice que bajo el nodo D, recordó que habían dos nodos más (llamémoslos Nodo H e I), donde el Nodo H tiene $z = 93$ y solución entera y el Nodo I tiene $z = 99$ y no recuerda el tipo de solución.

vii) (1 puntos) ¿Qué se puede decir de la naturaleza de la solución del Nodo I?

viii (1 puntos) ¿Cómo cambian las respuestas dadas a su jefe con toda la información disponible?

OBS: La información de cada párrafo solo se puede usar para las preguntas que estén después en el texto. Debe justificar todas sus respuestas.

b) (7 puntos) Considere el siguiente problema P) definido por

$$\begin{aligned} P) \quad & \max \ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 5x_5 \\ & s.a \quad 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 5x_5 \leq 13 \\ & \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Responda las siguientes preguntas:

i) (1 punto) Resuelva la relajación lineal y entregue el punto óptimo. ¿Es óptimo para el problema P)?

ii) (2 punto) Encuentre una desigualdad de cover que corte el punto encontrado en *i*). Luego, si el nuevo óptimo es fraccionario, itere encontrando otra desigualdad de cover. Al finalizar estas iteraciones, el punto encontrado ¿es óptimo en P)? Justifique.

iii) (2 punto) Ahora resuelva desde una relajación de P) con desigualdades de Gomory, ingresando de a una. Luego de 2 iteraciones, ¿La solución es óptima? Si no lo es ,¿Usted llega al óptimo?

iv) (2 punto) ¿Qué cortes de Gomory es necesario agregar en el problema de la última iteración de *ii*) para que la solución del nuevo problema fuese igual a la de P)?.

OBS: Para la resolución de este problema, se permite resolver computacionalmente, pero se debe **explicitar** qué se utilizó y agregar en un Anexo, fotos del programa o del código. Se recomienda usar solver de Excel.

Solución Problema 2.

a) *i*) Es un problema lineal (restricciones y función objetivo), ya que se resuelve con Simplex en sus nodos. Además, es un problema de maximización, ya que al bajar en el árbol, el valor óptimo disminuye.

ii) Podemos asegurar que ($\star$) debe decir fraccionario, ya que sino no tendría hijos. Por otro lado, de ($\star\star$) no se puede asegurar nada, ya que peude que me falte información y que aun sigan hijos hacia abajo (se pudo perder esa parte del árbol) o que ahí terminaba el árbol .

iii) El incumbente podría ser 95, pero si ($\star\star$) fuese entera, el incumbente sería 100. Por lo tanto, no se sabe cuanto es en este momento, pero se sabe que es mayor o igual a 95.

iv) El óptimo de P) está acotado entre 95 y 112, ya que podría ser que al seguir por D, el óptimo llegara a ser 112, y la mejor cota inferior que podemos asegurar es 95, pero si ($\star\star$) fuese entero, la cota inferior sería 100.

v) Con esa información, en la parte *ii*) sabemos ahora que ($\star\star$) debe decir entera. En la parte *iii*) sabemos que el incumbente en ese arbol es 100 hasta ese momento. Y por ultimo, en la parte *iv*) el valor óptimo esta entre 100 y 112.

vi) El árbol se puede observar en la figura 2.

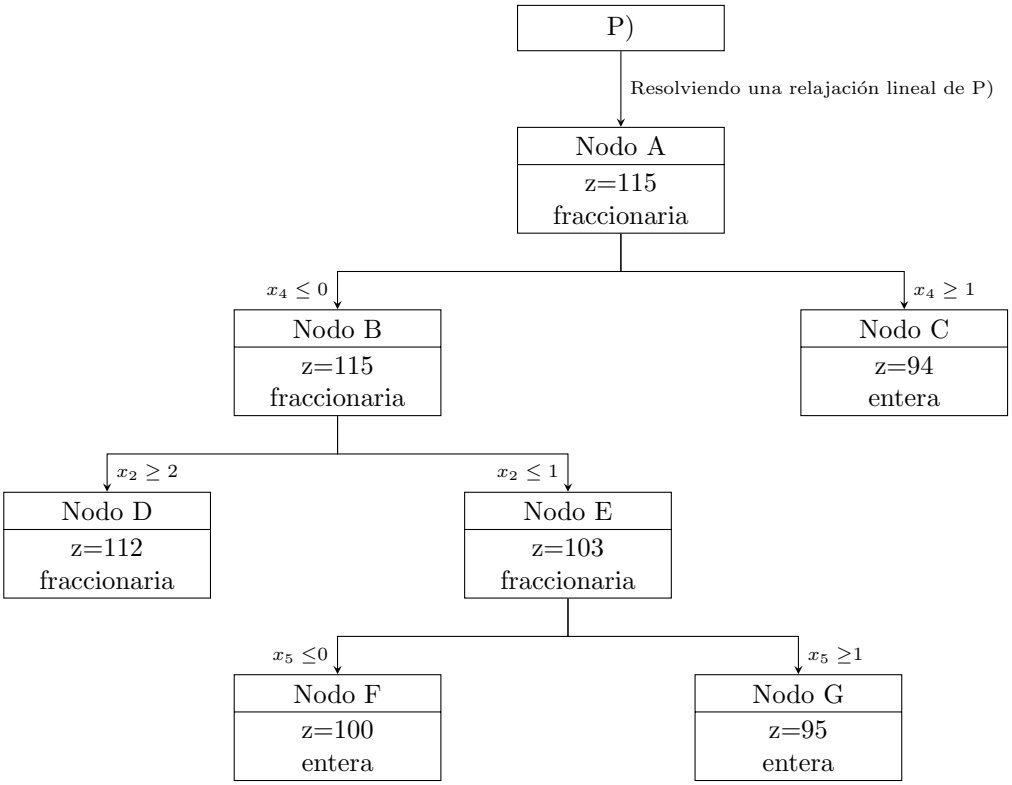


Figura 2: Árbol con información parcial.

vii) De la solución del nodo I no se puede decir nada.

viii) Veamos el nuevo árbol.

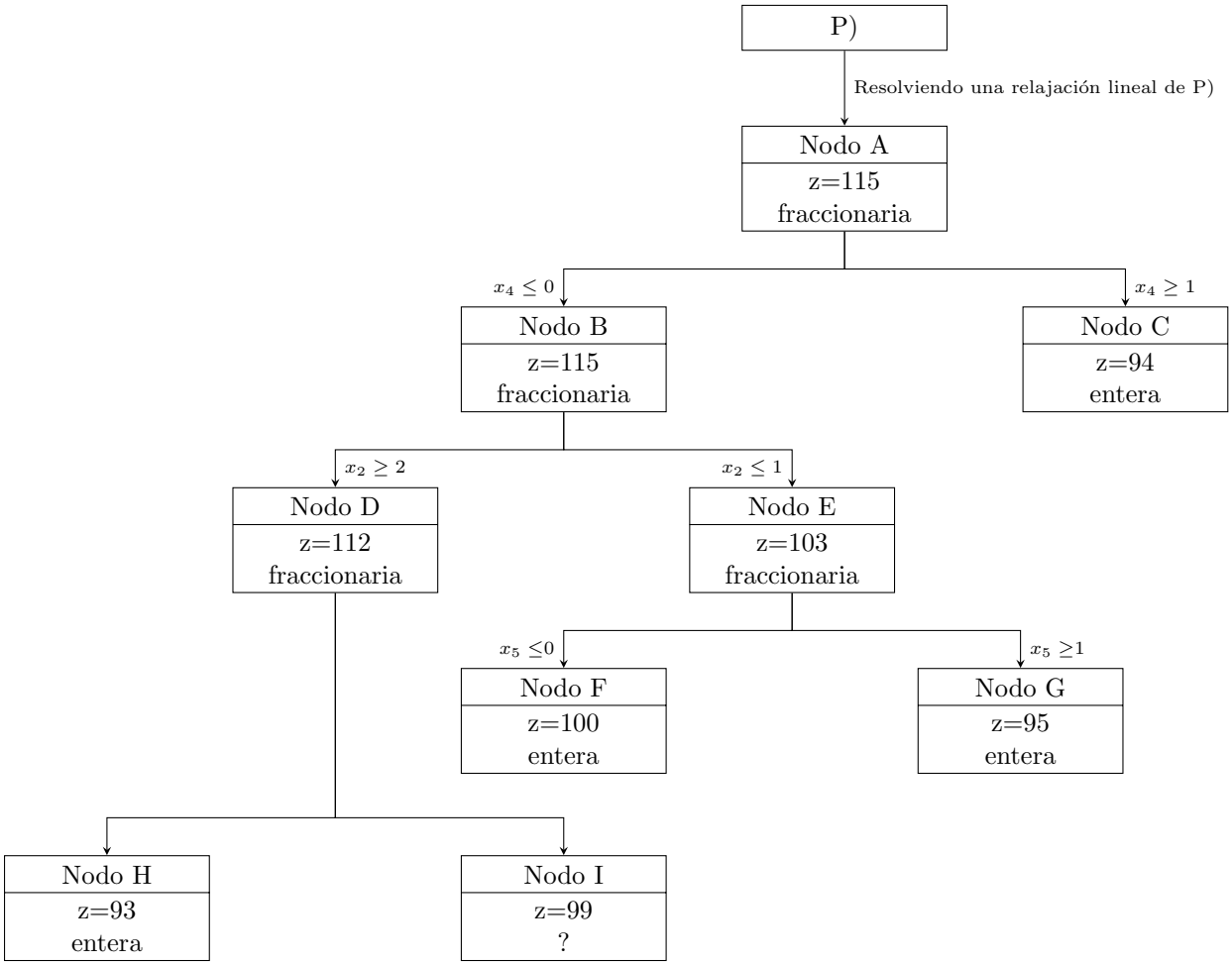


Figura 3: Árbol con toda la información.

Se puede ver en el árbol que el nuevo incumbente es 100 y que la rama del nodo D que son los nodos H e I, son cortados por (integralidad H y por incumbente el I). Por lo tanto, le puedo asegurar al jefe que el óptimo es 100 y le puedo dar la solución, que es x_F^*.

b) *i)* Al resolver la relajación lineal en Excel, la solución óptima es $x^* = (0, \frac{1}{2}, 0, 1, 1)$. No es óptimo del problema P), ya que x_2 es fraccionario.

ii) Podemos usar la restricción de cover $x_2 + x_4 + x_5 \leq 2$, ya que el peso de los 3 es 17, lo que supera el lado derecho. Al resolver tenemos que el nuevo óptimo es $x^* = (0, 0, \frac{2}{3}, 1, 1)$, lo cual tampoco es óptimo de P). Luego, podemos agregar la restricción $x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$ ya que sus pesos suman 14. Con esto, el óptimo del nuevo problema es $x^* = (0, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 1)$, lo que nuevamente no es óptimo de P). Luego, no se puede agregar ningún cover. Eso se ve en la figura 4, donde la última fila es 1 si algún cover es violado y 0 si no, y en las columnas están todas las combinaciones de cover posible.

| | | |

iii) Al resolver la relajación de P), tenemos que la forma estandar del problema relajado es:

$$\max \quad 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 5x_5$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x, h \geq 0.$$

Al resolver este modelo con Simplex, nos quedan dos posibles cortes de Gomory. Como las variables básicas son $\{x_2, x_4, x_5, h_1, h_2, h_3\}$, tenemos que las no básicas son $\{x_1, x_3, h_4, h_5\}$, por lo los cortes quedan:

$$x_2 \rightarrow \quad \frac{3}{8}x_1 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{2}h_4 + \frac{3}{8}h_5 \geq \frac{1}{2}$$
$$h_4 \rightarrow \quad \frac{5}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{2}h_4 + \frac{5}{8}h_5 \geq \frac{1}{2}$$

Al ingresar la relacionada con h_4 llegamos al óptimo que es $x^* = (0, 1, 0, 0, 1)$. Por otro lado, si ingreso la relacionada con x_2, luego en la segunda iteración debería ingresar la de h_4, por lo que en 2 iteraciones debería lograr llegar al óptimo.

iv) Como al relajar P) y agregar la restricción de Gomory relacionada con h_4 nos basta para solucionar el problema, al agregársela al modelo en el final de *ii*), también se soluciona el problema.

Problema 3. (15 puntos)

a) (6 puntos) Considere el problema P) definido como

$$\begin{aligned} P) \quad \max \quad & x_1 + 1,5x_2 \\ s.a \quad & x_1 + 2x_2 \leq 12,5 \\ & x_1 + x_2 \leq 8,5 \\ & 1,5x_1 - 0,75x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 2,5 \\ & x_2 \geq 1,5, \end{aligned}$$

y el problema IP) definido por

$$\begin{aligned} IP) \quad \max \quad & x_1 + 1,5x_2 \\ s.a \quad & (x_1, x_2) \in Q, \end{aligned}$$

con $Q = \{(3,2), (3,3), (3,4), (4,2), (4,3), (4,4), (5,2), (5,3)\}$.

Con respecto a esto, se le pide que:

i) (2 puntos) Muestre que P) es una relajación de IP) y demuestre que $S \cap \mathbb{Z}^2 = Q$, siendo S el conjunto factible de P).

ii) (2 puntos) Resuelva P) y utilice el método de B&B para encontrar el óptimo de IP).

iii) (1 punto) Grafique el conjunto factible de P), mostrando claramente el óptimo y el gradiente de la función objetivo. Luego, grafique IP).

iv) (1 punto) Grafique cada iteración de *ii*) y explique qué es lo que hace B&B utilizando el gráfico.

b) (4 puntos) Considere el grafo $G = (V, E)$ con $V = \{1, .., 6\}$, cuya matriz de incidencia es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además, sus costos y demandas (u ofertas) respectivamente son:

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \\ 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

i) (1 punto) Grafique el grafo G asociado a este problema de flujo a costo mínimo.

ii) (3 puntos) Resuelva el problema con el método de Simplex especializado en redes y explique gráficamente cada iteración.

c) (5 puntos) Usted irá de vacaciones con unos amigos a Utopía. Un amigo le contó que por la falta de utopesos en Chile, no le conviene cambiar directamente pesos chilenos en utopesos. En chile existen m tipos de monedas a las cuales se puede cambiar (contando los utopesos).

Usted no quiere cambiar en cualquier lugar, por lo que tomará en cuenta n casas de cambio distintas. La casa de cambio i ofrece una tasa de cambio de compra y venta entre la moneda j y la moneda k de c_{ijk} y v_{ijk} respectivamente.

Al visitar las casas de cambio para cotizar, descubrió que existe un conjunto de casas R, que lo define como las empresas problemáticas. Es decir, la casa de cambio $i \in R$ le dice que no le dejará cambiar si es que además cambia en alguna otra casa del conjunto R_i, ya que él encuentra que aquel conjunto es su competencia directa.

Además, como algunas casas de cambio son pequeñas, no puede cambiarle en grandes cantidades. Esto se traduce en que la casa de cambio i puede cambiarte a los más d_{ij} de la moneda tipo j. El conjunto de empresas pequeñas lo denominaste P al reunir la información.

Entre sus amigos quieren cambiar β pesos chilenos y le piden escribir un problema de optimización que maximice los utopesos.

Solución Problema 3.

a) *i*) Como las funciones objetivo son iguales, basta con demostrar $Q \subseteq S$ para demostrar que P) es una relajación de IP basta con probar que los puntos de Q cumplen las restricciones de P). Por otro lado, para demostrar que $S \cap \mathbb{Z}^2 \subseteq Q$, tenemos que jugar un poco con las desigualdades de P). Al tomar $x_2 \geq 1,5$, como x_2 es entero en Q, podemos asegurar que en $S \cap \mathbb{Z}^2$ la restricción $x_2 \geq 2$ es valida y de la misma manera $x_1 \geq 3$ también lo es. Luego, al tomar $x_1 + 2x_2 \leq 12,5$, al usar que como las contantes de las variables son enteras, podemos usar la función piso y queda la desigualdad $x_1 + 2x_2 \leq 12$ valida, podemos usar sobre esto que $x_1 \geq 3$, para asegurar que $x_2 \leq 4$.

Por último, al tomar $x + y \leq 8$ (de la restricción $x + y \leq 8,5$) y $2x - y \leq 8$ (de la restricción $1,5x_1 - 0,75x_2 \leq 6$) podemos sumarlas y nos da que $x_1 \leq \frac{16}{3}$ y al tomar función piso, tenemos que $x_1 \leq 5$.

Ahora tenemos que los puntos de $S \cap \mathbb{Z}^2$ están metidos en el cuadrado $3 \leq x_1 \leq 5, \ \ 2 \leq x_2 \leq 4$, por lo que el único punto que podría llevar a problemas es el $(5, 4)$, pero ese punto viola la restricción $x_1 + x_2 \leq 8,5$. Por lo que hemos demostrado que se cumple la igualdad.

ii) Resolveremos a través del método gráfico.

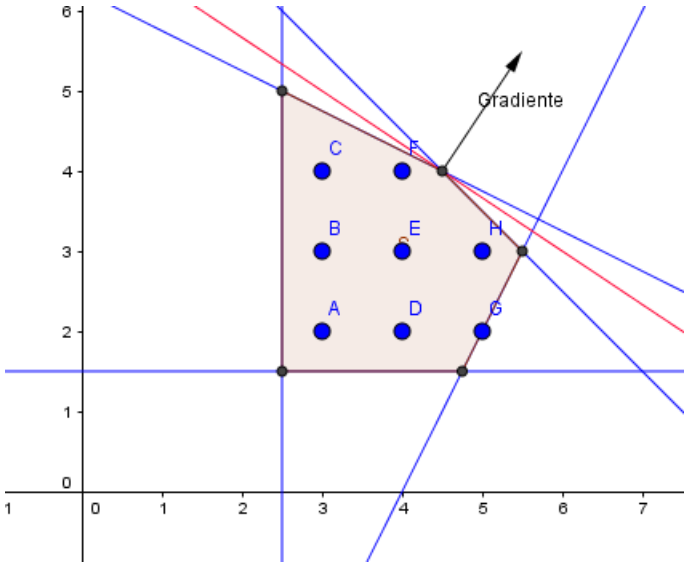


Figura 5: Solución de P).

En la figura 5 se ve que el óptimo es el $(\frac{9}{2}, 4)$ que es la intersección entre $x+y = 8{,}5$ y $x+2y = 12{,}5$ Al

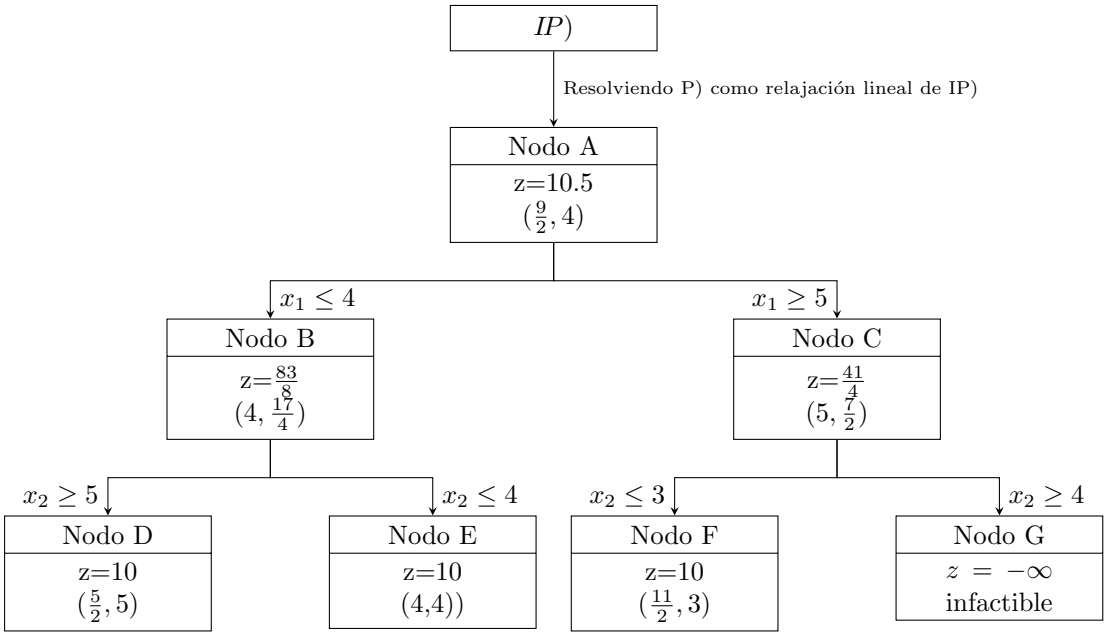


Figura 6: Recuperación de la resolución de IP).

al hacer B&B, llegaremos a un árbol como el que se ve en la figura 6. En donde el nodo D y F se podan, ya que el incumbente es 10 y solo nos interesa una solución óptima (se podría seguir en

caso de querer múltiples soluciones).

iii) Lo pedido se ve en la figura 7

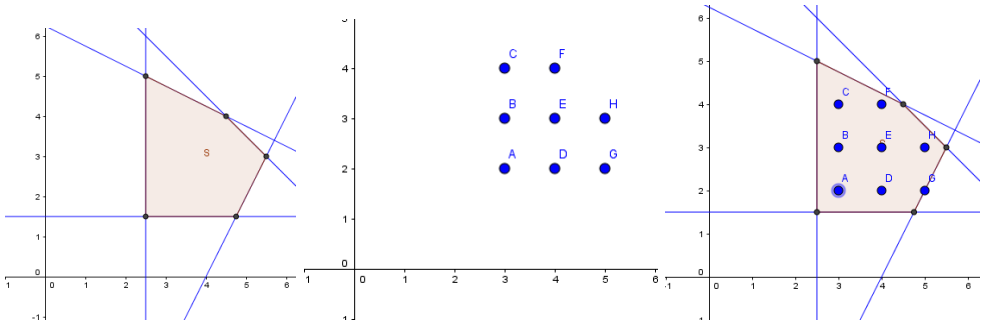


Figura 7: Se puede ver el poliedro P), IP) y ambos juntos.

iv) La representación de cada nodo, con excepción del problema infactible, se puede ver en las figuras 8,9, 10,11, 12 y 13.

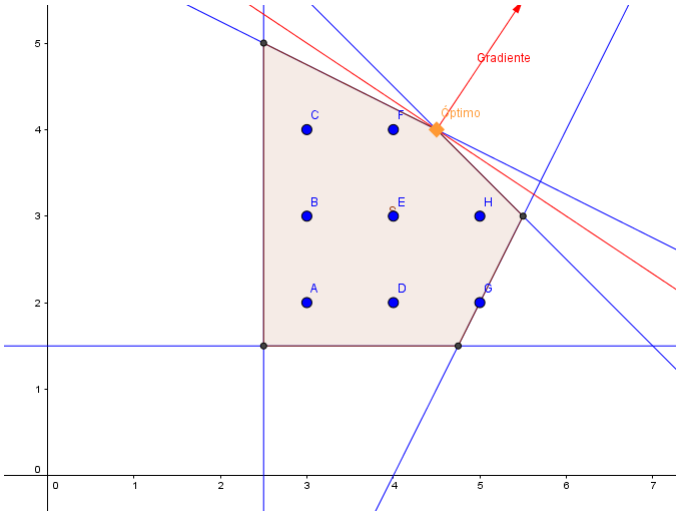


Figura 8: Problema asociado al Nodo A.

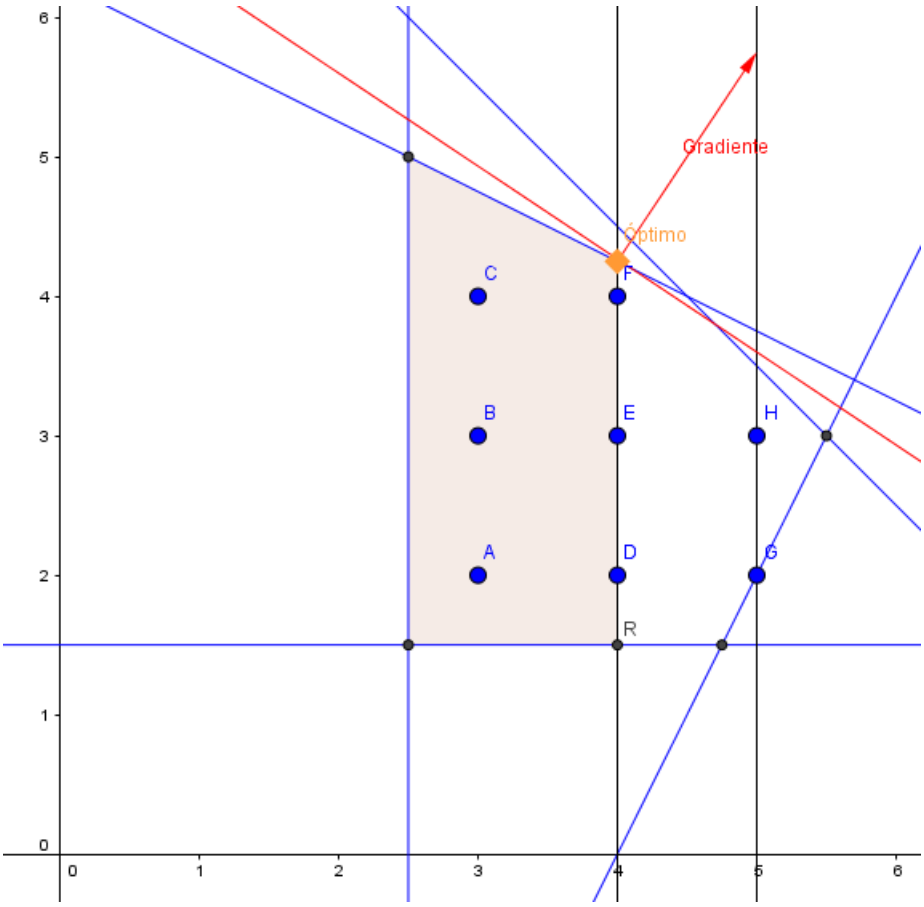


Figura 9: Problema asociado al Nodo B.

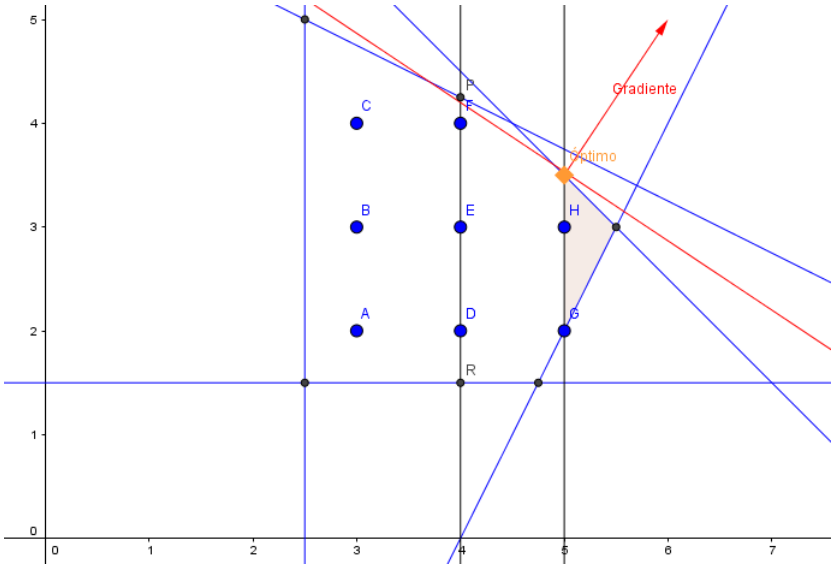


Figura 10: Problema asociado al Nodo C.

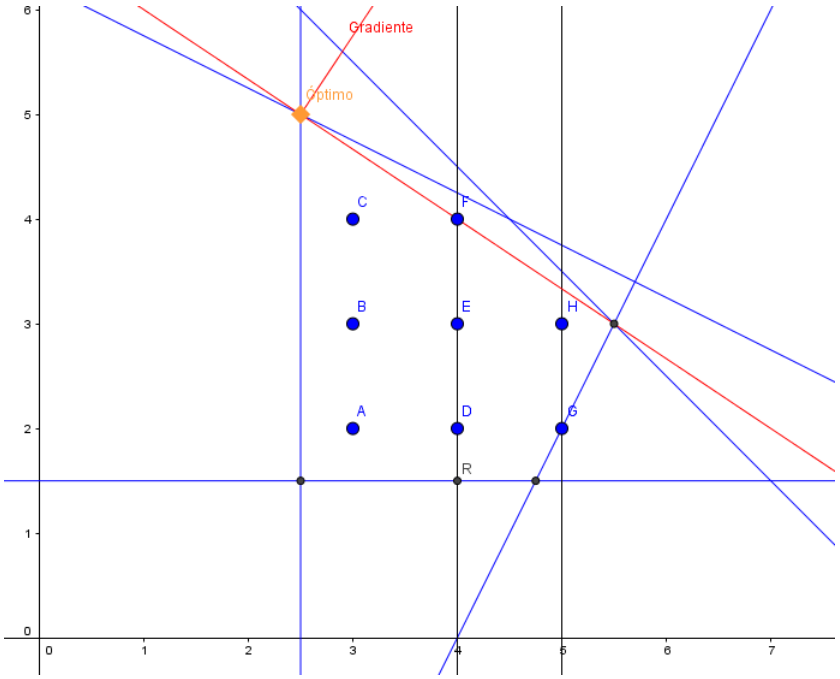


Figura 11: Problema asociado al Nodo D.

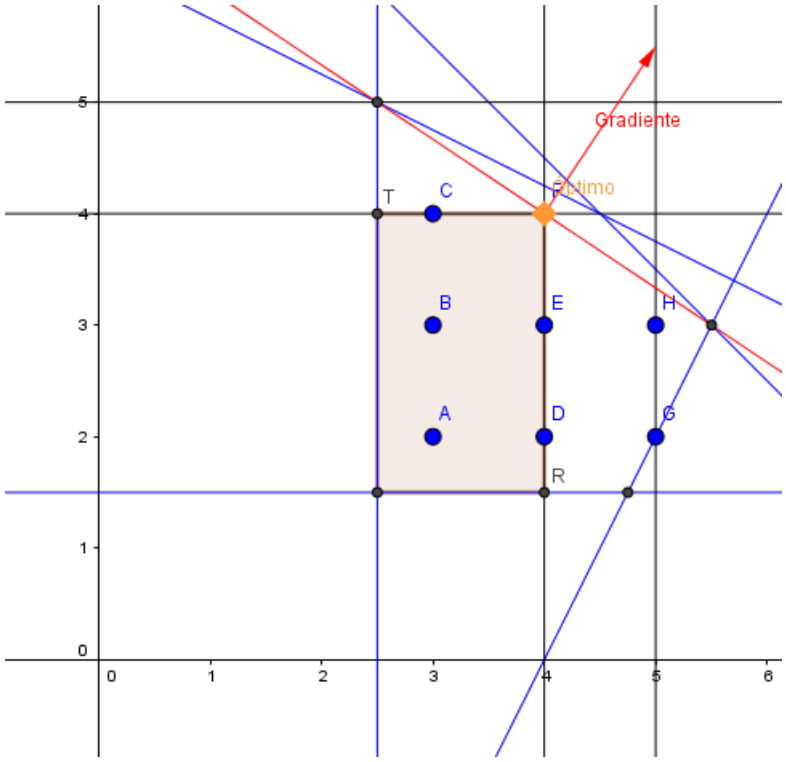


Figura 12: Problema asociado al Nodo E.

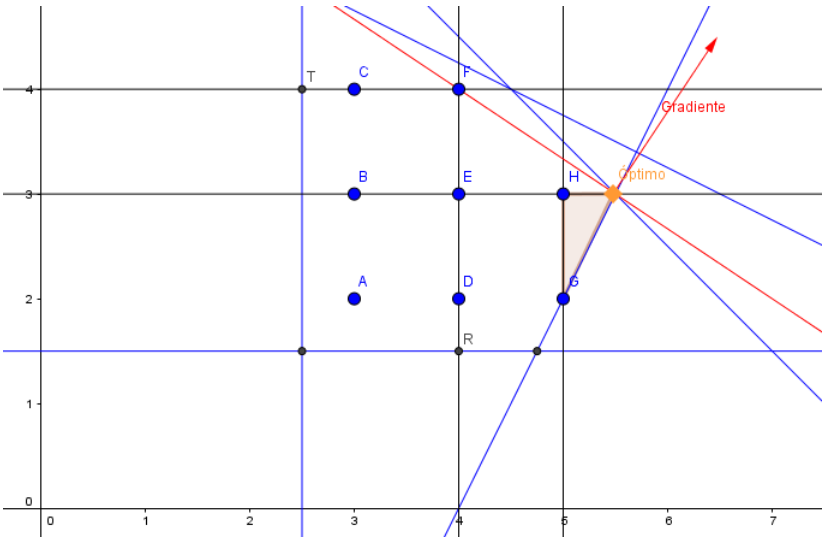


Figura 13: Problema asociado al Nodo F.

b) *i*) El dibujo del grafo se puede ver en la figura 14, en donde los valores al lado de los nodos son los costos y los valores en recuadro al lado de los nodos son la oferta o demanda.

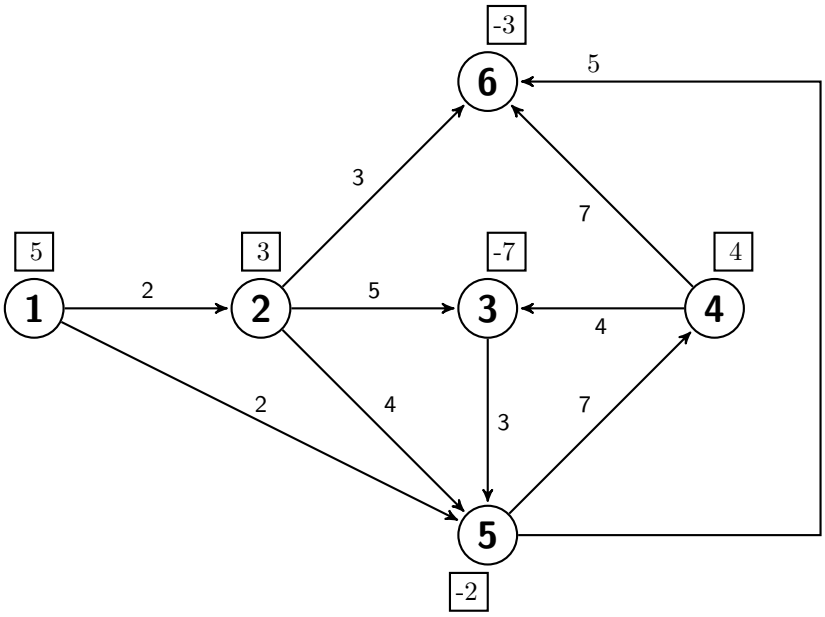


Figura 14: Grafo G asociado al problema de flujo de costo mínimo.

ii) Primero tomamos una base, para la cual tomaremos la que se ve en la figura 15 en donde los números que acompañan a los arcos son los flujos que pasan por el. Como se puede ver, es una base, ya que es un árbol generador y es factible porque todos los flujos son positivos.

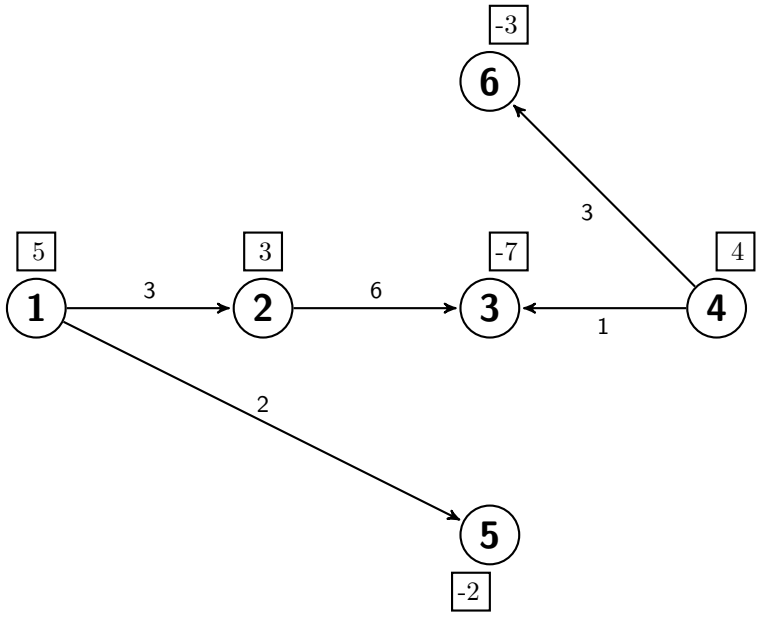


Figura 15: Base factible inicial con los flujos en los arcos.

En este punto, nos queda el sistema

$$\begin{aligned}
\pi_1 - \pi_5 &= 2 \\
\pi_1 - \pi_2 &= 2 \\
\pi_2 - \pi_3 &= 5 \\
\pi_4 - \pi_3 &= 4 \\
\pi_4 - \pi_6 &= 7,
\end{aligned}$$

en el cual podemos tomar $\pi_6 = 0$, con lo que nos queda $\pi = (10, 8, 3, 7, 8, 0)$, con lo que los costos reducidos son $\overline{c}_{26} = -5$, $\overline{c}_{25} = 4$, $\overline{c}_{35} = 8$, $\overline{c}_{54} = 6$, $\overline{c}_{56} = -3$, por lo que ingreso el arco $(2, 6)$. Tenemos que ver el valor de Δ para que un arco desaparezca del ciclo que se ve en la figura 16, por lo que podemos incrementar Δ hasta 3 y sacar el arco $(4, 6)$.

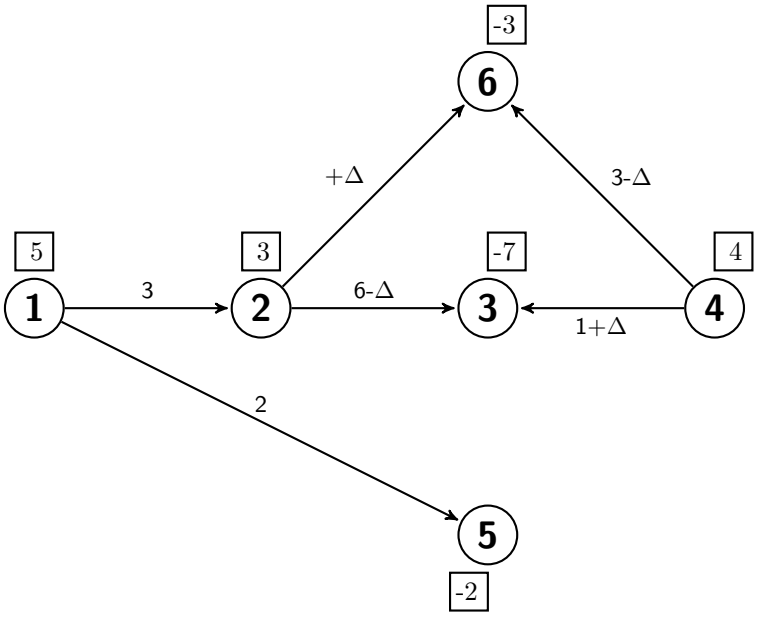


Figura 16: Primer ingreso de arco e incremento.

Luego, podemos ver que el nuevo árbol básico factible es el que se ve en la figura 17. Para ver optimalida, podemos tomar resolver el sistema

$$\begin{aligned}\pi_1 - \pi_2 &= 2\\ \pi_1 - \pi_5 &= 2\\ \pi_2 - \pi_3 &= 5\\ \pi_2 - \pi_6 &= 3\\ \pi_4 - \pi_3 &= 4,\end{aligned}$$

tomando $\pi_3 = 0$, con lo que nos queda que $\pi = (7, 5, 0, 4, 5, 2)$. Al calcular los costos reducidos nos queda que $\overline{c}_{25} = 4$, $\overline{c}_{35} = 8$, $\overline{c}_{54} = 6$, $\overline{c}_{56} = 2$ y $\overline{c}_{46} = 5$, por lo que estamos en el óptimo y la función objetivo vale 50 con el vector de flujos $x = (3, 2, 3, 0, 3, 0, 4, 0, 0, 0)$ según el orden entregado por la matriz de incidencias.

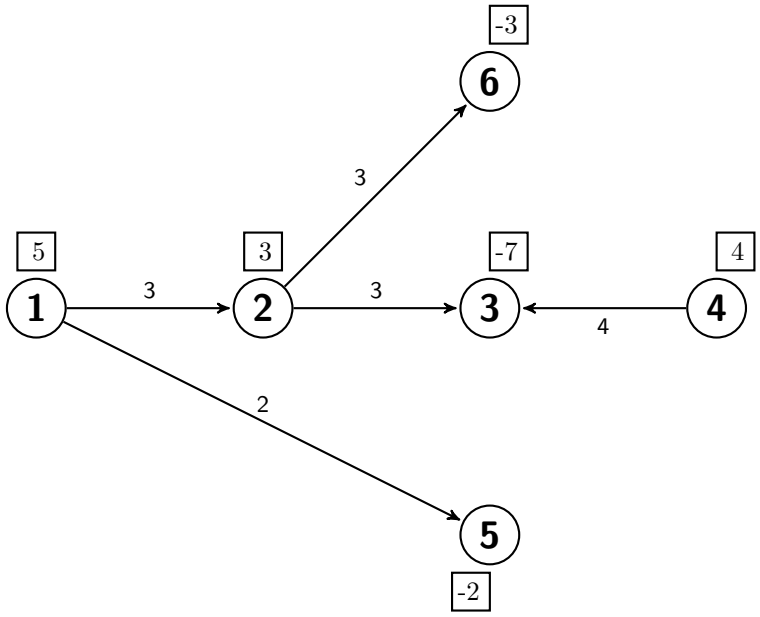


Figura 17: Segunda base factible y óptima.

c) Antes de trabajar, podemos ver que la tasa de compra y venta definen dos caminos para llevar plata en j a plata en k, el comprar con c_{jk} o el vender con tasa $v_{k,j}$, pero si queremos llevar dinero de j a k (monedas), entonces uno de los caminos es mejor, por eso es que podemos tomar $r_{ijk} = \text{máx}\{c_{ijk}, \frac{1}{v_{ikj}}\}$ como la tasa de cambiar de j a k en la casa de cambio i, es decir, si ingreso $1[j]$ en la casa i salen $r_{ijk}[k]$. Además, podemos decir que el conjunto de las casas se extenderá a $I = \{0, 1, .., n\}$, donde el 0 me representa a mí, también podemos ordenar el conjunto de las monedas como $J = \{1, .., m\}$ donde la moneda 1 son los pesos chilenos y la m son los utopesos.

Con esto en mente, podemos hacer el modelo. **VARIABLES:**

$$y_i := \begin{cases} 1 \text{ , si cambio alguna vez en la casa i} \\ 0 \text{ , en otro caso.} \end{cases}$$

$x_{i,j,l,k} :=$ Variable positiva que se puede ver como un arco entre nodos de tuplas (i, j) e (l, k) donde las tuplas son (casa,moneda).

Además, agregaremos una variable auxiliar α que será la cantidad de utopesos al final.

Pero para que se entiendan las variables x's, debemos dar la interpretación por partes, es decir:

$x_{l,j,l,k} :=$ Cuantos j's cambio en la casa l por monedas del tipo k. Es decir, su unidad de medida es [j].

$x_{l,j,i,k} :=$ Cuantos j's muevo de la casa l a la casa i. Es decir, su unidad de medida es [j].

Función objetivo:

$$\max \alpha$$

Restricciones:

◇ Conservación de flujos.

$$\sum_{\substack{i \in I \\ i \neq l}} x_{iklk} + \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq k}} x_{ljlk} r_{ljk} = \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq l}} x_{lkik} + \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq k}} x_{lklj} \quad \forall l \in I \setminus \{0\} \quad , \forall k \in J.$$

◇ Solo partimos con β pesos.

$$\sum_{\substack{i \in I \\ i \neq 0}} x_{01i1} = \beta.$$

◇ Definimos α.

$$\sum_{\substack{i\in I\\ i\neq 0}} x_{im0m} = \alpha.$$

◇ Empresas pequeñas.

$$\sum_{\substack{j\in J\\ j\neq k}} x_{ljlk} r_{ljk} - \sum_{\substack{j\in J\\ j\neq k}} x_{lklj} \leq d_{lk} \quad \forall l \in P \ \ , \forall k \in J.$$

◇ Empresas problemáticas.

$$\sum j, k \in J x_{ljlk} \leq (1 - y_i) M_1 \quad \forall l \in R, \ \ \forall i \in R_l.$$

◇ Definir y_i.

$$\sum j, k \in J x_{ijik} \leq M_2 y_i.$$

Cabe destacar que solo se trabaja con i, si es que se cambian monedas con él.

◇ Eliminar algunos $x's$ para que todo funcione bien, como que no se puede cambiar de una casa a otra distintas monedas, para así no tener que definir mas parámetros.

$$x_{ijlk} = 0 \quad \forall i, l \in I, \ \ j, k \in J, \text{ si } i \neq l \text{ y } j \neq k.$$

Para definir bien la casa 0 (es decir yo como casa), debemos definir que

$$x_{0jlk} \quad \forall j \in J \setminus \{1\},$$

$$x_{ij0k} \quad \forall k \in J \setminus \{m\}.$$

Además, debemos eliminar los loop, lo que se hace con

$$x_{klkl} = 0 \ \ \forall k \in I, \ j \in J.$$

Cabe mencionar que estas restricciones no se colocan si es que se instancian menos x's, pero como los instanciamos todos al definir las variables, debemos asegurar que estas valgan 0, ya que sino estará mal definida la red que esta detrás del problema.

◇ Naturaleza de las variables.

$$x_{i,j,l,k} \geq 0 \quad i, l \in I, \ \ \forall j, l \in J$$

$$y_i \in \{0, 1\} \ \ \forall i \in I$$

Se usan M_1 y M_2 como variables suficientemente grandes.

Problema 4. (15 puntos)

a) (6 puntos) Usted ha sido contratado por Copelquin S.A. una nueva empresa de minería. Sus jefes le han dicho que quieren optimizar la extracción del mineral en un terreno con un yacimiento a "tajo abierto".

Un compañero tuyo del trabajo ha hecho un mallado del terreno de los dueños de la empresa. Utilizó unas mediciones que ya estaban hechas y logró tener la "ley" en cada cubo del mallado. Le contó que tiene n cubos de igual tamaño y que en cada uno definió d_i como la cantidad de mineral que el estimó para sacar de la celda i (en toneladas) con $i \in \{1, .., n\}$.

Una de las dificultades es que cuando queremos sacar la celda i, tenemos que sacar las celdas de "arriba". Es de sentido común que si sacamos una línea recta hacia abajo, las paredes se desmoronarán. Es por esto que él te definió para la celda i el conjunto C_i, que contiene las celdas que son necesarias sacar antes de sacar la celda i, para así asegurarte que no habrá desmoronamiento.

Como la minería esta pasando por una crisis, los dueños te dicen que están dispuestos a gastar α (millones de pesos) en este yacimiento y quieren que el proyecto dure a los más q periodos.

Además, su jefe le dice que por temas de logística y contratos, una vez que se comienza a explotar una celda, se debe explotar entera (lo que dura 1 periodo). El costo de explotación de la celda i está definido

como uno monetario k_i (pesos) y se utiliza h_i horas hombre, de las cuales ya se tienen contratadas un total de f para todo el proyecto. Por estudios previos, se sabe que el mineral se vende a β_t (pesos) la tonelada. Por otro lado, los dueños no quieren incurrir en bodegas, solo cuentan con una pequeña bodega que alcanza a almacenar lo producido en un solo periodo, por lo que debes vender todo al final de este. Es decir, si en el periodo t estoy extrayendo la celda i, al final del periodo vendo lo que extraje a precio β_t.

Se le pide modelar el problema con un modelo de programación lineal mixto que maximice las utilidades del proyecto.

b) (7 puntos) Considere un problema lineal de optimización en su forma estándar y asuma que la matriz A tiene sus filas linealmente independiente. Por cada una de las siguientes afirmaciones, demuéstrelas o dé un contraejemplo.

i) (2 puntos) Sea x^* una solución básica factible. Suponga que para cada base correspondiente a x^*, la solución básica asociada al dual es infactible. Entonces, el costo óptimo debe ser estrictamente menor a $c^T x^*$.

ii) (2 puntos) El dual del problema auxiliar asociado a Fase I de Simplex es siempre factible.

iii) (2 puntos) Sea y_i la variable dual relacionada con la i-ésima restricción del primal. Eliminar la restricción en el primal es equivalente a introducir una restricción $y_i = 0$ en el problema dual.

iv) (1 punto) Si el criterio de no acotamiento en el algoritmo de Simplex (para el primal) es satisfecho, entonces el problema dual es infactible.

c) (2 puntos) Demuestre que al bajar en un árbol de B&B de un problema de maximización, la función objetivo no aumenta.

Solución Problema 4.

a) **VARIABLES:**

$$x_{i,t} := \begin{cases} 1 \text{ si se explota la celda } i \text{ en el periodo } t. \;\; i = 1..n, \;\; t = 1..q. \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Función objetivo:

$$\max \sum_{i=1}^{n} \left(d_i \sum_{t=1}^{q} x_{it}\beta_t - k_i \sum_{t=1}^{q} x_{it} \right)$$

Restricciones:

◇ Solo se extrae una celda una vez en el horizonte de tiempo.

$$\sum_{t=1}^{q} x_{it} \leq 1, \qquad \forall i \in \{1, .., n\}.$$

◇ Solo se puede extraer una celda si el cono de arriba es extraído antes.

$$x_{it} \leq \sum_{s=1}^{t-1} x_{js}, \qquad j \in C_i, \;\; \forall i \in \{1, .., n\}, \;\; \forall t \in \{1, .., q\}.$$

◇ Las horas hombres no se exceden de f.

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \sum_{t=1}^{q} x_{it} \leq f.$$

◇ No se gasta más que el presupuesto.

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \sum_{s=1}^{t} x_{it} - \sum_{i=1}^{n} d_i \sum_{s=1}^{t-1} x_{it}\beta_t \leq 10^6\alpha, \qquad \forall t \in \{1,..,0\}.$$

Si usan o asumen que es con que no se reinvierten las ganancias se les toma en cuenta la siguiente restricción, pero se les quita un punto. Si colocan esta restricción sin hacer ningún supuesto se les resta 2 puntos.

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \sum_{t=1}^{q} x_{it} \leq 10^6\alpha.$$

◇ Naturaleza de las variables.

$$x_{i,t} \in \{1,0\}, \qquad \forall i \in \{1,..,n\}, \quad \forall t \in \{1,..,q\}.$$

b) *i)* Verdadero. Supongamos que el costo óptimo es $c^T x^*$, entonces hay una base óptima asociada con esta solución básica factible. La correspondiente solución básica dual (dualidad fuerte) es factible y óptima también. Lo que contradice que cada base da un dual infactible. Por lo tanto el costo óptimo es estrictamente menor que $c^T x^*$. Esto usa también que como es un problema de minimización y x^* es factible, entonces sabemos que el costo óptimo es menor o igual a $c^T x^*$.

ii) Verdadero. El primal de Fase I es siempre factible y por construcción, su función objetivo esta acotada por 0, por lo que tiene valor finito. Por lo tanto, el dual tiene valor óptimo finito y una solución básica factible (se puede sacar por Holguras Complementarias).

iii) Verdadero. Sea $a_i^T x = b_i$ la i-ésima restricción de igualdad del problema primal, a_i es la i-ésima fila de la matriz A (representada como un vector). Recordemos que las restricciones del dual son de la forma $A^T p \leq c$, donde cada restricción es $\sum_j a_{j,k} p_j \leq c_k \ \ \forall k$ donde la i-ésima fila a_is se descompone en $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, .., a_{in})$. Entonces podemos ver que al eliminar la i-ésima restricción del primal, eso implica que en dual se eliminan los termino con p_i, es decir se elimina el termino $a_{ik}p_i$ en todos los k y el termino $p_i b_i$ de la función objetivo, así se puede ver claramente que es equivalente a hacer $p_i = 0$, ya que eso solo afecta en eliminar esos terminos y ningún otro.

iv) Verdadero. El criterio de no acotamiento de Simplex en el primal se reduce a que el problema primal es no acotado, por lo tanto su función objetivo vale $-\infty$. Por dualidad débil se tiene que el dual es infactible.

Veamos como nos sirve dualidad débil, asumamos que el dual es factible, por dualidad débil tenemos que el primal esta acotado, pero eso contradice el criterio de no acotamiento de Simplex para el primal (por lo de arriba), por lo tanto, el dual es infactible.

c) Sea P el poliedro original (no necesariamente lineal). Si tomamos una relajación lineal PL por definición tenemos que $PL \subseteq P$. Al bajar en el árbol de $B\&B$ tenemos que a PL se le agrega al menos una restricción. Esta restricción lo que hace es eliminar x^*_{PL}, siendo este el óptimo del problema PL. Por lo tanto PL_1^R y PL_1^L, siendo la rama de la derecha y de la izquierda al bajar una ves, tenemos que al menos sacamos al óptimo de PL, por lo que tenemos que $PL \subseteq PL_1^R$ y $PL \subseteq PL_1^L$. Además, como el problema es de maximización, al maximizar una función f sobre conjuntos con la propiedad anterior, tenemos que $\max\{f(x) : x \in PL\} \geq \max\{f(x) : x \in PL_1^R\}$ y $\max\{f(x) : x \in PL\} \geq \max\{f(x) : x \in PR_1^R\}$. Ahora si tomamos PL_1^R y PL_1^L como nuevos PL's tenemos lo pedido.