PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2015
Profesores: S.Encina - G.Angulo - D.Pozo
J.Vera - A.Cataldo - R.Cuadrado

Solución Tarea 1

Fecha de Entrega: 24 de Agosto.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos que trabajarán para el proyecto semestral.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cuatro grupo de hojas el día de la entrega.
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día martes 24 de Agosto a las 12:30 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta.
- ◇ Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada con la **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso, además de las otras sanciones que establezca la Dirección de la Escuela, la cual será informada de la situación.

Problema 1. (16 puntos)

a) (4 puntos) Una línea aérea debe cargar un avión que tiene m bodegas. En la bodega j se puede cargar un peso máximo de P_j [kg] y tiene un volumen total disponible V_j [m^3].

En este avión, se pueden cargar n productos distintos. La disponibilidad del producto i es D_i [kg] y su volumen por unidad de peso es v_i [m^3/kg]. El beneficio por transportar una unidad de peso del producto i es b_i [ut/kg].

Por razones de estabilidad del avión, luego de cargado, en todas las bodegas se debe tener el mismo cuociente entre el peso total cargado y peso máximo o capacidad de la bodega.

Con estos antecedentes, construya un modelo de programación lineal que permita determinar cómo se debe cargar cada una de las bodegas del avión de tal modo que se maximice el beneficio del vuelo.

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.

b) (8 puntos) Como es visto en el curso, existen distintos tipos de modelos en los que se enmarcan una gran cantidad de problemas de optimización. Algunos de estos son el problema del vendedor viajero, el problema de la mochila, el problema de planificación de proyectos, el de secuencialidad de máquinas, entre otros. Sin embargo, estas "categorías" de problemas son sólo la introducción para una gran cantidad de tipos de problemas bastante más complejos que se están tratando en el día a día en el mundo de la investigación de operaciones. En esta pregunta, se le pide investigar sobre un par de ellos, y describirlos de manera muy breve (no más de 10 lineas) en qué consisten. Estos serán[2]:

   i) (2 puntos) **Describa** brevemente en qué consiste uno de los problemas clásicos vistos en clases, e **indique** cuál es su característica principal.

   ii) (2 puntos) **Describa** brevemente el *Inventory Routing Problem*, y **dé** un ejemplo del día a día que trate con este problema.

   iii) (2 puntos) **Describa** brevemente el *Pickup and Delivery Problem*, y **dé** un ejemplo del día a día que trate con este problema.

   iv) (2 puntos) **Describa** brevemente el *Cutting-Stock Problem*, y **dé** un ejemplo del día a día que trate con este problema.

c) (4 puntos) El General de las fuerzas del temido virus I3O7N1, ha decidido atacar a una pequeña ciudad durante los próximos T días. Para este fin, cuenta con N_0 unidades del virus el día de hoy ($t = 0$), cada una de las cuales es capaz de replicarse, es decir, dividirse en dos unidades idénticas, proceso que le toma un día.

   En cada día t, las unidades pueden invadir un organismo, o bien, en caso contrario, deben replicarse, con lo que aumentará la cantidad de virus en el periodo $t+1$. Las unidades que invaden un organismo ya no estarán disponibles para futuras invasiones ni tampoco podrán replicarse, ya que están muy ocupadas luchando contra las defensas del organismo.

   Existe un conjunto H de habitantes de la ciudad que pueden ser innfectados, cada uno de los cuales posee d_i defensas en su organismo, las cuales vencerán automáticamente al virus si se encuentran en superioridad numérica al momento de la invasión, lo cual es inadmisible para el general.

   La invasión puede producirse en varios ataques[3], sin embargo, la tercera vez que el virus ataca, el organismo ya está lo suficientemente preparado para neutralizar el ataque y, por lo tanto, la invasión fracasa, lo cual no puede permitirse en ningún caso. La misión encomendada al General es invadir al menos a K personas antes de terminar el día T, sin importar si se repiten personas o no.

   Se sabe que $V \subseteq H$ es el conjunto de todas las personas vacunadas contra este virus. El General sabe que si se enfrenta a los anticuerpos creados por esta vacuna sus debilidades serán expuestas y arriesgará la eliminación definitiva de su especie, por lo que no puede invadir a personas vacunadas.

   La invasión al organismo de la persona i tiene un costo fijo de CF_i unidades genéticas monetarias (u.g.m.), mientras que cada unidad del virus que lo invada tiene un costo de CV_{it} u.g.m., que depende del día en que se produzca la invasión. Además, la replicación tiene un costo genético de B_t u.g.m., que también depende del día en que se produzca. Sin embargo, cada invasión realizada es recompensada con R u.g.m.

   El General está a punto de dar sus órdenes respecto a qué personas atacar y la cantidad de unidades a replicarse cada día, por lo que se le pide a usted que lo ayude, modelando la situación como un problema de programación lineal, para que el General pueda cumplir su misión incurriendo en el menor costo posible.

Solución Problema 1.

a) Variables de Decisión:

   x_{ij} : Cantidad de producto i a cargar en la bodega j.

   Restricciones:

[2]Note que en cada sub-problema se le pide hacer dos cosas

[3]Puede darse el caso de que el virus no contagie a pesar de su superioridad en número a la de los anticuerpos de la persona.

(I) No superar peso máximo.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq P_j \qquad \forall j = 1, \ldots, m$$

(II) No superar el volumen máximo.

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_{ij} \leq V_j \qquad \forall j = 1, \ldots, m$$

(III) No se puede cargar más de lo que hay disponible.

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq D_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

(IV) Balance del avión.

$$\frac{\sum_i x_{ij}}{P_j} - \frac{\sum_i x_{i,j+1}}{P_{j+1}} = 0 \qquad \forall j = 1, \ldots, m-1$$

(V) Naturaleza de las variables.

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall\ i, j$$

Función Objetivo:

$$\text{máx}\, z = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \sum_{j=1}^{m} x_{ij}$$

b) i) El problema de la mochila es un problema clásico de la optimización, que consiste en determinar qué elementos incluir en una decisión, para maximizar las utilidades sin que se sobrepase una capacidad máxima de pesos o volúmenes. Es generalizado como el problema de optimización que busca la mejor solución entre un conjunto de soluciones a un problema. El modelo matemático es:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & \sum_{i=1}^{n} u_i x_i & \\ \text{s.a.} & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i & \leq W \\ & x_i & \in \{0, 1\} \end{array}$$

La característica principal de esto es, además del problema que maximiza utilidades, su restricción de capacidad.

ii) El *Inventory Routing Problem* es un problema complejo que busca determinar cuál es la ruta (o set de rutas) óptima(s) para una flota de vehículos que busca proveer y reabastecer de inventario a sus clientes, desde una bodega. Estos clientes agotan su inventario con una cierta tasa, y el desafío es que se mantengan con inventario, considerando que los vehículos tienen cierta capacidad.

Un ejemplo del día a día que usan estos problemas son los camiones de valores. Ellos deben recorrer la ciudad de cajero automático en cajero automático, para reabastecerlos de dinero en efectivo. Así, deben determinar una ruta de menor costo posible que le permita ir, desde la bodega (de donde consiguen el dinero a distribuir) a los distintos cajeros planificados, para luego volver a la bodega e iniciar otra ruta. Es importante considerar que, por razones de seguridad, estos camiones no pueden ir con exceso de dinero (es decir, tienen cierta capacidad).

iii) El *Pickup and Delivery Problem* una flota de vehículos deben transportar carga desde distintos orígenes a distintos destinos sin que estos necesiten transbordarse o cambiarse de vehículo. Cada vehículo tiene una cierta capacidad, un punto de partida y un punto de llegada.

Un ejemplo del día a día que usan estos problemas son las empresas de transporte que hacen servicios de traslados de personas a empresas. Acá, existen una cierta cantidad de personas en un conjunto de paraderos, en que cada una tiene un destino particular (por ejemplo, el paradero asociado a su hogar, y el paradero asociado a su trabajo). Estos son recogidos en estos paraderos, y son dejados en sus respectivos destinos, sin que sea necesario que desciendan del vehículo. Cabe destacar la capacidad de los vehículos, por lo que es interesante definir qué vehículo se detiene en qué paradero.

iv) El *Cutting-Stock Problem* considera el problema de tener cierto producto a ser cortado, debido a distintos requerimientos de los clientes de esos productos. El problema busca determinar la mejor manera de cortar este producto para que el residuo sea lo menos posible.

Un ejemplo del día a día, y el clásico, es una empresa de rollos de papel que busca determinar cómo cortar esos rollos para satisfacer a sus clientes (que exigen distintos largos y/o anchos de los rollos, de manera que el residuo (o papel que no tiene ancho suficiente para que un cliente lo requiera) sea lo menos posible.

c) Variables de Decisión:

x_{it} : 1 si se invade la persona i en el período t.
y_{it} : cantidad del virus que invade a la persona i en periodo t.
z_t : cantidad del virus que se replica en periodo t.
N_t : cantidad del virus disponible en periodo t.

Restricciones:

(I) Relación entre las variables x e y.

$$y_{it} \leq x_{it} \cdot M \qquad \forall i, t$$

(II) Conservación.

$$N_{t+1} = N_t + z_t - \sum_i y_{it} \qquad \forall t$$

o bien

$$N_{t+1} = 2z_t \qquad \forall t$$

(III) Disponibilidad.

$$\sum_i y_{it} + z_t = N_t \qquad \forall t$$

(IV) Máximo 2 ataques.

$$\sum_t x_{it} \leq 2 \qquad \forall i$$

(V) Misión.

$$\sum_i \sum_t x_{it} \geq K$$

(VI) Vacunados.

$$\sum_t x_{it} = 0 \qquad \forall i \in V$$

(VII) Defensas.

$$y_{it} \geq d_i \cdot x_{it} \qquad \forall i, t$$

(VIII) Naturaleza de las variables.

$$x_{it} \in \{0, 1\}, y_{it}, z_t, N_t \in \mathbb{Z}_0^+$$

Función Objetivo:

$$\text{máx}\, z = \sum_t \sum_i (CF_i - R) x_{it} + \sum_t \sum_i CV_{it} y_{it} + \sum_t B_t z_t$$

Problema 2. (14 puntos)

a) (6 puntos) Suponga que usted es un nuevo integrante de la fábrica de plumones negros *SirGeb*. La empresa busca satisfacer la demanda pronosticada para los próximos T meses, y que se ha estimado en D_t unidades para el mes t. Su empresa presenta un costo fijo L de producción para cada mes, además de un costo unitario de producción de c_t por mes.

La empresa cuenta con una máquina que tiene una capacidad máxima de producción de K unidades igual para todos los períodos. Pero, para compensar posibles excesos de demanda en algunos meses, la empresa posee convenios con la competencia. Esto le permite comprar unidades de plumones negros terminados a un precio de P, superior al de su producción en cualquier mes. Por último, existe una bodega, que permite almacenar productos desde un mes t al mes $t+1$ a un costo de b_t, y que tiene un máximo de B unidades almacenadas.

Sabe de un modelo de programación lineal que está apoyando la toma de decisiones hasta hoy en día, que utiliza la variable x_t que indica la cantidad de unidades producidas en el período t, α_t una variable binaria que se activa si se decide producir en el mes t, y_t indica la cantidad de unidades compradas a la competencia. El modelo diseñado se presenta a continuación:

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{t=1}^{T} (L\alpha_t + Py_t + c_t x_t) \\
\text{s.a.} \quad & x_t + y_t \geq D_t && \forall t = 1,\dots,T && \text{R1) Satisfacer la demanda.} \\
& x_t \leq M\alpha_t && \forall t = 1,\dots,T && \text{R2) Producir si se decide hacerlo.} \\
& x_t \leq K && \forall t = 1,\dots,T && \text{R3) No sobrepasar capacidad de producción.} \\
& x_t + I_{t-1} + y_t \leq D_t + I_t && \forall t = 1,\dots,T && \text{R4) Conservación de flujo.} \\
& I_t \leq B && \forall t = 1,\dots,T && \text{R5) Capacidad de la bodega.} \\
& x_t, y_t, I_t \geq 0 && \forall t = 1,\dots,T && \text{R6) N.V.} \\
& \alpha_t \in \{0,1\} && \forall t = 1,\dots,T && \text{R6) N.V.}
\end{aligned}$$

Unos cuantos días después, cuando usted se está recién familiarizando con el modelo, le informan sobre una nueva decisión que se ha tomado. Para probar sus conocimientos de modelos matemáticos de optimización, le han dado el desafío de interpretar en qué consiste la decisión a considerar para los próximos T períodos a partir del modelo matemático modificado:

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{t=1}^{T} \left(L\alpha_t + Py_t + c_t x_t + c_t^- w_t + A\beta_t\right) \\
\text{s.a.} \quad & x_t + w_t + y_t \geq D_t && \forall t = 1,\dots,T && \text{R1') Satisfacer la demanda.} \\
& x_t + w_t \leq M\alpha_t && \forall t = 1,\dots,T && \text{R2') Producir si se decide hacerlo.} \\
& x_t + w_t + y_t + I_{t-1} \leq D_t + I_t && \forall t = 1,\dots,T && \text{R4') Conservación de flujo.} \\
& I_t \leq B && \forall t = 1,\dots,T && \text{R5) Capacidad de la bodega.} \\
& \sum_{t=1}^{T} \beta_t \leq 1 && && \text{R7)} \\
& x_t \leq K\left(1 - \sum_{\theta \leq t} \beta_\theta\right) && \forall t = 1,\dots,T && \text{R8)} \\
& w_t \leq K^+ \cdot \left(\sum_{\theta \leq t} \beta_\theta\right) && \forall t = 1,\dots,T && \text{R9)} \\
& x_t, w_t, y_t, I_t \geq 0 && \forall t = 1,\dots,T && \text{R6') N.V.} \\
& \alpha_t, \beta_t \in \{0,1\} && \forall t = 1,\dots,T && \text{R6') N.V.}
\end{aligned}$$

Describa en pocas líneas en qué consiste el cambio, explicando **además** claramente en qué consiste cada una de las restricciones sin descripción (identificando el lado izquierdo, el lado derecho, y la relación de cada una), y qué representan las variables x_t, w_t y β_t y los parámetros K^+, θ, c_t^- y A.

b) (8 puntos) La constructora Enrique Cornejo debe realizar su planificación para el próximo año, lo que implica decidir qué proyectos construirá entre un conjunto J de posibles proyectos. Enrique funciona en varias ciudades del país y cada proyecto $j \in J$ pertenece a alguna de estas ciudades, esta información viene dada por el parámetro binario δ_{jl}, que cuando vale 1 indica que el proyecto j se ubica en la ciudad l y de lo contrario vale 0.

La empresa cuenta con una pequeña cantidad de maquinaria para trabajar, la cual está dada por M_i unidades de maquinaria del tipo i. Por esta razón, el departamento de compras se ha contactado con varios potenciales proveedores de maquinarias, de los cuales algunos tienen una capacidad limitada CAP_k, mientras que el resto posee un inventario suficiente para cubrir cualquier demanda que Enrique le solicite. Sea K el conjunto de todos los posibles proveedores y $K_C \subseteq K$ los proveedores con capacidad limitada. Existe un costo F_k (u.m.) asociado a la firma de contrato con el proveedor k que contempla todos los trámites necesarios y se paga sólo una vez, además del costo de cada maquinaria del tipo i que está dado por P_{ik}. Se sabe que para un proyecto j se necesitan al menos R_{ij} unidades de maquinaria del tipo i, además de una cantidad NT_j de trabajadores. La compañía cuenta con W_l trabajadores de planta en cada ciudad l, sin embargo, tiene la posibilidad de contratar trabajadores extra durante el próximo año, a un salario anual de s_l unidades monetarias (u.m.) (asuma que los trabajadores no pueden ser trasladados a otra ciudad).

Enrique tiene un presupuesto de $PPTO$ (u.m.) para comprar maquinaria y contratar trabajadores, el cual puede ser sobrepasado si se piden préstamos bancarios asociados a cada proyecto, los cuales impactan en las utilidades en un porcentaje r_j del monto del préstamo. Cada proyecto j tiene asociado un beneficio bruto B_j (u.m.) y un costo de inversión de I_j (u.m.).

La empresa desea maximizar las utilidades del próximo año, sabiendo que en ninguna ciudad debe desarrollarse más del 30 % del total de proyectos de Enrique, para no centralizar sus operaciones. Las utilidades no consideran el gasto en maquinaria ni en personal, ya que éstos tienen un presupuesto aparte. Para esto se le solicita que modele la situación como un Modelo de Programación Lineal Mixta que permita determinar las acciones a tomar por esta compañía.

Solución Problema 2.

a) El cambio que se está permitiendo, es que en cualquier período se pueda decidir cambiar la máquina a una de mejor producción a la que está siendo utilizada. Esto modifica los costos unitarios de producción a c_t^- y la capacidad de producción a K^+. La implantación de esta nueva tecnología obliga a la empresa a incurrir en un costo de A. Además, es un cambio de máquina que, una vez realizada, no es posible regresar a la anterior.

Variables de Decisión:

x_t : variable continua que indica la cantidad de unidades producidas con la máquina antigua en el período t.
w_t : variable continua que indica la cantidad de unidades producidas con la máquina nueva en el período t.
β_t : variable binaria que vale 1 si se decide cambiar la tecnología en el período t, 0 si no.

Restricciones:

(I) R7) Cambiar a lo más una vez de tecnología en el horizonte a evaluar.

(II) R8) No sobrepasar capacidad con máquina antigua.

(III) R9) No sobrepasar capacidad con máquina nueva.

Tanto en las restricciones 8 como las 9, θ cumple como un subíndice auxiliar, simplemente permitiendo variar el indicador de parámetro que acompaña a la variable β en los sumandos de la sumatoria. Esto es necesario dado que el límite de la sumatoria incluye el período t de cada instancia de restricción.

b) Variables de Decisión:

x_j : 1 si se construye el proyecto i, 0 si no.
y_k : 1 si se firma el contrato con proveedor k, 0 si no.
z_{ik} : cantidad de maquinaria del tipo i que se compra al proveedor k.
w_l : cantidad de trabajadores extras que se contratan en la ciudad l.
p_j : préstamo pedido asociado a proyecto j.

Restricciones:

(I) Requerimiento de maquinaria.

$$M_i + \sum_k z_{ik} \geq \sum_j x_j \cdot R_{ij} \qquad \forall i$$

No es necesario decidir a qué proyecto se destina cada maquinaria: basta con que hayan suficientes para cubrirlos.

(II) Requerimiento de trabajadores.

$$\sum_j x_j \cdot NT_j \cdot \delta_{jl} \leq W_l + w_l \qquad \forall l$$

En este caso sí es importante la ciudad en la que estará cada trabajador, pero no el proyecto en el que trabaja.

(III) Firma de contrato.

$$z_{ik} \leq y_k \cdot M \qquad \forall i, k \in K \setminus K_C, \qquad M \gg 1$$
$$\sum_i z_{ik} \leq y_k \cdot CAP_k \qquad \forall k \in K_C$$

(IV) Descentralización.

$$\sum_j x_j \cdot \delta_{jl} \leq 0,3 \sum_l \sum_j x_j \dot{\delta}_{jl} \qquad \forall l$$

(V) Presupuesto.

$$\sum_i \sum_k z_{ik} \cdot p_{ik} + \sum_l w_l \cdot s_l \leq PPTO + \sum_j p_j$$

(VI) Naturaleza de las variables.

$$x_j, y_k \in \{0,1\} \qquad \forall\ j, kw_l, z_{ik} \in \mathbb{Z}_0^+ \qquad \forall\ l, i, kp_j \geq 0 \qquad \forall\ j$$

Función Objetivo:

$$\text{máx}\, z = \sum_j (B_j - I_j) \cdot x_j - \sum_j p_j \cdot r_j - \sum_k y_k \cdot F_k$$

Si se considera la firma de contrato con proveedores como parte del presupuesto, no debe aparecer en la F.O.:

$$\text{máx} \sum_j (B_j - I_j) \cdot x_j - \sum_j p_j \cdot r_j$$

Problema 3. (15 puntos)

Las siguientes preguntas se refieren al artículo "A Combinatorial Auction improves school meals in Chile: a case of OR in developing countries", de R. Epstein et als. y publicado en *International Transactions in Operational Research*. Usted debe leer el artículo y entender con precisión todos los aspectos del modelo.

a) (3 puntos) Describa brevemente el significado de cada una de las restricciones del problema.

b) (4 puntos) Los autores dicen que el modelo desarrollado por ellos es, en principio, difícil de resolver ya que incluye varios problemas conocidos como difíciles. Indique cuáles son esos problemas y descríbalos brevemente. ¿Alguno de esos problemas corresponde a alguno de los ejemplos estudiados en el curso?

c) (4 puntos) Explique a qué se refieren los autores con su intención de buscar una solución suficientemente "robusta". ¿De qué manera se verifica esa supuesta rubustez?

d) (4 puntos) Explique brevemente cuál es el aporte del desarrollo de este modelo para la gestión del proceso de asignación en la licitación de la JUNAEB y, para la gestión pública ene general.

Solución Problema 3.

a) Las restricciones (1) especifican que en cada unidad territorial debe haber al menos una oferta aceptada. Esto es equivalente a satisfacer la demanda.

Las restricciones (2) limitan las ofertas en términos de que la cantidad total de unidades territoriales involicradas en las ofertas aceptadas no puede superar el total de unidades aceptables para una empresa. Es una restricción relacionada con la capacidad financiera de las empresas.

Las restricciones (3) Establece que la cantidada total de empresas invlucradas en una región puede tener cotas inferiores y superiores. Esto tiene por objeto garantizar cobertura mínima y, a su vez, evitar que pocas empresas se adjudiquen una misma región, junto con evitar excesiva dispersión de oferentes adjudicados. Las restricciones (3a) y (3b) tiene por obejeto hacer funcionar la relación entre las variables X e Y: Si hay ofertas para alguna empresa en una región, eso activa la indicadora correspondiente. (3d) Es una forma alternativa de lograr el mismo efecto, pero en forma desagregada.

La restriccíón (4a) imponen un mínimo a la cantidad total de empresas adjudicadas, nuevamente para evitar concentración en unas pocas. (4b) Hace funcionar la relación entre las variables Z y X.

b) Las restricciones (2), por ejmplo, son restricciones de "problema de mochila", y ese ha sido estudiado en el curso. Corresponde a decidir elección entre una cantidad de alternativas, cumpliendo alguna restricción de recurso o presupuesto o similar.

Las restricciones (1) corresponden a un problema de "cubrimiento de conjuntos", otros problema conocido como difícil. Corresponde a seleccionar ciertos elementos u opciones de modo que al menos uno de ellos esté contenido en cierto conjunto o corresponda con un cierto conjunto.

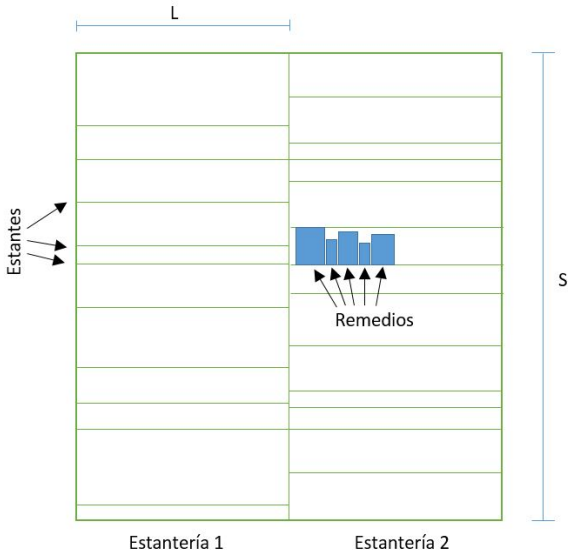
c) El concepto de robusto que usan los autores se refiere a que la solución óptima obtenida sea tal que una cierta adjudicación que es óptima para un escenario específico de demanda, siga siendo relativamente útil en un escenario relacionado o poco diferente al anterior, generando poco cambio en los costos incurridos. Esto es muy importante de evaluar ya que da indicios si acaso una misma política puede igual usarse en caso que hayan, por ejemplo, problemas con alguna oferta.

d) El aporte del desarrollo es muy grande, no solo por el gran ahorro en costo involucrados (40 millones de dólares anuales), sino también porque otorga transparencia y objetividad a un proceso de licitación de gran envergadura con fondos públicos. Adicionalmente, sirve de ejemplo para mistrar cómo herramientas analíticas y de ingeniería industrial pueden ser usadas muy positivamente en la gestión pública.

Problema 4. (15 puntos)

Una línea farmacéutica desea abrir una nueva sucursal en la Región Metropolitana en la que se venderán N medicamentos. Sin embargo, la disposición de remedios en los estantes que se colocarán está sujeto a condicionantes físicas de estos últimos: la longitud del estante y la altura de las cajas de remedios. Como es lógico, un remedio sólo puede ser guardado en un estante cuya altura sea mayor o igual a la de su caja. Además, las cajas no pueden ser colocadas una encima de la otra. Se conoce la altura h_i y el espesor w_i de cada remedio i a disponer.

Como la sucursal es nueva y ya se sabe qué remedios se venderán ahí, no existe limitación de espacio físico, es decir pueden ser construidas tantas estanterías como sea necesario. Sin embargo, la longitud de cada estantería es fija e igual a L metros. Los remedios se dispondrán en estantes para los químico-farmacéuticos que son fijados en las estanterías, permitiendo obtejner diferentes alturas para cada uno de ellos. Es el techo el que limita la altura máxima de cada estantería (conjunto de estantes), y es de S metros. Puede despreciar el espesor de los estantes. Si hay espacio que no está siendo utilizado en un estante, este se considera despreciado. En la figura 1 se muestra un ejemplo de la distribución de estantes en las estanterías.



Considere que el costo de montar una nueva estantería es de E pesos (paredes laterales, fijación, etc.) para las primeras l estanterías instaladas, y E^+ para el resto. Además, considere que la construcción de cada estante tiene un costo de R pesos para los primeros r estantes, y R^+ para el resto. Como el presupuesto es limitado, se desea minimizar los costos de implementación de dichas estanterías en la nueva sucursal. Por lo tanto, con todos los antecedentes presentados, proponga un modelo de programación LINEAL entera que ayude a la cadena farmacéutica a decidir cómo y cuántas estanterías montar para clasificar los remedios, de manera de minimizar el costo total.

Solución Problema 4.

Primero debemos definir un par de parámetros. El número de estanterías a comprar: Para ello, definamos K como este valor (que puede ser la cantidad de remedios, y entonces N). Además, definamos el número máximo de estantes que se pueden colocar en una estantería. Definamos M como este número (que puede ser la cantidad de remedios más uno, y entonces $N+1$).

Variables

x_{ijk}: $\begin{cases} 1 & \text{si el remedio } i \text{ es ubicado en el estante } j \text{ de la estantería } k. \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$

y_{jk}: $\begin{cases} 1 & \text{si el estante } j \text{ de la estantería } k \text{ es ocupado con algún remedio.} \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$

u_k: $\begin{cases} 1 & \text{si algún estante de la estantería } k \text{ es ocupado por algún remedio.} \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$

z_{jk}: altura a la que se monta el estante j de la estantería k.

Función objetivo : Se debe minimizar el costos total de la construcción de las estanterías y los estantes.

$$\text{mín} \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{r} R y_{ik} + \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=r+1}^{M} R^{+} y_{ik} + \sum_{k=1}^{l} E u_k + \sum_{k=l+1}^{K} E^{+} u_k$$

Restricciones

i) Cada remedio debe ser ubicado en exactamente un estante.

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{K} x_{ijk} = 1\,, \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, N.$$

ii) Los estantes, en cada estantería, se ordenan de abajo para arriba.

$$z_{j+1,k} \geq z_{jk}\,, \quad \text{para todo } j = 1, \ldots, M-1; \;\; \text{para todo } k = 1, \ldots, K.$$

iii) Límite de altura de las estanterías.

$$z_{Mk} \leq S\,, \quad \text{para todo } k = 1, \ldots, K.$$

iv) Relacionar variables x con y.

$$x_{ijk} \leq y_{jk}\,, \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, N\,, \;\; j = 1, \ldots, M\,, \;\; k = 1, \ldots, K\,.$$

v) Si un remedio es colocado en un estante, su altura debe ser menor o igual a la distancia al estante inmediatamente superior.

$$h_i x_{ijk} \leq z_{j+1,k} - z_{jk}\,, \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, N\,, \;\; j = 1, \ldots, M\,, \;\; k = 1, \ldots, K\,.$$

vi) El espesor de todos los remedios colocados en una estantería de un estante no supera la longitud del estante.

$$\sum_{i=1}^{N} w_i x_{ijk} \leq L\,, \quad \text{para todo } j = 1, \ldots, M\,, \;\; k = 1, \ldots, K\,.$$

vii) Se puede utilizar una estantería solamente si se ha ocupado la inferior.

$$y_{jk} \geq y_{j+1,k}\,, \quad \text{para todo } j = 1, \ldots, M-1\,, \;\; k = 1, \ldots, K\,.$$

viii) Se monta una estantería solamente si la anterior fue montada.

$$u_k \geq u_{k+1}\,, \quad \text{para todo } k = 1, \ldots, K-1\,.$$

ix) Se construye una estantería si se colocará algún estante en ella.

$$\sum_{j=1}^{M} y_{jk} \leq M u_k\,, \quad \text{para todo } k = 1, \ldots, K\,.$$

x) Restricción de naturaleza de variables.

$x_{ijk} \in \{0, 1\}$, para todo $i = 1, \ldots, N$ para todo $j = 1, \ldots, M$, y para todo $k = 1, \ldots, K$.
$y_{jk} \in \{0, 1\}$, para todo $j = 1, \ldots, M$, y para todo $k = 1, \ldots, K$.
$u_k \in \{0, 1\}$, para todo $k = 1, \ldots, K$.
$z_{jk} \geq 0$, para todo $j = 1, \ldots, M$, y para todo $k = 1, \ldots, K$.