Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
Ayudante: Ignacio Monardes (iamonardes@uc.cl)
Profesores: Gonzalo Mendez, Gustavo Angulo, Esteban Salgado, Gonzalo Perez, Raimundo Cuadrado

ICS1113 - Optimización
1er semestre del 2023

Tarea 2 ICS1113

Reglas de la tarea:

- La tarea se puede realizar de a pares o de forma individual (las parejas pueden ser de diferentes secciones). En caso de ser de a pares se debe inscribir con su pareja en los grupos de Canvas.
- La tarea debe ser subida **por solo uno de los integrantes** a Canvas.
- La tarea parte el día 25/04/2023 a las 00:00 horas y se entrega el día 11/04/2023 a las 23:59 horas.
- Existirá la opción de usar un cupón de atraso solamente una vez entre las tres tareas, dando la posibilidad de entregar hasta 24 horas después de finalizada la entrega. Para poder acceder a este cupón se deben inscribir con el nombre de los integrantes de la tarea en un Google Forms que será habilitado en su debido tiempo y que cierra junto a la fecha oficial de la entrega. En caso de ser de a pares ambos deben tener un cupón disponible y se usará uno por cada uno y tendrán 24 horas extra (no 48).
- Las tareas atrasadas no serán corregidas, así que recuerden entregarlas a tiempo.
- Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo y preparación individual de la interrogación a la que está asociada la tarea. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta la escalación a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso.
- Por entregar en latex se darán 3 décimas para la tarea entregada, las décimas no son transferibles a otras actividades. Para subirlo tendrá que enviar un archivo .pdf y el archivo .zip correspondientes. En caso de no entregar en latex basta con subir un archivo .pdf que contenga las respuestas. En ambos casos los .pdf tienen que contener los nombres de los integrantes.
- Se abrirá un foro en Canvas donde se responderán las dudas que puedan surgir del enunciado.

Pregunta 1 **[20 Puntos]**

Se tiene el siguiente problema P) descrito a continuación:

$$\begin{aligned} P)\ \text{máx}\ & 5x_1 - x_2 \\ s.a.\quad x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\geq 4x_1 - 12 \\ 2x_2 &\geq -x_1 + 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) [8 Puntos] Realice simplex fase 2 a partir del punto (0, 1) y determine el óptimo.
Nota: Para esto puede disponer de recursos como Mathematica, Labmat, Python o algún otro software. En particular, se subirá un script de Mathematica en la carpeta de tareas en Canvas que permite obtener gran parte de las cosas pedidas. Para obtener el puntaje en esta, y la siguiente pregunta, es necesario el desarrollo de los resultados obtenidos en cada iteración.

Solution: Asignar un punto por el problema en forma estándar. 2 puntos cada iteración de la 1 a la 3 (debe tener al menos la matriz básica, no básica, criterio de entrada y criterio de salida desarrollado 0.5 cada una) y 1 punto por optimalidad en la cuarta restricción.
Primero que todo pasaremos el problema a forma estándar.

$$\begin{aligned} P)\quad \text{mín}\ & -5x_1 + x_2 \\ s.a.\quad x_1 + h_1 &= 4 \\ 4x_1 - x_2 + h_2 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 - h_3 &= 2 \\ x_1, x_2, h_1, h_2, h_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Luego al evaluar en (0, 1) obtenemos:

$$\begin{aligned} h_1 &= 4 \\ -1 + h_2 &= 12 \\ 2 - h_3 &= 2 \end{aligned}$$

Podemos concluir que la base es inicial es:

$$B = \{x_2, h_1, h_2\}$$

ya que tienen valores positivos.
A continuación empezamos a iterar.

1. Primera iteración.

$$B = \{x_2, h_1, h_2\}$$
$$N = \{x_1, h_3\}$$

$$A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, A_B^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \bar{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \\ \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Luego calculamos $\bar{b} = A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 13 \end{bmatrix}$:

Calculamos los costos reducidos:

$$\begin{aligned}\bar{c}_N^T &= c_N^T - c_B^T \bar{R} \\ &= (-5,0) - (1,0,0)\bar{R} \\ &= (-\frac{11}{2}, \frac{1}{2})\end{aligned}$$

Podemos notar que entra x_1.

Ahora vemos el criterio de salida:

$$\text{mín}\{\frac{1}{1/2}, \frac{4}{1}, \frac{13}{9/2}\} = \{2, 4, 26/9\}$$

Luego, sale x_2.

2. Segunda iteración.

$$B = \{x_1, h_1, h_2\}$$
$$N = \{x_2, h_3\}$$

$$A_B = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}, A_N = \begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}, A_B^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -4\end{bmatrix}, \bar{R} = \begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 1\\ -9 & 4\end{bmatrix}$$

Luego calculamos $\bar{b} = A_B^{-1}b = \begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix}$:

Calculamos los costos reducidos:

$$\begin{aligned}\bar{c}_N^T &= c_N^T - c_B^T \bar{R} \\ &= (1,0) - (-5,0,0)\bar{R} \\ &= (11,-5)\end{aligned}$$

Podemos notar que entra h_3.

Ahora vemos el criterio de salida:

$$\text{mín}\{\bullet, \frac{2}{1}, \frac{4}{4}\} = \{\bullet, 2, 1\}$$

Luego, sale h_2.

3. Tercera iteración

$$B = \{x_1, h_1, h_3\}$$
$$N = \{x_2, h_2\}$$

$$A_B = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}, A_N = \begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}, A_B^{-1}\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{4} & 0\\ 1 & -\frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & -1\end{bmatrix}, \bar{R} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{9}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

Luego calculamos $\bar{b} = A_B^{-1}b = \begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}$:

Calculamos los costos reducidos:

$$\begin{aligned}\bar{c}_N^T &= c_N^T - c_B^T \bar{R} \\ &= (1,0) - (-5,0,0)\bar{R} \\ &= (-\frac{1}{4}, \frac{5}{4})\end{aligned}$$

Podemos notar que entra x_2.

Ahora vemos el criterio de salida:

$$\text{mín}\{\bullet, \frac{1}{1/4}, \bullet\}$$

Luego, sale h_1.

4. Cuarta iteración

$$B = \{x_1, x_2, h_3\}$$
$$N = \{h_1, h_2\}$$

$$A_B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}, A_N = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, A_B^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & -1 & 0\\ 9 & -2 & -1\end{bmatrix}, \bar{R} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & -1\\ 9 & -2\end{bmatrix}$$

Luego calculamos $\bar{b} = A_B^{-1}b = \begin{bmatrix}4\\ 4\\ 10\end{bmatrix}$:

Calculamos los costos reducidos:

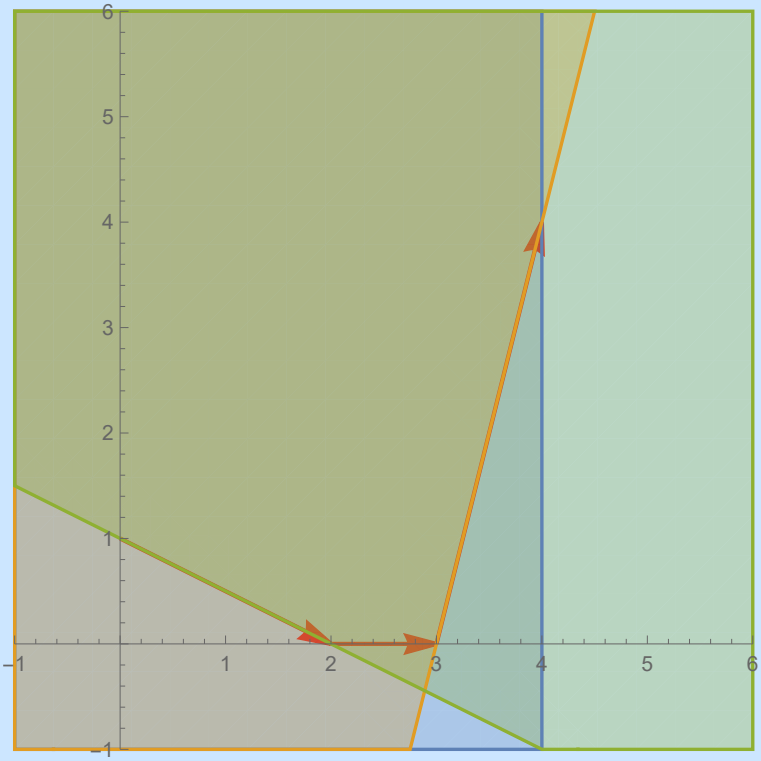
$$\begin{aligned}\bar{c}_N^T &= c_N^T - c_B^T \bar{R} \\ &= (0,0) - (-5,1,0)\bar{R} \\ &= (1,1)\end{aligned}$$

Como los costos reducidos son no negativos podemos concluir que estamos en el óptimo en el punto $x = \begin{bmatrix}4\\ 4\end{bmatrix}$.

(b) [6 Puntos] Grafique el recorrido hecho por la fase 2.

Solution: 6 puntos por el gráfico correcto.

Recorrido simplex



(c) [6 Puntos] Sea máx $5x_1 + c \cdot x_2$ una nueva función objetivo. Determine para qué valores de c se tienen múltiples soluciones y para qué valores el problema se vuelve no acotado a partir de la solución obtenida en la parte (b). Para esto haga un análisis gráfico (no es necesario usar simplex).

Solution: Nota: Esto estaba pensado inicialmente para la pregunta de obtener la solución que era la parte 1, por lo que basta considerar solamente las dos restricciones que definen el punto (4,4) obtenido. Asignar dos puntos por cada restricción y 2 puntos por el resultado de que el problema sea no acotado.

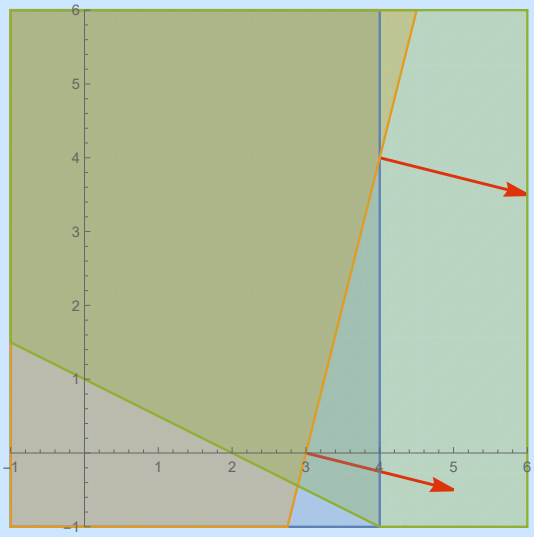
Para que se tengan múltiples soluciones basta con que la gradiente de la función objetivo sea perpendicular a alguna de las dos restricciones en las que esta la solución.

- Analizaremos primero la restricción $x_2 \geq 4x_1 - 12$. En particular, nos fijaremos en la recta que se obtiene en la igualdad que se representa como $\begin{bmatrix} 0 \\ -12 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

  Luego queremos que la gradiente de la FO sea perpendicular a la dirección de la restricción, es decir:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} &= 0 \\ 5 + 4c &= 0 \\ c &= -5/4 \end{aligned}$$

Perpendicular 1

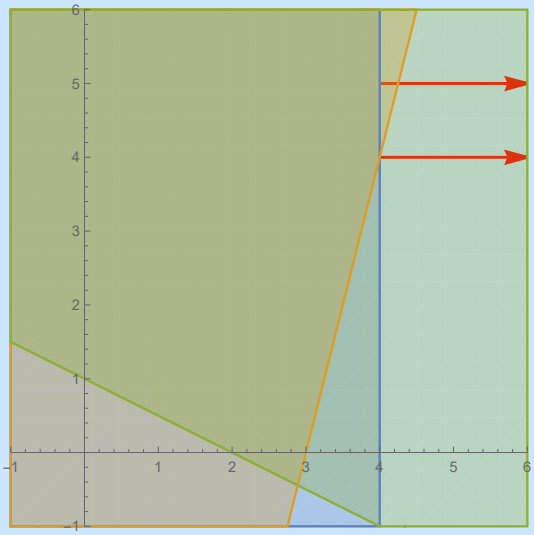


- Analizaremos ahora que la restricción $x_1 \geq 4$. En particular, nos fijaremos en la recta que se obtiene en la igualdad que se representa como $\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

  Luego queremos que la FO sea perpendicular a la dirección de la restricción, es decir:

$$\begin{bmatrix}5\\c\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = 0$$
$$c = 0$$

Perpendicular 2



- Para obtener los rangos en los que el problema es no acotado podemos analizar los rayos de escape:

$$y^1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},\ y^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego, como estamos maximizando queremos que $c^T y^i > 0$ para algún i.

Podemos analizar el primer rayo de escape:

$$\begin{aligned} 5 \cdot (-2) + c \cdot 1 &> 0 && (1) \\ -10 + c &> 0 && (2) \\ c &> 10 && (3) \end{aligned}$$

Luego, si analizamos el siguiente rayo de escape tenemos:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 0 + c \cdot 1 &> 0 && (4) \\ c &> 0 && (5) \end{aligned}$$

Podemos notar que basta con que $c > 0$ para que el problema sea no acotado.

Pregunta 2 **[15 Puntos]**

(a) [5 Puntos] Dada una base factible B de un poliedro en forma estándar, sea j el índice de una variable no básica y sea δ^* positivo el valor del test de razón mínima obtenido cuando j entra a la base.

I. [2½ Puntos] Explique por qué al tomar cualquier delta en el intervalo $[0, \delta^*]$, obtenemos una solución factible.

Solution: Asignar puntaje parcial en caso de obtener un resultado parcial.
Para el caso de simplex tenemos en el caso de salida que mantener la restricción de:

$$x_B = \bar{b} - \bar{R}x_N \geq 0$$

donde x_N está aumentando su $j-$ésima componente en δ unidades y x_B es las variables de la base acutalmente. Luego el problema se convierte en el siguiente:

$$x_B = \bar{b} - \delta \cdot \bar{R}_j \geq 0$$

Esto lo podemos analizar componente a componente y tendremos que

$$\bar{b}_i \geq \bar{R}_{j,i} \cdot \delta$$

Podemos notar que solamente nos interesan las componentes de $\bar{R}_{j,i}$ que son mayores o iguales a cero por lo que analizamos:

$$\bar{b}_i / \bar{R}_{j,i} \geq \delta$$

Luego, como definimos el δ^* como el δ más pequeño tal que cumple la desigualdad usada anteriormente, se tiene que para todo $\delta \in [0, \delta^*]$ se tendrá que $x_B \geq 0$ y también tendremos que δ será el valor que tendrá en la $j-$ésima entrada que también será no negativa.

Alternativamente, también es válido demostrar que simplex itera sobre vértices con un dominio convexo por lo que para el valor de $\delta = 0$ y $\delta = \delta^*$ se tienen los vértices y para los valores de $\delta \in (0, \delta^*)$ simplemente se tienen combinaciones convexas de estos vértices que se mueven a través de una restricción.

II. [2½ Puntos] Explique por qué al tomar cualquier delta en el intervalo $(0, \delta^*)$, obtenemos una solución que satisface $n-1$ restricciones l.i. en igualdad.

Solution: Para el caso de que se use $\delta = 0$ definimos el vértice v^1 y para el caso de $\delta = \delta^*$ definimos el vertice v^2, en ambos casos tenemos n restricciones de igualdad ya que son vértices. Luego sabemos que al usar $\delta \in (0, \delta^*)$ no se ha alcanzado la restricción que delimita a la componente j y también salimos de la base por lo que ya no tenemos n restricciones de igualdad, sino que $n-1$.

(b) [10 Puntos] Indique la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados, en caso de ser ciertos demuéstrelos matemáticamente.

I. [5 Puntos] La intersección de una cantidad finita de poliedros es un poliedro.

Solution: Esto es cierto. Sea n la cantidad de poliedros que tenemos, (asumamos que todos de la misma dimensión) y escribimos cada uno como $P_i = \{x : A^i x \leq b^i\}$, luego la intersección se escribiría como: $\bigcap_{i=1}^n P_i = \bigcap_{i=1}^n \{x : A^i x \leq b^i\}$. Podemos notar que pertenecerán los puntos que cumplen las restricciones de cada poliedro, es decir, $\bigcap_{i=1}^n \{x : A^i x \leq b^i\} = \{x : A^1 x \leq b^1 \wedge A^2 x \leq b^2 \wedge \cdots \wedge A^n x \leq b^n\}$. Es claro que podemos hacer una matriz donde las primeras filas son equivalentes a $A^1 x \leq b^1$, luego las siguientes columnas son $A^2 x \leq b^2$, etc.

II. [5 Puntos] La intersección de una cantidad infinita de poliedros es un poliedro.

Solution: Podemos notar que con una cantidad infinita de restricciones podemos definir 'curvas' suaves como un círculo. Esto no es posible definir mediante restricciones lineales de desigualdad, ya que tiene una cantidad infinita de caras y de vértices y los poliedros se definen a partir de una cantidad finita de caras y vértices.

Pregunta 3 **[15 Puntos]**

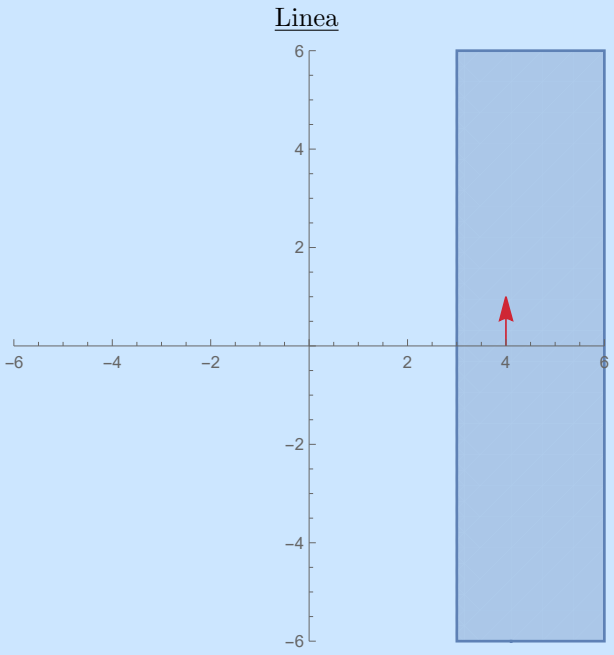
Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leq b\} \neq \varnothing$. Decimos que $r \in \mathbb{R}^n$ no nulo define una línea de P si $x + \lambda r$ pertenece a P para todo x en P y para todo escalar λ (positivo o negativo).

(a) [5 Puntos] Dibuje un ejemplo de un poliedro P y un vector r que defina una línea.

Solution: Ejemplo: $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1 \leq -3\}$, podemos notar que se puede usar como vector:

$$r = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ya que para todo punto en el poliedro tenemos que nos podemos ir tan arriba como queramos.



(b) [5 Puntos] Demuestre que si existe un r que define una línea de P, entonces P no tiene vértices.

Solution: Para determinar que no tiene vértices basta demostrar que para todo punto x existen dos puntos x_1 y x_2 tales que x es una combinación convexa de estos dos puntos.
Podemos notar que basta usar $x_1 = x - r$ y $x_2 = x + r$ (sabemos que tanto x_1 y x_2 pertenecen a P ya que r es línea). Luego usando $\lambda = 0{,}5$ tenemos que:

$$\begin{aligned} 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 &= 0{,}5(x + r) + 0{,}5(x - r) \\ &= 0{,}5x + 0{,}5r + 0{,}5x - 0{,}5r \\ &= x \end{aligned}$$

Como x es arbitrario se tiene que para todo $x \in P$ se puede escribir como combinación convexa de otros dos puntos y por ende no tiene vértices.

(c) [5 Puntos] Demuestre que si r define una línea de P, entonces r satisface $Ar = 0$.

Solution: Por contradicción asumamos que r es una línea de P y que $Ar \neq 0$. Luego, existe una fila i tal que $a_i^T r \neq 0$, esto implica que $a_i^T r > 0$ o $a_i^T r < 0$ donde a_i^T corresponde a los coeficientes de la $i-$ésima restricción. Ahora veremos por caso:

- Analizando el caso $a_i^T r > 0$. Se tendría que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ $a_i^T(x + \lambda r) \leq b_i$ con x un punto de P. Analizando:

$$\begin{aligned} a_i^T(x + \lambda r) &\leq b_i \\ a_i^T x + \lambda a_i^T r &\leq b_i \\ \lambda a_i^T r &\leq b_i - a_i^T x \\ \lambda &\leq \frac{b_i - a_i^T x}{a_i^T r} \end{aligned}$$

  Y esto implicaría que no se cumple para todo λ ya que tiene una cota superior, por lo que r no sería una línea. Con esto se llega a la contradicción y se demuestra lo pedido para este caso.

- Analizando el caso $a_i^T r < 0$. Se tendría que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ $a_i^T(x + \lambda r) \leq b_i$ con x un punto de P ya que es r es una línea. Analizando:

$$\begin{aligned} a_i^T(x + \lambda r) &\leq b_i \\ a_i^T x + \lambda a_i^T r &\leq b_i \\ \lambda a_i^T r &\leq b_i - a_i^T x \\ \lambda &\geq \frac{b_i - a_i^T x}{a_i^T r} \end{aligned}$$

  Y esto implicaría que no se cumple para todo λ ya que tiene una cota inferior, por lo que r no sería una línea. Con esto se llega a la contradicción y se demuestra lo pedido para este caso.

NOTA: Alternativamente, se podría responder que tanto r como $-r$ pertenecen al cono del poliedro, por lo que $Ar \leq 0$ y $A(-r) \leq 0$, luego $Ar \leq 0$ y $Ar \geq 0$ y por ende se tiene que $Ar = 0$. En este caso asignar puntaje completo.

Pregunta 4 **[10 Puntos]**

Programe el problema 2 de la Interrogación 1 de este semestre (solamente el modelo base, no el de la pregunta 2c). Para esto debe escribir su código (en Latex puede usar la librería minted) o subir fotos de su código. Además, debe presentar los resultados obtenidos en las variables del problema y el valor objetivo obtenido comentado en el código.

Para esto tiene el siguiente código con una instancia del problema a su disposición que puede encontrar en Canvas:

[Hint: El valor de la función objetivo a llegar es 1.137804878049e+00]

```
from gurobipy import GRB, Model, quicksum
from random import randint, seed, uniform

seed(10)
m = Model()

# SETS
I = range(10)
J = range(8)

# PARAMS
t = {(i, j): uniform(6, 15) for i in I for j in J}
c = [randint(10, 20) for i in I]
b1 = randint(3, 7)
b2 = randint(3, 7)
p = randint(3, 7)
n = 3
alpha = 10
beta = 8



# Coloque aca sus variables


# Coloque aca sus restricciones


m.update()
m.setObjective() # Colocar la FO
m.optimize()

m.printAttr('X')
```

Solution:

```
from gurobipy import GRB, Model, quicksum
from random import randint, seed, uniform

seed(10)
m = Model()
```

```
# SETS
I = range(10)
J = range(8)

# PARAMS
t = {(i, j): uniform(6, 15) for i in I for j in J}
c = [randint(10, 20) for i in I]
b1 = randint(3, 7)
b2 = randint(3, 7)
p = randint(3, 7)
n = 3
alpha = 10
beta = 8

# Variables
y = m.addVars(J, vtype=GRB.BINARY, name='y')
x = m.addVars(I, J, vtype=GRB.BINARY, name='x')
v = m.addVars(I, vtype=GRB.BINARY, name='v')
w = m.addVars(I, vtype=GRB.BINARY, name='w')
z = m.addVars(range(2), vtype=GRB.CONTINUOUS, name='z')

# Restricciones:
# R1
m.addConstrs(quicksum(x[i, j] for j in J) == 1 for i in I)

# R2
m.addConstr(quicksum(y[j] for j in J) == n)

# R3
m.addConstrs(x[i,j] <= y[j] for i in I for j in J)

# R4
m.addConstrs(
    x[i,j] >= y[j] - quicksum(y[k] for k in J if t[i,k] < t[i,j])
    for i in I
    for j in J
)

# R5
m.addConstrs(v[i] <= quicksum(y[j] for j in J if t[i,j] <= alpha) for i in I)

# R6
m.addConstrs(w[i] <= quicksum(y[j] for j in J if t[i,j] <= beta) for i in I)

# R7
m.addConstr(quicksum(v[i] for i in I) / len(I) == 0.85 + z[0])

# R8
m.addConstr(quicksum(c[i] * w[i] for i in I) / sum(c) == 0.9 + z[1])

m.update()
```

```
m.setObjective(
    b1 * z[0] + b2 * z[1] -
    p * quicksum(quicksum((t[i,j] - alpha) * x[i,j] for j in J if t[i,j] > alpha) for i in I)
)
m.optimize()

m.printAttr('X')

# Funcion objetivo: 1.137804878049e+00
#     Variable            X
# -------------------------
#         y[3]            1
#         y[5]            1
#         y[6]            1
#       x[0,3]            1
#       x[1,5]            1
#       x[2,6]            1
#       x[3,3]            1
#       x[4,5]            1
#       x[5,3]            1
#       x[6,5]            1
#       x[7,5]            1
#       x[8,3]            1
#       x[9,6]            1
#         v[0]            1
#         v[1]            1
#         v[2]            1
#         v[3]            1
#         v[4]            1
#         v[5]            1
#         v[6]            1
#         v[7]            1
#         v[8]            1
#         v[9]            1
#         w[0]            1
#         w[1]            1
#         w[2]            1
#         w[3]            1
#         w[4]            1
#         w[5]            1
#         w[6]            1
#         w[8]            1
#         w[9]            1
#         z[0]         0.15
#         z[1]    0.0146341
```