PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2013
Profesores: P. Álvarez - A. Cataldo - R.Giesen
A. Lüer - V. Valdebenito

Pauta Interrogación 2

Duración: 2 horas y 30 minutos.

Se debe contestar en cuadernillos independientes: ***Pregunta 1 Partes a), b) y c)****;* ***Pregunta 1 Partes d), e) y f)****;* ***Pregunta 2****; y* ***Pregunta 3****. En cada uno de ellos debe colocar su nombre y número de lista asignado.* ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras y de celulares de cualquier tipo.*

Pregunta 1 (20 puntos)

a) (**5 puntos**) Considere el siguiente tableau en forma estándar:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1/3	2/3	1	1/3	0	8
2/3	1/3	0	−1/3	1	2
−4/3	−2/3	0	5/3	0	40

Asumiendo que x_4 y x_5 son variables de holguras no negativas sumadas a las restricciones de igualdad, escriba la formulación del problema original.

Respuesta: Como x_4 y x_5 son variables de holgura sumadas al problema original, sus columnas en el tableau inicial forman una identidad, por lo que:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

luego,

$$B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 1 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 1 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

con lo que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

luego,

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow b = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 10 \end{bmatrix}$$

finalmente, los coeficientes de costos de las variables de holgura son $c_4 = c_5 = 0$. En la solución del tableau el valor de la función objetivo es -40 y $x_3 = 8$, por lo que $c_3 = -5$. Con esto se tiene que $c_B = \begin{bmatrix} -5 & 0 \end{bmatrix}^T$, y se sabe que $c_R = \bar{c_R} + c_B\bar{R}$

Resolviendo, el problema original en forma estándar es:

$$
\begin{array}{rlrcrcrcrcrcl}
Z = \text{mín} & -3x_1 & + & 4x_2 & - & 5x_3 & & & & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & & = & 24 \\
& x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_5 & + & x_5 & = & 10 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

b) (**3 puntos**) Indique si las siguiente aseveración es verdadera o falsa. El sistema $Ax \leq b$ es factible si y sólo si las filas de A son linealmente independientes. Justifique su respuesta demostrando o usando un contraejemplo.

RESPUESTA: Falso, por ejemplo $x_1 \leq 1$ y $x_1 \leq 3$. En este caso ambas restricciones son linealmente dependientes y cualquier valor $x_1 \leq 1$ es factible.

c) (**5 puntos**) Demuestre usando dualidad que si existe un vector p que satisface $pA \leq 0$ y $p^T b < 0$, entonces no existe un vector $x \geq 0$ que satisfaga $Ax = b$.

RESPUESTA: Para ello, consideremos el siguiente problema primal:

$$
\begin{array}{rlcl}
P)\,\text{máx} & 0 \cdot x & & \\
\text{s.a.} & Ax & = & b \\
& x & \geq & 0
\end{array}
$$

para lo cual definimos como p a las variables duales de P), quedando el dual como:

$$
\begin{array}{rlcl}
D)\,\text{mín} & b^T \cdot p & & \\
\text{s.a.} & p^T A & \geq & 0
\end{array}
$$

de donde se tiene que demostrar que si D) es factible, entonces P) no lo es. Supongamos que P) es factible, entonces existe $x \geq 0$ tal que $Ax = b$ y consideremos una solución factible de D) tal que $p^T A \geq 0$. Multiplicando por x se tiene que $p^T Ax \geq 0$ entonces $p^T b \geq 0$, con lo que tenemos una contradicción pues no se cumple que $p^T b < 0$. Luego, no existe $x \geq 0$ tal que $Ax = b$.

d) (**2 puntos**) Considere el método simplex aplicado a un problema en forma estándar y asuma que todas las filas de la matriz A son linealmente independientes. Indique si las siguientes aseveraciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas demostrando o usando un contraejemplo en cada caso.

i) Si existe una base óptima no degenerada, entonces la base óptima es única.

ii) Sea y_i la variable dual asociada a la i-ésima restricción del primal. ¿Eliminar esa restricción en el primal es equivalente a introducir la restricción $y_i = 0$ en el dual?

RESPUESTA:

i) Es claramente falso. Cualquier problema con múltiples soluciones sirve como contraejemplo para argumentar. Por ejemplo el siguiente problema posee múltiples soluciones óptimas.

$$
\begin{array}{rlrcrcl}
Z = \text{máx} & x_1 + x_2 & & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
& x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

ii) Verdadero. Eliminar una restricción puede representarse como que el recurso, digamos $b_i = M >> 0$. Entonces, la restricción no será activa nunca, y por teorema de holgura complementaria se sabe que la variable dual de una restricción inactiva toma valor igual a 0.

e) (**5 puntos**) Considere $n \geq 2$ y el siguiente problema de programación lineal continua:

$$(P)\begin{cases} \text{mín} & x_1 & + & 2x_2 & + & \ldots & + & nx_n & & \\ s.a: & x_1 & & & & & & & \geq & 1 \\ & x_1 & + & x_2 & & & & & \geq & 2 \\ & \vdots & & \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ & x_1 & + & x_2 & + & \ldots & + & x_n & \geq & n \\ & x_1 & , & x_2 & , & \ldots & , & x_n & \geq & 0 \end{cases}$$

i) (2 puntos) Pruebe que para toda solución factible del dual se tiene que $y_k + y_{k+1} + \ldots + y_n < k$, para todo $k \in \{2, \ldots, n\}$.

ii) (3 puntos) Utilice el teorema de holguras complementarias para encontrar la solución óptima de P).

Respuesta:

i) (2 puntos) Primero construyamos el dual de P), que es:

$$(D)\begin{cases} \text{máx} & y_1 & + & 2y_2 & + & \ldots & + & ny_n & & \\ s.a: & y_1 & + & y_2 & + & \ldots & + & y_n & \leq & 1 \\ & & & y_2 & + & \ldots & + & y_n & \leq & 2 \\ & & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & y_n & \leq & n \\ & y_1 & , & y_2 & , & \ldots & , & y_n & \leq & 0 \end{cases}$$

ahora podemos apreciar claramente de las primera restricción del dual que $y_1 + y_2 + \ldots + y_n \leq 1$, entonces $y_k + y_{k+1} + \ldots + y_n < y_1 + y_2 + \ldots + y_n \leq 1 < k$ para todo $k \in \{2, \ldots, n\}$.

ii) (3 puntos) Sea x^* óptimo de P) e y^* óptimo de D). Por el teorema de holgura complementaria se sabe que en el óptimo $x^* \left(c - A^t y^*\right)_k = 0$, para todo $k = 1, \ldots, n$. Como y^* es óptimo de D), entonces es factible, luego de la parte i) tenemos que $\left(c - A^t y^*\right)_k = k - (y_k + y_{k+1} + \ldots + y_n)$ si $k \in \{2, \ldots n\}$, esto implica que $x_k^* = 0$ si $k \in \{2, \ldots n\}$. Finalmente el problema dual, usando que $x_k^* = 0$ si $k \in \{2, \ldots n\}$, queda:

$$(D)\begin{cases} \text{máx} & x_1 & & \\ s.a: & x_1 & \geq & 1 \\ & x_1 & \geq & 2 \\ & \vdots & & \vdots \\ & x_1 & \geq & n \\ & x_1 & \geq & 0 \end{cases}$$

cuya solución es claramente $x_1 = n$. Luego, la solución del problema primal es $x = (n, 0, \ldots, 0)$.

Bono (6 puntos) Puede responder la siguiente pregunta para obtener una bonificación extra máxima de 6 puntos.

f) (**6 puntos**) Utilice el algoritmo simplex para demostrar que el punto $(0, 1)$ es la solución óptima del siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & \frac{x_1+1}{x_2+2} & & \\ & \text{s.a.} \quad x_1 & + & x_2 \leq 1 \\ & x_1 & , & x_2 \geq 0 \end{array}$$

RESPUESTA: Como el problema presenta una función objetivo no lineal, debemos realizar un cambio de variables adecuado. En este caso usaremos:

$$u_1 = \frac{1}{x_2+2} \quad u_2 = \frac{x_1}{x_2+2} \quad u_3 = \frac{x_2}{x_2+2}$$

usando este cambio de variables el problema auxiliar queda:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{mín} & u_1 + u_2 & & & & & & \\ & \text{s.a.} & - & u_1 & + & u_2 & + & u_3 & \leq 0 \\ & & & 2u_1 & + & u_2 & & & = 1 \\ & & & u_1 & , & u_2 & , & u_3 & \geq 0 \end{array}$$

Construyamos la forma estándar el problema auxiliar que queda, dándonos cuenta que se cumple la relación $2u_1 + u_3 = 1$:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \text{mín} & u_1 + u_2 & & & & & & & & \\ & \text{s.a.} & - & u_1 & + & u_2 & + & u_3 & + & u_4 & = 0 \\ & & & 2u_1 & & & + & u_3 & & & = 1 \\ & & & u_1 & , & u_2 & , & u_3 & , & u_4 & \geq 0 \end{array}$$

Se puede observar que la solución $x = (0, 1)$ en el problema auxiliar es $u = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0\right)$. Las variables básicas son: $\{u_1, u_3\}$ y las no básicas son $\{u_2, u_4\}$.

El criterio de optimalidad de simplex queda:

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_2 & \bar{c}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

con lo cual se comprueba que la solución entregada es la solución óptima del problema original.

Pregunta 2 (20 puntos)

Parte A

Considere el siguiente optimización lineal

$$(P) \begin{cases} \begin{array}{lrcrcl} \text{mín} & x_1 & - & 2x_2 & & \\ s.a: & x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\ & -x_1 & + & x_2 & \geq & 1 \\ & & & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array} \end{cases}$$

i) **(4 puntos)** Encuentre una solución básica factible mediante Fase I del algoritmo Simplex

ii) **(4 puntos)** Resuelva mediante la Fase II del algoritmo simplex comenzando desde el vértice encontrado en la parte i).

iii) **(2 puntos)** Explique y muestre gráficamente la ruta utilizada por las Fases I y II para alcanzar la solución óptima encontrada en la parte ii).

Respuesta:

i) Construimos la forma estándar del problema P), que queda:

$$(F.E.P)\begin{cases} \text{mín} & x_1 - 2x_2 & & & & & & & & & \\ s.a: & x_1 + x_2 - x_3 & & & & & & & = & 3 \\ & -x_1 + x_2 & & - x_4 & & & = & 1 \\ & & x_2 & & & + x_5 & = & 3 \\ & x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 & \geq & 0 \end{cases}$$

Construimos ahora el problema auxiliar para realizar Fase I. Para ello, agregamos las variables t_1 y t_2 de manera de que aparezca la matriz identidad en el tableau. Esto queda:

$$(P.Auxiliar)\begin{cases} \text{mín} & & & & & & & & & t_1 + t_2 & & \\ s.a: & x_1 + x_2 - x_3 & & & & & + t_1 & & = & 3 \\ & -x_1 + x_2 & & - x_4 & & & + t_2 & = & 1 \\ & & x_2 & & & + x_5 & & = & 3 \\ & x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , t_1 , t_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

El tableau inicial queda:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2	
1	1	−1	0	0	1	0	3
−1	1	0	−1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	3
0	0	0	0	0	1	1	

para comenzar a iterar debemos asegurarnos que los costos reducidos de t_1 y t_2 sean 0 (son variables básicas). Para ello, le restamos la fila 1 y la fila 2 a la fila 4, con lo que obtenemos el siguiente tableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2	
t_1	1	1	−1	0	0	1	0	3
t_2	−1	1	0	−1	0	0	1	1
x_5	0	1	0	0	1	0	0	3
	0	−2	1	1	0	0	0	4

Seleccionamos x_2 para que entre a la base y t_2 para que la abandone. Luego, realizando las operaciones necesarias para que la columna asociada a x_2 se transforme en el segundo vector canónico y su costo reducido sea 0, se tiene el siguiente tableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2	
t_1	2	0	−1	1	0	1	−1	2
x_2	−1	1	0	−1	0	0	1	1
x_5	1	0	0	1	1	0	−1	2
	−2	0	1	−1	0	0	2	2

Seleccionamos x_1 para que entre a la base y t_1 para que la abandone. Luego, realizando las operaciones necesarias para que la columna asociada a x_1 se transforme en el primer vector canónico y su costo reducido sea 0, se tiene el siguiente tableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2	
x_1	1	0	−1/2	1/2	0	1/2	−1/2	1
x_2	0	1	−1/2	−1/2	0	1/2	1/2	2
x_5	0	0	1/2	1/2	1	−1/2	−1/2	1
	0	0	0	0	0	1	1	0

como se puede apreciar, los costos reducidos de todas las variables no básicas son ¿0, por lo tanto, tenemos una solución inicial de P) donde $(x_1, x_2) = (1, 2)$.

ii) El tableau que obtenemos de la parte i), visto en el problema en forma estándar de P) es:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	$-1/2$	$1/2$	0	1
0	1	$-1/2$	$-1/2$	0	2
0	0	$1/2$	$1/2$	1	1
1	-2	0	0	0	

Para utilizar la base obtenida en la parte i) debemos asegurarnos que los costos reducidos de las variables básicas, x_1, x_2 y x_5 tengan costo reducido igual a 0. Ocupándonos que esto sea así obtenemos el siguiente tableau inicial:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	$-1/2$	$1/2$	0	1
x_2	0	1	$-1/2$	$-1/2$	0	2
x_5	0	0	$1/2$	$1/2$	1	1
	0	0	$-1/2$	$-3/2$	0	-3

Seleccionamos x_4 para que entre a la base y x_1 para que la abandone. Luego, realizando las operaciones necesarias para que la columna asociada a x_4 se transforme en el primer vector canónico y su costo reducido sea 0, se tiene el siguiente tableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	2	0	-1	1	0	2
x_2	1	1	-1	0	0	3
x_5	-1	0	1	0	1	0
	3	0	-2	0	0	-6

Seleccionamos x_3 para que entre a la base y x_5 para que la abandone. Luego, realizando las operaciones necesarias para que la columna asociada a x_3 se transforme en el tercer vector canónico y su costo reducido sea 0, se tiene el siguiente tableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	1	0	0	1	1	2
x_2	0	1	0	0	1	3
x_3	-1	0	1	0	1	0
	1	0	0	0	2	-6

como se puede apreciar, el costo de todas las variables no básicas es no negativo. Luego, encontramos la solución óptima del problema que corresponde a $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 3, 0, 2, 0)$ a un valor óptimo de la función objetivo de -6. Se puede observar que la solución es degenerada pues la variable básica $x_3 = 0$.

iii) La Figura 1 nos muestra el camino que siguió nuestra búsqueda de la solución óptima del problema. Partimos con Fase I en la solución no factible $(x_1, x_2) = (0, 0)$ y saltamos a la siguiente solución no factible $(x_1, x_2) = (0, 1)$ terminando la Fase I en la solución factible $(x_1, x_2) = (1, 2)$. Desde este punto, utilizando Fase II nos desplazamos a $(x_1, x_2) = (0, 3)$.

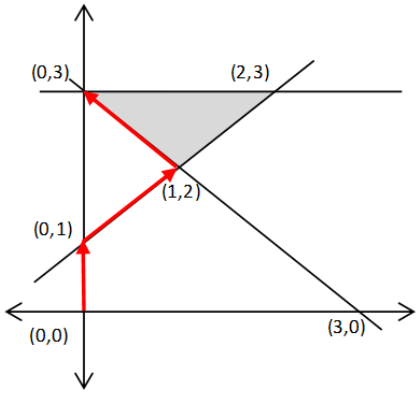


Figura 1: Gráfico que muestra la evolución de las soluciones evaluadas a través de Fase I y II

Parte B

Pregunta 2b

Para el siguiente problema,

$$\begin{array}{rrrrrrr} \mathcal{P}) \; z = \text{mín} & 3x_1 & +5x_2 & +2x_3 & & \\ \text{s.a.} & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & \geq & 4 \\ & x_1 & +3x_2 & +x_3 & \geq & 6 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

i) **(1 punto)** Encuentre el problema dual de $\mathcal{P}$), denotado $\mathcal{D}$).

Solución:

El problema dual de $\mathcal{P}$) es,

$$\begin{array}{rrrrrr} \mathcal{D}) \; w = \text{máx} & 4y_1 & +6y_2 & & \\ \text{s.a.} & 2y_1 & +y_2 & \leq & 3 \\ & y_1 & +3y_2 & \leq & 5 \\ & y_1 & +y_2 & \leq & 2 \\ & y_1, & y_2, & \geq & 0 \end{array}$$

ii) **(3 puntos)** Resuelva $\mathcal{D}$) usando el algoritmo simplex matricial, partiendo desde la solución dual $(0, 5/3)$.

Solución:

La forma estándar de $\mathcal{D}$) es,

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} \mathcal{D}) \; w = \text{mín} & -4y_1 & -6y_2 & & & & & & \\ \text{s.a.} & 2y_1 & +y_2 & +y_3 & & & & = & 3 \\ & y_1 & +3y_2 & & +y_4 & & & = & 5 \\ & y_1 & +y_2 & & & +y_5 & & = & 2 \\ & y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & y_5 & & \geq & 0 \end{array}$$

Dado que son 3 restricciones, la base tendrá esta dimensión.

Primera Iteración

◇ Al reemplazar los valores duales en la forma estándar, se encuentra que $y_1 = 0$, $y_2 = 5/3$, $y_3 = 4/3$, $y_4 = 0$, $y_5 = 1/3$, es decir $\mathcal{B} = \{y_2, y_3, y_5\}$.

◇ Con esto $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$.

◇ Además $c_B^T = [-6, 0, 0]$, $\mathcal{R} = \{y_1, y_4\}$, $c_R^T = [-4, 0]$ y $R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

◇ $x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$, $z = c_B^T x_B = [-6, 0, 0] \begin{pmatrix} 5/3 \\ 4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = -10$.

◇ $\bar{c_R}^T = c_R^T - c_B^T B^{-1} R = [-4, 0] - [-6, 0, 0] \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = [-2, 2]$.

Es decir, y_1 sale de la base.

◇ $B^{-1}R = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 5/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$. $q = \arg\min \left\{ \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}}, \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}}, \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} \right\}$, entonces y_5 sale de la base.

Segunda Iteración

◇ $\mathcal{B} = \{y_2, y_3, y_1\}$.

◇ Con esto $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$.

◇ Además $c_B^T = [-6, 0, -4]$, $\mathcal{R} = \{y_5, y_4\}$, $c_R^T = [0, 0]$ y $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

◇ $x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $z = c_B^T x_B = [-6, 0, -4] \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = -11$.

◇ $\bar{c_R}^T = c_R^T - c_B^T B^{-1} R = [0, 0] - [-6, 0, -4] \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = [3, 1]$.

Que es óptimo. La solución óptima corresponde a: $y_1^* = 1/2$, $y_2^* = 3/2$, $y_3^* = 1/2$, $y_4^* = 0$, $y_5^* = 0$, con valor óptimo -11 en la forma estándar, es decir $v(\mathcal{D})) = 11$.

iii) **(3 puntos)** Usando el Teorema de Holguras Complementarias, encuentre la solución óptima de $\mathcal{P}$).

Solución:

El teorema, aplicado a este problema, establece que,

$$\begin{aligned} x_4^* y_1^* &= 0 \\ x_5^* y_2^* &= 0 \\ y_3^* x_1^* &= 0 \\ y_4^* x_2^* &= 0 \\ y_5^* x_3^* &= 0 \end{aligned}$$

De donde se deduce que x_2 y x_3 son las variables básicas, en la solución óptima de $\mathcal{P}$). Por lo tanto, puede establecerse que,

$$\mathcal{B}^* = \{x_2, x_3\} \qquad \mathcal{R} = \{x_1, x_4, x_5\}$$

$$c_{B^*}^T = [5, 2] \qquad c_R^T = [3, 0, 0]$$

$$B^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1*} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \qquad \pi^T = [1/2, 3/2]$$

Donde $x_{B^*} = \begin{pmatrix} x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = B^{-1*}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Es decir, $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 3$, $x_4^* = 0$, $x_5^* = 0$, con $v(\mathcal{P})) = 11$. Donde x_4 y x_5 son las variables de exceso necesarias para llevar a $\mathcal{P}$) a la forma estándar.

iv) **(1 punto)** Encuentre el rango de valores en que pueden variar los lados derechos de las restricciones de $\mathcal{P}$), para que la base óptima no cambie.

Solución:

Se busca conservar la factibilidad de la base actual, es decir que $B^{-1*}b \geq 0$.

- ◇ Para b_1, esto equivale a que si cambia en δ, debe cumplirse que,

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4+\delta \\ 6 \end{pmatrix} \geq 0$$

  De donde se deduce que $-2 \leq \delta \leq 2$, es decir $2 \leq b_1' \leq 6$.

- ◇ Para b_2, esto equivale a que si cambia en δ, debe cumplirse que,

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6+\delta \end{pmatrix} \geq 0$$

  De donde se deduce que $-4 \leq \delta \leq 6$, es decir $2 \leq b_2' \leq 12$.

v) **(2 puntos)** Encuentre el rango de valores en que pueden variar los coeficientes de la función objetivo de $\mathcal{P}$), para que la base óptima no cambie.

Solución:

Ahora se busca mantener la optimalidad de la base actual, es decir se debe conservar que $\bar{c_R}^T = c_R^T - c_B^T B^{-1*} R \geq 0$.

- ◇ Para c_1, esto corresponde a,

$$[3+\delta, 0, 0] - [5, 2] \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \geq 0$$

  De donde se obtiene que $\delta \geq -1/2$, es decir $c_1' \geq 5/2$.

◇ Para c_2, esto corresponde a,

$$[3,0,0] - [5+\delta, 2] \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \geq 0$$

De donde se obtiene que $-1 \leq \delta \leq 1$, es decir $4 \leq c_2' \leq 6$.

◇ Para c_3, esto corresponde a,

$$[3,0,0] - [5, 2+\delta] \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \geq 0$$

De donde se obtiene que $-1/3 \leq \delta \leq 1/5$, es decir $5/3 \leq c_3' \leq 11/5$.

Pregunta 3 (20 puntos)

La universidad debe impartir un conjunto I de asignaturas en el año, las cuales pertenecen a un conjunto H de programas académicos o "carreras". Dependiendo del programa, estas carreras tienen una duración de ocho, diez o doce semestres. Asociado a cada asignatura, se tiene la información del número de clases C_i que la componen, el semestre académico en que se dicta (dentro de un conjunto T de semestres académicos) y la carrera a la que pertenece. La información anterior se puede resumir en un parámetro AS_{ith} que toma el valor 1 cuando la asignatura i pertenece al semestre académico t de la carrera h. Su tarea es programar las clases de cada asignatura en un conjunto D de días, considerando que cada día está dividido en un conjunto K de bloques horarios (puede asumir que estos dos conjuntos se encuentran ordenados numéricamente).

Existen dos tipos de asignaturas, las asignaturas de especialidad (propias de cada programa o carrera) y las asignaturas transversales (correspondientes a asignaturas en común entre distintos programas de estudio). Es importante señalar que asignaturas de una misma carrera y un mismo semestre no pueden generar tope de horario y que las clases deben ser ordenadas de tal manera que la primera clase se dicta antes que la segunda, la segunda antes que la tercera, y así sucesivamente hasta la última clase.

a) **(12 puntos)** Formule un problema de programación lineal que resuelva el problema mencionado anteriormente, considerando que existe un beneficio B_{mi}^{kd} de asignar la clase m de la asignatura i al modulo k del día d.

b) **(8 puntos)** Cómo cambia el modelo si se exige que cuando el número de clases de una asignatura $i \in I$ es 2, entonces estas clases deben ser asignadas de forma consecutiva en el mismo día.

Respuesta:

(a) El modelo es el siguiente,

(I) Variables de decisión

◇ X_{mi}^{kd}: 1, si se asigna la clase m de la asignatura i al módulo k del día d; 0, en otro caso.

(II) Función objetivo

$$Z = \text{máx} \sum_{d \in D} \sum_{k \in K} \sum_{i \in I} \sum_{m=1}^{C_i} B_{mi}^{kd} X_{mi}^{kd}$$

(III) Restricciones

◇ Cada clase de una asignatura debe estar asignada a un único módulo de un único día.

$$\sum_{d\in D}\sum_{k\in K} X_{mi}^{kd} = 1,\ \forall i \in I, m = 1,\ldots,C_i.$$

◇ Las clases deben ser programadas respetando el orden secuencial.

a) Caso $d, k > 1$:

$$\sum_{f=1}^{d-1}\sum_{l\in K} X_{mi}^{lf} + \sum_{l=1}^{k-1} X_{mi}^{ld} \geq x_{(m+1)i}^{kd},\ \forall i \in I, m = 1,\ldots,C_i - 1, k \in K : k > 1, d \in D : d > 1.$$

b) Caso $d = 1$ y $k > 1$:

$$\sum_{l=1}^{k-1} X_{mi}^{l1} \geq x_{(m+1)i}^{k1},\ \forall i \in I, m = 1,\ldots,C_i - 1, k \in K : k > 1.$$

c) Caso $d > 1$ y $k = 1$:

$$\sum_{f=1}^{d-1}\sum_{l\in K} X_{mi}^{lf} \geq x_{(m+1)i}^{1d},\ \forall i \in I, m = 1,\ldots,C_i - 1, d \in D : d > 1.$$

◇ Para cada plan de estudios, no puede existir tope de horario entre asignaturas de un mismo semestre.

$$X_{mi}^{kd} + \sum_{\substack{j \in I: \\ j \neq i,\ AS_{jth} = 1}} \sum_{e=1}^{C_j} X_{ej}^{kd} \leq 1,\ \forall k \in K, d \in D, m = 1,\ldots,C_i, t \in T, h \in H, i \in I : AS_{ith} = 1$$

◇ Naturaleza de las variables

$$X_{mi}^{kd} \in \{0,1\},\ \forall i \in I, m = 1,\ldots,C_i, k \in K, d \in D$$

(b) Los cambios son los siguientes,

◇ Variables de decisión adicionales

- W_i^{kd}: 1, si se asigna la primera de las dos clases de la asignatura i: $C_i = 2$, al bloque horario k del día d; 0, en otro caso.

◇ Restricciones

- Para las asignaturas con $C_i = 2$ se debe escoger un día y bloque para que se dicte su primera clase.

$$\sum_{d\in D}\sum_{k=1}^{K-1} W_i^{kd} = 1,\ \forall i \in I : C_i = 2$$

- Para las asignaturas con $C_i = 2$ se deben dictar sus clases consecutivamente el mismo día.

$$2W_i^{kd} \leq X_{1i}^{kd} + X_{2i}^{(k+1)d},\ \forall i \in I : C_i = 2, k \in K : k \leq K - 1, d \in D$$

- Naturaleza de la nueva variable

$$W_i^{kd} \in \{0,1\},\ \forall i \in I, k \in K, d \in D$$