ICS1113 OPTIMIZACION, 2011-1.
INTERROGACION 3.

Instrucciones: La prueba tiene 4 partes que totalizan 100 puntos. Responda en el cuadernillo que se le ha entregado de tal forma de que las partes queden en hojas separadas. Coloque su **nombre, sección y número de lista (no número de alumno)** en cada una de las hojas de los cuadernillos. **Si no se atiene a estas instrucciones se le descontarán 5 puntos del puntaje de la prueba, sin derecho alguno a reclamo posterior.** No usar calculadoras programables ni teléfonos celulares. Dispone de 120 minutos.

Parte 1 (25pts).

Ud. debe plantear un modelo matemático para la siguiente situación: Una empresa de procesamiento de leche se ha comprometido a recoger la leche de n granjas. La empresa tiene un camión con una capacidad para transportar *C* litros de leche. De las *n* granjas, *m* de ellas son pequeñas y necesitan de una recolección cada dos días. Las otras *n-m* granjas necesitan una recolección todos los días. La cantidad a recolectar en cada granja es K_i.

Encontrar la ruta óptima para el camión cada día considerando que la distancia entre la granja *i* y la granja *j* es $c_{ij,}$ teniendo en cuenta que tiene que: i) visitar todas las granjas de recolección diaria, ii) visitar algunas de las granjas de recolección de cada dos días; y iii) trabajar dentro de su capacidad. En días alternos se debe volver a visitar las granjas de recolección diaria, y también visitar las granjas de recolección de cada dos días que no ha visitado el día anterior.

SOLUCION:

Tenemos:

- n granjas
- m granjas chicas
- n-m granjas grandes
- K_i cantidad a recolectar en la granja i.
- $c_{i,j}$ distancia entre granja i y granja j. $c_{i,i}$ es cero.

Para resolver este problema, debemos considerar que el ciclo completo dura 2 días. Es decir, la solución debe entregar la respuesta del recorrido de 2 días, en los cuales se habrá visitado una vez cada granja pequeña y dos veces (una por día) las granjas grandes. Por lo tanto, los índices necesarios para resolver este problema son:

- $t = \begin{cases} 1 & \text{Día 1 del ciclo} \\ 2 & \text{Día 2 del ciclo} \end{cases}$
- $i = 0..n$
- $j = 0..n$

Recordamos que durante la prueba se dijo que el índice 0 corresponde a la empresa. Es decir $c_{0,j}$ es la distancia desde la empresa a la granja j, mientras que $c_{j,0}$ es la distancia desde la granja j a la empresa (que no es necesariamente la misma).

Además es importante comprender que los índices i y j son equivalentes, es decir, $c_{i,j}$ *con i=1 y j=2* o bien $c_{j,i}$ *con j=1 e i=2* corresponden a la distancia desde la granja 1 a la granja 2 (En esa dirección y no al revés).

Sin pérdida de generalidad, podemos decir que las primeras m granjas son pequeñas, y las granjas m+1 hasta n son grandes.

La variable de decisión será: **(4 puntos si plantea las variables suficientes para resolver el problema: uso de una ruta, día, etc).**

$$X_{j,i,t} = \begin{cases} 1 & Si\ se\ viaja\ de\ la\ granja\ i\ a\ la\ granja\ j\ en\ el\ día\ t \\ 0 & Si\ no\ se\ viaja\ de\ la\ granja\ i\ a\ la\ granja\ j\ en\ el\ día\ t \end{cases}$$

Comentario:

Con esta variable de decisión (y las restricciones que se detallen más adelante), la expresión

$$\sum_{j \neq i}^{n} X_{j,i,t}$$

Será 1 si visité la granja i el día t, y 0 si no la visité.

De la misma forma, la expresión

$$\sum_{j \neq i}^{n} X_{i,j,t}$$

Será 1 si salí de la granja i en el día t y 0 si es que no. Ojo que los índices i y j se permutaron en vez de hacer la sumatoria sobre i con los índices como estaban. Esto se hace para poder referirse siempre a la granja i, ya que el parámetro j se usa solo dentro de la sumatoria.

Es evidente que ambas expresiones deben ser iguales, ya que no puedo llegar a una granja sin después salir de ella, ni salir de la granja sin haber llegado primero. Esta es una restricción fundamental para el problema (equilibrio de nodos).

Restricciones (4 puntos cada una)

Las granjas chicas se deben visitar una vez en los dos días:

$$\sum_{t=1}^{2} \sum_{j \neq i}^{n} X_{j,i,t} = 1 \quad \forall\, i = 1..m$$

Se podría hacer que un día se visiten la mitad de las granjas chicas y otro día la otra mitad, pero la solución será menos óptima, ya que se está haciendo el problema más restringido.

Las granjas grandes se deben visitar todos los días:

$$\sum_{j\neq i}^{n} X_{j,i,t} = 1 \qquad \forall\, i = m+1..n\,;\, t = 1,2$$

Equilibrio de nodos: si viajo a una granja luego tengo que salir de ella. Esto también se aplica para el nodo 0 (empresa) ya que parto y termino allá, por lo que siempre será 1 (siempre uso algún camino que parte de la empresa y algún camino que llega a la empresa).

$$\sum_{j\neq i}^{n} X_{i,j,t} = \sum_{j\neq i}^{n} X_{j,i,t} \qquad \forall\, i = 1..n\,;\, t = 1,2$$

Capacidad:

$$\sum_{i\neq j}^{n} K_i * \sum_{j\neq i}^{n} X_{j,i,t} \leq C \qquad \forall\, t = 1,2$$

Tomamos como supuesto que existe algún circuito en el que el camión puede recoger la leche de cada día sin tener que pasar por la empresa a dejar la leche para seguir recolectando. Es decir, el camión parte desde la empresa y solo vuelve a ella al terminar de recolectar la leche del día.

Función objetivo **(5 puntos)**

$$Min: \sum_{t=1}^{2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j\neq i}^{n} X_{i,j,t} * c_{i,j}$$

Parte 2 (25pts).

a) (15 pts) Dado el siguiente problema de programación entera:

$$PE) \quad Min \quad -3x-5y$$
$$s.a. \quad 7x+4y \leq 14$$
$$x, y \geq 0, enteros$$

SOLUCION:

Como puede ver, la solución (*x*,*y*)=(0,1) es factible para el problema. Debe indicar, si usa dicha solución, cuál es el error máximo respecto al valor óptimo de PE). Debe responder esta pregunta sin iterar y sin encontrar la solución óptima del problema entero.

Para obtener el error máximo respecto al valor óptimo calculamos la solución del problema relajado. Podemos hacer esto ya que el valor del óptimo del PE es inferior o igual al valor del óptimo del problema relajado.No es necesario iterar. Basta calcular las razones de x e y en el problema y obtenemos el optimo. $\frac{5}{4} \geq \frac{3}{7}$. Luego $x = 0\ e\ y = \frac{14}{4} = 3{,}5$

Obtenemos que el valor óptimo es -17,5. Por otro lado la solución factible entrega como valor optimo -5. Calculamos el error:

$$\frac{-17{,}5-(-5)}{-17{,}5} * \% = 71\%$$

Concluimos que si se usa dicha solución el error máximo respecto al valor óptimo del PE es 71%.

b) (10 pts) Dado el siguiente problema de Programación Lineal Entera:

$$\begin{aligned} P) \quad Max \quad & z = 7x_1 + 10x_2 \\ s.a. \quad & -x_1 + 3x_2 \le 6 \\ & 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ & x_1, x_2 \ge 0, \text{ enteros} \end{aligned}$$

Genere un corte de Gomory (debe resolver el problema previamente mediante Simplex) y muestre que efectivamente dicho corte excluye la solución óptima del problema relajado.

SOLUCION:

Si resolvemos con Simplex, el tableau final nos queda:

x_1	x_2	y_1	y_2	
0	1	$\frac{7}{26}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{77}{26}$
1	0	$\frac{-5}{26}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{75}{26}$
0	0	$\frac{35}{26}$	$\frac{31}{26}$	$\frac{1295}{26}$

Ahora, para el corte de Gomory tenemos:

$$x_2 + \frac{7}{26}h_1 + \frac{1}{26}h_2 = \frac{77}{26}$$

$$x_2 + (\frac{7}{26}h_1 + \frac{1}{26}h_2) = \frac{77}{26}$$

$$(\frac{7}{26}h_1 + \frac{1}{26}h_2) = \frac{25}{26}$$

Pero de las restricciones:

$$h_1 = 6 + x_1 - 3x_2$$

$$h_2 = 35 - 7x_1 - 5x_2$$

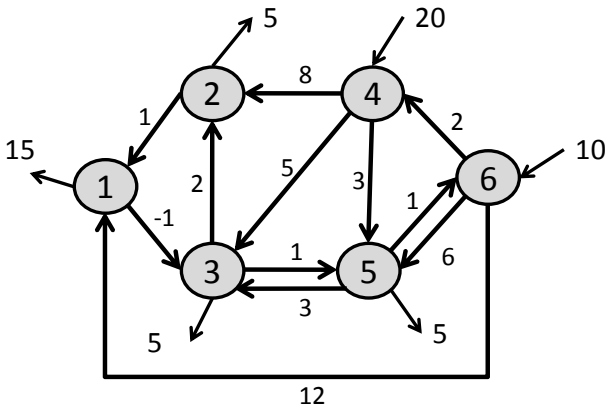
Reemplazando nos queda:

$$2 \ge x_2$$

Luego si miramos la solución original teníamos $x_2 = 2{,}96$. Se excluyo la solución óptima del problema relajado.

Parte 3 **(30pts).**

Considere el siguiente Problema de Flujo a Mínimo Costo (PFMC) del grafo a continuación. Se indica en él, los costos por unidad de flujo en los arcos respectivos y la oferta (flecha entrante al nodo) o demanda (flecha saliente) según corresponda (específicamente, por ejemplo, el nodo 1 tiene una demanda de 15):

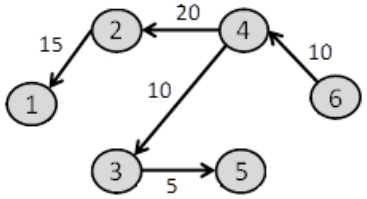


Suponga, como base factible del problema, al árbol dado por los arcos: (2,1), (3,5), (4,2), (4,3) y (6,4).

a) **(3pts)** Encuentre (como usted prefiera) los valores de los flujos en el árbol básico dado.

SOLUCION:

Un árbol básico es:



b) **(15pts)** Mediante el algoritmo de SIMPLEX de redes, itere desde la base dada y resuelva el PFMC (Debe demostrar optimalidad). Especifique el costó óptimo de la red y los flujos del árbol óptimo.

SOLUCION:

ITERACIÓN 1: Trabajamos primero anulando los costos reducidos de las variables básicas

$$\pi_2 - \pi_1 = 1$$
$$\pi_4 - \pi_2 = 8$$
$$\pi_4 - \pi_3 = 5$$
$$\pi_3 - \pi_5 = 1$$
$$\pi_6 - \pi_4 = 2$$

Fijando $\pi_1 = 0$, se obtiene:

$$\pi_2 = 1$$
$$\pi_3 = 4$$
$$\pi_4 = 9$$
$$\pi_5 = 3$$
$$\pi_6 = 11$$

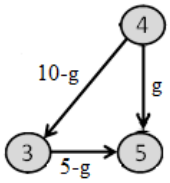
NOTA DE CORRECCIÓN: No importa qué variable dual se defina en cero.

Ahora hay que buscar los costos reducidos de las variables no básicas que son negativos:

$$r_{32} = c_{32} - \pi_3 + \pi_2 = 2 - 4 + 1 = -1$$
$$r_{45} = c_{45} - \pi_4 + \pi_5 = 3 - 9 + 3 = -3$$
$$r_{65} = c_{65} - \pi_6 + \pi_5 = 6 - 11 + 3 = -2$$

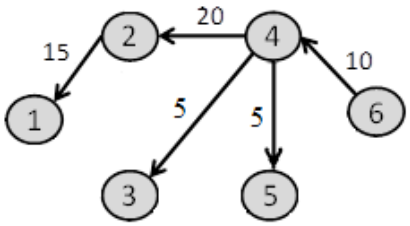
NOTA DE CORRECCIÓN: No es necesario sacarlos todos. Basta con encontrar uno negativo.

Elegimos como arco entrante a cualquiera, por ejemplo, el arco (4,5):



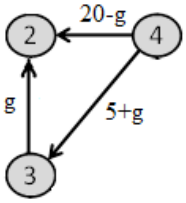
Sale de la base el arco (3,5).

ITERACIÓN 2: Ahora tenemos que:

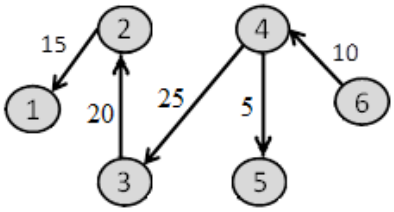


$$\pi_1 = 0$$
$$\pi_2 = 1$$
$$\pi_3 = 4$$
$$\pi_4 = 9$$
$$\pi_5 = 6$$
$$\pi_6 = 11$$
$$r_{32} = c_{32} - \pi_3 + \pi_2 = 2 - 4 + 1 = -1$$

Entra (3,2) y sale (4,2)



ITERACIÓN 3: El nuevo árbol es:



$$\pi_1 = 0$$
$$\pi_2 = 1$$
$$\pi_3 = 3$$
$$\pi_4 = 8$$
$$\pi_5 = 5$$
$$\pi_6 = 10$$
$$r_{61} = c_{61} - \pi_6 + \pi_1 = 12 - 10 + 0 = 2$$
$$r_{13} = c_{13} - \pi_1 + \pi_3 = -1 - 0 + 3 = 2$$
$$r_{42} = c_{42} - \pi_4 + \pi_2 = 8 - 8 + 1 = 1$$
$$r_{53} = c_{53} - \pi_5 + \pi_3 = 3 - 5 + 3 = 1$$
$$r_{35} = c_{35} - \pi_3 + \pi_5 = 1 - 3 + 5 = 3$$
$$r_{65} = c_{65} - \pi_6 + \pi_5 = 6 - 10 + 5 = 1$$
$$r_{56} = c_{56} - \pi_5 + \pi_6 = 1 - 5 + 10 = 6$$

NOTA DE CORRECCIÓN: Acá si es necesario sacar todos los costos reducidos. ¡Hay que demostrar que es óptimo!

Por lo que llegamos a la solución óptima. El valor óptimo será:

$$1 * 5 + 2 * 20 + 5 * 25 + 3 * 5 + 2 * 10 = 205$$

c) (6pts) ¿Cuánto puede bajar el costo del arco (6,1), actualmente en 12, sin que la solución óptima cambie?

SOLUCION:

Este costo está asociado a una variable básica, para que la solución óptima no cambie:

$$r_{61} = c_{61} - \pi_6 + \pi_1 \geq 0$$
$$\rightarrow c_{61} \geq \pi_6 - \pi_1$$
$$\rightarrow c_{61} \geq 10 - 0 = 10$$

Para que la solución óptima no cambie, el costo del arco no puede descender más de 2 unidades.

d) (6pts) ¿En qué rangos puede estar el costo del arco (4,5), sin que cambie la solución óptima?

SOLUCION:

Este costo está asociado a una variable básica. Hay que revisar qué variables duales se ven afectadas:

$$\pi_4 - \pi_3 = 5$$
$$\pi_4 - \pi_5 = c_{45}$$
$$\pi_6 - \pi_4 = 2$$
$$\pi_2 - \pi_1 = 1$$
$$\pi_3 - \pi_2 = 2$$

Si se toma $\pi_1 = 0$, entonces

$$\pi_2 = 1$$
$$\pi_3 = 3$$
$$\pi_4 = 8$$
$$\pi_5 = 8 - c_{45}$$
$$\pi_6 = 10$$

Reemplazando en costos reducidos de las variables no básicas que se ven afectados:

$$r_{53} = c_{53} - \pi_5 + \pi_3 = 3 - (8 - c_{45}) + 3 = c_{45} - 2 \geq 0$$
$$r_{35} = c_{35} - \pi_3 + \pi_5 = 1 - 3 + 8 - c_{45} = 6 - c_{45} \geq 0$$
$$r_{65} = c_{65} - \pi_6 + \pi_5 = 6 - 10 + 8 - c_{45} = 4 - c_{45} \geq 0$$
$$r_{56} = c_{56} - \pi_5 + \pi_6 = 1 - (8 - c_{45}) + 10 = 3 + c_{45} \geq 0$$

$$c_{45} \geq 2$$
$$6 \geq c_{45}$$
$$4 \geq c_{45}$$
$$c_{45} \geq -3$$

Por lo tanto, se concluye que:

$$2 \leq c_{45} \leq 4$$

Parte 4 (20pts).

a) (10pts) Considere el siguiente problema de programación no lineal entera:

$$Max: \prod_{i=1}^{n} x_i$$

$$s.a. \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \leq K \quad \text{, con } v_i, K \text{ valores positivos y finitos.}$$

$$x_i \in \mathbb{Z}^+$$

Explique cómo resolvería este problema mediante programación dinámica. Describa el algoritmo de resolución, cómo separaría la estructura del problema e indique los problemas de la etapa inicial, la etapa final y una etapa genérica intermedia en función de los recursos.

SOLUCION:

Como cualquier problema de programación dinámica, es necesario llevar el problema a una estructura recursiva de "n" etapas. En donde la etapa $i = 1,..,n$ dependerá de la etapa $i+1$.

Definiremos a $G_i(b_i)$ como el máximo valor en la función objetivo obtenible desde la etapa "i" en adelante hasta la n. **(3ptos por estas explicaciones)**

Resolveremos primero de atrás para adelante:

En la última etapa suponemos que ya tenemos los valores óptimos de $x_1, \dots, x_{n-1}$ y que nos quedan b_n recursos disponibles para la variable x_n. Entonces el problema es:

$$G_n(b_n) = \text{Max: } x_n \; s.a. \; 0 \leq x_n \leq \left\lfloor \frac{b_n}{v_n} \right\rfloor \in Enteros$$

es el valor máximo si tengo recursos disponibles.Para etapas intermedias suponemos que ya tenemos los valores óptimos de $x_1, \dots, x_{i-1}$ y nos quedan y_i recursos disponibles. Entonces el problema queda:

$$G_i(b_i) = \text{Max: } x_n G_{i+1}(y_i - x_i v_i) \; s.a. \; 0 \leq x_i \leq \left\lfloor \frac{b_i}{v_i} \right\rfloor \in Enteros$$

En la primera etapa disponemos de $b_1 = K$ recursos, por lo que el problema es:

$$G_1(K) = \text{Max: } x_1 G_2(K - x_1 v_1) \; s.a. \; 0 \leq x_1 \leq \left\lfloor \frac{b_1}{v_1} \right\rfloor \in Enteros$$

(5ptos por estas explicaciones)

Luego para encontrar los valores de las variables resolveríamos el problema de adelante para atrás. **(2ptos por estas explicaciones)**

b) **(5pts)** Explique qué dos condiciones fundamentales (una en la etapa final y otra en la inicial) garantizan la solución de los problemas en programación dinámica.

SOLUCION:

Las condiciones fundamentales son las condiciones de borde. Para la etapa inicial es necesario que los recursos b_1 sean conocidos. Para la etapa final es necesario que la función objetivo en la etapa n esté determinada.

c) **(5pts)** Considere ahora un Problema de Flujo a Costo Mínimo sobre un grafo dirigido. ¿Qué condición deben cumplir los coeficientes de costos, c_{ij} , para que el problema pueda ser no acotado?

SOLUCION:

Se debe dar que exista un circuito dirigido de arcos en donde el costo total de pasar por él sea negativo. De esta manera, podría pasar infinito fluyo por él y se minimizarían infinitamente los costos.