PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2015
Profesores: P.Álvarez - A.Cataldo
M.Fuentes - D.Pozo - J.Vera

Examen

Duración: 2 horas y 30 minutos.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos. Está prohibido el uso de calculadoras y de celulares de cualquier tipo. Se le recuerda que los reglamentos de integridad académica de la Escuela de Ingeniería y de la Universidad establecen sanciones para personas que comentan actos deshonestos, particularmente realizar fraude en las pruebas por medio de copia o colaboración impropia.***

Pregunta 1 (16 puntos)

(a) (**4 puntos**) Considere el problema de Programación Lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ s.a. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Escriba las condiciones KKT para este problema y muestre que efectivamente se corresponden con las condiciones de optimalidad del algoritmo Simplex. ¿Cómo se puede ver la identificación de variables básicas y no básicas a partir de KKT?

Respuesta: Consideremos el problema lineal en forma estándar:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ s.a. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \iff \begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ s.a. & Ax = b \\ & -x \leq 0 \end{array}$$

El Lagrangeano es:

$$L(x, \pi, \mu) = c^T x + \pi^T (b - Ax) - \mu^T x$$

las condiciones KKT dicen que x es óptimo si y sólo si existen multiplicadores de lagrange $\pi \in R^m, \mu \in R^n, \mu \geq 0$ tales que:

$$\bar{c} = c - A^T \pi - \mu = 0, \mu_j x_j = 0, j = 1, \ldots, n,$$

lo que implica que:

$$\begin{array}{lll} c_j - \pi^T A_j & \geq & 0, j = 1, \ldots, n \\ c_j - \pi^T A_j & = & 0, j : x_j > 0. \end{array}$$

que son precisamente las condiciones de optimalidad del Simplex. Las variables x que tengan valor > 0 serán básicas y eso será consistente, via holguras complementarias, con una holgura dual nula, es decir, un costo reducido nulo.

(b) (**8 puntos**) Justifique si acaso las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(i) (**2 puntos)** El Hessiano de una función lineal es definido positivo y definido negativo al mismo tiempo.

Repuesta: No, es semi-definido positivo y semi-definido negativo, dado que el Hessiano es la matriz nula.

(ii) (**2 puntos)** Se tiene un problema de optimización en una variable de la forma $\min_{x \in D} f(x)$, donde f es continua y D es no vacío y cerrado. Además se tiene que $f(x) \to \infty$ si $x \to \infty$ y $f(x) \to -\infty$ si $x \to -\infty$. Entonces, se puede asegurar que el problema no alcanza su mínimo en su dominio.

Respuesta: No necesariamente, depende del conjunto D. Si $D = [a, \infty)$, por ejemplo, entonces aunque $f(x) \to -\infty$ si $x \to -\infty$, igual el mínimo podría estar, por ejemplo, en el punto a.

(iii) (**2 puntos)** En una iteración del algoritmo Simplex, en el test de la razón mínima, donde la variable j va a entrar a la base, si se tiene que $\bar{R}_{ij} \leq 0$ (los coeficientes de la columna j), entonces nos encontramos frente a un problema con soluciones múltiples.

Respuesta: No, los coeficientes de la columna son, en el mejor de los casos, indicadores de no acotamiento. La existencia de múltiples soluciones tiene que ver con que $\bar{c}_j = 0$.

(iv) (**2 puntos)** Del Teorema de Holguras complementarias sabemos que si una restricción del problema primal es activa su variable dual es nula.

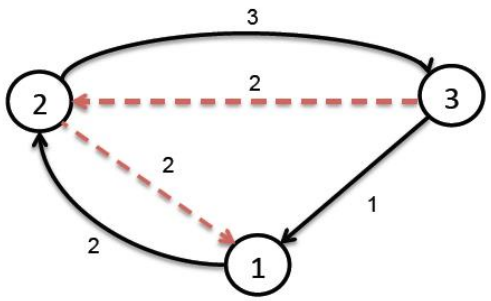
Respuesta: No, más bien es que si es inactiva, entonces la variable dual es nula.

(c) (**4 puntos**) Responda las siguientes preguntas:

(i) (**2 puntos**) El análisis de sensibilidad no se puede aplicar a problemas lineales enteros tal y como se aplica a problemas de programación lineal con variables continuas. Dé un ejemplo gráfico de un problema de optimización en dos variables que justifique esta afirmación para el caso en que cambia el lado derecho de una de las restricciones.

Respuesta: Acá hay basta con hacer un gráfico en donde el óptimo entero no toque las restricciones lineales, de ese modo hay algún rango en donde nos podemos mover y no pasa nada, después se produce un cambio discreto en la solución y sigue por otro rango manteniéndose valor constante.

(ii) (**2 puntos**) El siguiente grafo representa las capacidades residuales de una iteración del algoritmo de Ford-Fulkerson para calcular el flujo máximo que se puede enviar desde el nodo 1 hasta el nodo 3. Las flechas punteadas representan la solución de dicha iteración. Escriba el problema original de Programación Lineal asociado a este grafo en forma estándar indicando explícitamente a que corresponde cada una de las variables.



Respuesta: Definimos las variables x_1 para el flujo que va del nodo 1 al 2, x_2 para el flujo que va del nodo 2 al 3, x_3 para el flujo que va del nodo 3 al 1 e y para el flujo máximo. El problema de flujo máximo con los datos del problema queda de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{lllll}
\text{máx} & y & & & \\
\text{s.a.:} & x_1 & & -x_3 & = y \\
& -x_1 & +x_2 & & = 0 \\
& & -x_2 & +x_3 & = -y \\
& x_1 & & & \leq 4 \\
& & x_2 & & \leq 5 \\
& & & x_3 & \leq 1 \\
& x_1, & x_2, & x_3, y & \geq 0
\end{array}
$$

El problema en forma estándar:

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{mín} & & & & -y & & & \\
\text{s.a.:} & x_1 & & -x_3 & -y & & & = 0 \\
& -x_1 & +x_2 & & & & & = 0 \\
& & -x_2 & +x_3 & +y & & & = 0 \\
& x_1 & & & & +z_1 & & = 4 \\
& & x_2 & & & & +z_2 & = 5 \\
& & & x_3 & & & & +z_3 = 1 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & y, & z_1, & z_2, & z_3 \geq 0
\end{array}
$$

Los valores que toman las variables son: $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 0, y = 2, z_1 = 2, z_2 = 3, z_3 = 1$. Las variables de holgura corresponden con las capacidades residuales de las líneas.

Pregunta 2 (14 puntos)

(a) (**10 puntos**) Considere el siguiente problema de optimización no lineal:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & (x-5)^2 + (y-5)^2 \\
\text{s.a:} & x^2 - y \leq 6 \\
& x + 3y \leq 12 \\
& x, y \geq 0
\end{array}
$$

(i) (**1 punto**) Resuelva el problema gráficamente. Indique claramente la solución óptima y el valor óptimo.

Respuesta: La solución gráfica del problema debe entregar como solución el punto $x = y = 3$, con $z = 8$.

(ii) (**3 puntos**) Compruebe gráficamente que la solución encontrada en (i) cumple las condiciones de KKT.

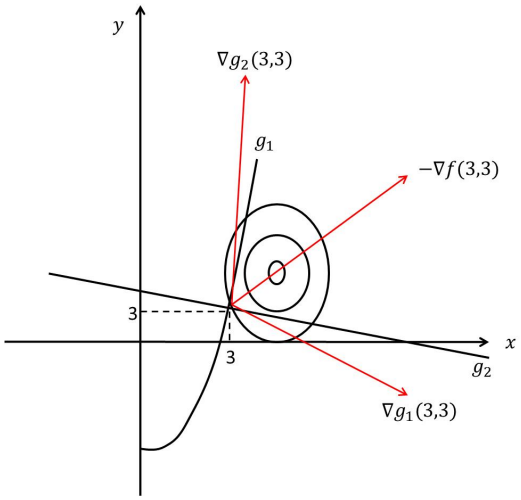
Respuesta: En la siguiente figura se puede apreciar que el gradiente de la función objetivo (negativo, puesto que es minimización) está contenido (combinación lineal convexa) por el gradiente de las restricciones activas en el punto $x = y = 3$.

(iii) (**2 puntos**) Compruebe analíticamente que la solución encontrada en (i) cumple las condiciones de KKT.

Respuesta: Se debe cumplir que:

$$
\begin{pmatrix} 2(x-5) \\ 2(y-5) \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

luego, en el punto $x = 3$ y $y = 3$ se tiene que $\lambda_1 = \frac{8}{19}$ y $\lambda_2 = \frac{28}{19}$. Luego, como existen $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, el punto evaluado cumple con las condiciones de KKT.



(iv) (**2 puntos**) Demuestre que la solución corresponde a un óptimo global (sin apoyarse del análisis gráfico).

Respuesta: Se puede apreciar que tanto la función objetivo como las restricciones son convexas (todas son polinomios), por lo tanto el problema es convexo, entonces, todo mínimo local es mínimo global.

(v) (**2 puntos**) Si la función objetivo cambia a Min $(x-2{,}8)^2+(y-2{,}8)^2$ ¿qué valor tomarán los multiplicadores de Lagrange en este problema modificado? Explique claramente por qué.

Respuesta: Al cambiar la función objetivo, la solución óptima cambia siendo el nuevo punto óptimo $x=2,8$ y $y=2,8$. En este caso, los multiplicadores de Lagrange valen directamente 0 ya que la solución está dentro de la región factible, por lo que no hay restricciones activas.

(b) (**4 puntos**) Dado el siguiente problema de optimización no lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & -2x^2-y^2+xy+8x+3y \\ \text{s.a:} & 3x+y=10 \end{array}$$

(i) (**2 puntos**) Una solución que cumple con las condiciones necesarias de primer orden es $(x,y,\lambda)=\left(\frac{69}{28},\frac{73}{28},\frac{1}{4}\right)$, donde λ es el multiplicador de Lagrange. Indique si acaso esta solución es solución óptima del problema y por qué.

Respuesta: Veamos formas válidas de responder:

Opción 1: Se puede apreciar que tanto la función objetivo como la restricción son convexas (todas son polinomios), por lo tanto el problema es convexo, entonces, todo mínimo local (si cumple la condición necesaria) es mínimo global.

Opción 2: El lagrangeano del problema visto como minimización queda:

$$L=2x^2+y^2-xy-8x-3y-\lambda(3x+y-10)$$

con lo que:

$$\nabla L=\begin{pmatrix} 4x-y-8-3\lambda \\ 2y-x-3-\lambda \\ -3y-y+10 \end{pmatrix}$$

$$H_f=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

que es una matriz definida positiva, por lo tanto el problema es convexo. Como el punto es mínimo global (o máximo global para el problema original).

(ii) (**2 puntos**) ¿Qué interpretación puede dar a $\lambda = \frac{1}{4}$?

Respuesta: Este valor significa que si el lado de la derecha de la restricción varía en una unidad, el valor de la función objetivo varía aproximadamente en $\frac{1}{4}$ (aproximadamente ya que es un problema no lineal).

Pregunta 3 (14 puntos)

Vamos a considerar en este problema un grafo *no dirigido* $G = (N, A)$ sin nodos aislados. En un grafo no dirigido, los arcos no tienen orientación (no son flechas, sino "líneas"). Sea $n = |N|$ y $m = |A|$, donde $|\cdot|$ denota el número de elementos (cardinalidad) de un conjunto. Se define el problema de *Minimum Edge Cover*, que consiste en encontrar un conjunto de arcos $C \subseteq A$ lo más pequeño posible (en término de la cantidad de arcos seleccionados) pero tales que cada nodo $i \in N$ sea incidente (esté conectado) a por lo menos un arco de C.

Se propone el siguiente modelo de optimización para el problema, el que usa una variable $x_e = 1$ si el arco $e \in A$ está incluido en el Edge Cover, $x_e = 0$, en caso contrario:

$$
\begin{aligned}
& & z^* = \text{mín} \quad & \sum_{e \in A} x_e \\
& EC) & s.a. \quad & \sum_{e \in \delta(i)} x_e \geq 1, \forall i \in N \\
& & & x_e \in \{0,1\}, \forall e \in A
\end{aligned}
$$

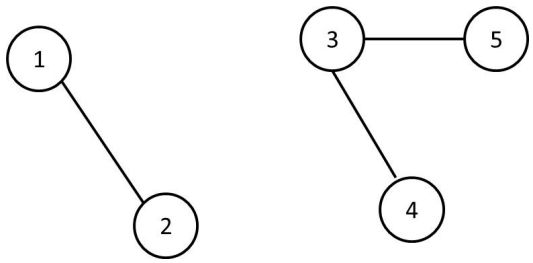
donde, para cada nodo $i \in N$, $\delta(i)$ denota los arcos que conectan (inciden) al nodo i.

(a) (**1 puntos**) Explique en palabras por qué ese modelo efectivamente corresponde al problema descrito. (Apóyese en un dibujo, si quiere, pero sea muy claro en la explicación).

Respuesta: Dada la definición de la variable x_e, la función objetivo selecciona la menor cantidad de variables x_e que tomen valor 1, y por lo tanto que pertenezcan al Edge Cover. La primera condición asegura para todo nodo que al menos uno de los arcos que inciden en ese nodo se selecciona, por lo tanto lo conecta con los demás nodos de la red. Finalmente se define la naturaleza binaria de las variables.

(b) (**2 puntos**) Usando un ejemplo muestre que la solución óptima de este problema no tiene necesariamente que corresponder a un árbol en el grafo G (se entiende aquí que el concepto de árbol es el mismo que en el caso de grafos dirigidos).

Respuesta: Basta con mirar la siguiente figura, que muestra una solución de este problema cuando el grafo original contiene todas las aristas posibles (para todo par $i, j \in N$ existe una arista):



del que se aprecia que no es conexo, por lo tanto no es un árbol.

(c) (**3 puntos**) Escriba la relajación lineal del modelo EC) y muestre que la restricción $x_e \leq 1$, para todo $e \in A$, de la relajación lineal, puede ser removida sin afectar el valor óptimo de esta relajación.

Respuesta: La relajación lineal de EC) es:

$$RL-EC) \quad \begin{array}{rll} z^*_{RL} = \text{mín} & \sum\limits_{e\in A} x_e & \\ s.a. & \sum\limits_{e\in\delta(i)} x_e \geq 1, \forall i \in N & \\ & x_e \geq 0, \forall e \in A & \\ & x_e \leq 1, \forall e \in A & \end{array}$$

Resulta claro que la restricción $x_e \leq 1$ es redundante. Esto pues como se busca en la función objetivo seleccionar nodos, seleccionar el mismo nodo 2 o más veces no aporta en el cumplimiento de la restricción (es el mismo arco que ya se habría usado para conectar dos nodos), pero si aumenta la cantidad de arcos seleccionados. Luego, la solución óptima considerará a lo más una vez cada arco, esto incluso si no se exige esto.

(d) (**2 puntos**) Escriba el dual del problema resultante relajado al quitar esta restricción.

Respuesta: Si se define la variable dual y_i para cada $i \in N$ en $\sum\limits_{e\in\delta(i)} x_e \geq 1$ el dual queda:

$$DEC) \quad \begin{array}{rll} w^* = \text{máx} & \sum\limits_{i\in N} y_i & \\ s.a. & y_i + y_j \leq 1, \forall e : (i,j) \in A & \\ & y_i \geq 0, \forall i \in N & \end{array}$$

(e) (**4 puntos**) Demuestre que tanto el problema original EC) como el dual escrito en (d) son siempre factibles. Utilizando además resultados de dualidad, demuestre que z^* se encuentra entre los valores $\frac{n}{2}$ y m.

Respuesta: Dado que el grafo G es conexo, la solución en la que se seleccionan todos lo arcos, y entonces m, es factible para el problema original.

Para el problema dual de la relajación lineal se tiene que la restricción $y_i + y_j \leq 1$ se cumple haciendo que todo $y_i = \frac{1}{2}$, y entonces el valor de la función objetivo del dual de la relajación lineal es $\frac{n}{2}$.

El teorema débil de dualidad garantiza que $z^* \geq \frac{n}{2}$, y como la solución óptima del problema original debe satisfacer que $z^* \leq z^*_{RL}$.

(f) (**2 puntos**) Se llama *Matching Perfecto* a un conjunto $C \subseteq A$ de arcos tal que cada nodo es incidente a exactamente un arco de C. Suponga que se sabe que G contiene un Matching Perfecto. Encuentre soluciones óptimas tanto para el problema primal y dual (apóyese nuevamente con un dibujo, si quiere, pero sea claro en su explicación).

Respuesta: Si existe el Matching Perfecto C, entonces la solución asociada se define:

$$x^C_e = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in C. \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

Esta solución es factible para EC) y tiene valor de la función objetivo de $\frac{n}{2}$. De la parte (e) se sabe que una solución factible del dual tiene vale $\frac{n}{2}$. Luego, por dualidad fuerte que x^C_e definido como antes e $y_i = \frac{1}{2}$ son soluciones óptimas de sus respectivos problemas.

Pregunta 4 (16 puntos)

(a) (**5 puntos**) Una empresa fabrica n productos para lo que consume m recursos. Enfrenta una demanda para cada producto sobre un horizonte de T meses, y quiere planificar cuánto producir de cada uno de los productos a lo largo de ese horizonte. Considera, para esto, los siguientes datos:

d_{jt} : demanda por producto j en el mes t, $j = 1, ..., n, t = 1, ..., T$.

b_{it} : disponibilidad del recurso i en el mes t, $i = 1, ..., m, t = 1, ..., T$.

c_{jt} : costo unitario de producción de j en el mes t, $j = 1, ..., n, t = 1, ..., T$.

a_{ij} : cantidad de recurso i usado en producir una unidad de producto j, $i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$.

h_{jt} : costo de dejar una unidad de producto j en "inventario" al final del periodo t, $j = 1, ..., n, t = 1, \ldots, T$.

Sea x_{jt} la cantidad a producir del producto j en t y sea I_{jt} la cantidad de producto j que queda guardada en "inventario" al final del mes t. El siguiente modelo es una forma de determinar la política óptima de producción:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{n}\{c_{jt}x_{jt} + h_{jt}I_{jt}\} \\ s.t. & I_{jt} = I_{jt-1} + x_{jt} - d_{jt}, t = 1, \ldots, T; j = 1, \ldots, n \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{jt} \leq b_{it}, i = 1, \ldots, m; t = 1, \ldots, T \\ & x_{jt} \geq 0, I_{jt} \geq 0, t = 1, \ldots, T; j = 1, \ldots, n \end{array}$$

(donde T_{j0} es el inventario inicial para el producto j). Se hace ahora una extensión del modelo para tomar en cuenta nuevas características del problema. El modelo extendido es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{n}\{c_{jt}x_{jt} + h_{jt}I_{jt}\} + \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{m}\{G_{it}z_{it} + e_{it}y_{it}\} \\ s.t. & I_{jt} = I_{jt-1} + x_{jt} - d_{jt}, t = 1, \ldots, T; j = 1, \ldots, n \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{jt} \leq b_{it} + y_{it}, i = 1, \ldots, m; t = 1, \ldots, T \\ & y_{it} \leq U_{it}z_{it}, i = 1, \ldots, m; t = 1, \ldots, T \\ & x_{jt} \geq 0, I_{jt}, y_{it} \geq 0; z_{it} \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, m; t = 1, \ldots, T; j = 1, \ldots, n \end{array}$$

Explique qué representan las nuevas características y los nuevos elementos incorporados al modelo, específicamente las variables y_{it}, z_{it} y los parámetros G_{it}, e_{it}, U_{it} y las nuevas restricciones.

Respuesta: El modelo se ha extendido de modo que considere el uso de recursos adicionales (sobretiempo, por ejemplo), pero a un costo adicional, con el agregado que hay un costo fijo por usar recursos adicionales. Las variables y_{it} representan la cantidad adicional, la variables z_{it} indica si se agrega o no recurso adicional, y esa es activada por las restricciones $y_{it} \leq U_{it}z_{it}, i = 1, \ldots, m; t = 1, \ldots, T$, que además ponen una cota al recurso adicional. G representa el costo fijo y e representa el costo unitario de recurso adicional.

(b) (**11 puntos**) Un hospital enfrenta un serio problema para asignar correctamente las horas de atención de pacientes que requieren tratamientos de diálisis. Existen n pacientes que deben ser atendidos usando m máquinas de diálisis ($n > m$). La atención del paciente j requiere p_j horas (hay diferencias debido a la condición de cada paciente), independiente de la máquina que use. La unidad de diálisis funciona durante T horas en un día particular e interesa aprovecharla al máximo ya que si algún paciente no puede ser atendido en el día en el hospital, debe subcontratarse el servicio en una entidad privada.

(i) (**8 puntos**) Formule un modelo de optimización que permita asignar la mayor cantidad posible de pacientes a las máquinas de diálisis, dentro de las T horas de funcionamiento del centro de diálisis.

Respuesta: Definamos una variable binaria $x_{ij} = 1$ si el paciente j es asignado a la máquina i, 0 en caso contrario. El modelo es:

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \\
s.a. \quad & \sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij} \leq T, i = 1, \ldots, m && (1) \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1, j = 1, \ldots, n && (2) \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

La función objetivo calcula el número total de pacientes asignados. Las restricciones (1) calculan el tiempo total empleado por los pacientes asignados a las máquinas, y este deber estar dentro del tiempo disponible. Las restricciones (2) indican que un paciente debe ser asignado a lo más a una máquina. Notar que no pedimos que todos sean asignados, de hecho ese es el punto: los que no sean asignados serán enviados a otra unidad pero el modelo tratará de maximizar el número de asignaciones que cumplan con el tiempo.

(ii) (**3 puntos**) Suponga que ahora se le indica que existe un cierto grupo de pacientes, identificados en un conjunto $J \subset \{1, \ldots, n\}$ tales que todos ellos deben ser atendidos dentro del día en el hospital. ¿Qué modificación tendría que hacer al modelo de (i) para considerar esta situación?

Respuesta: Esto requiere una modificación para exigir asignación de ciertos pacientes. EL modelo es:

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \\
s.a. \quad & \sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij} \leq T, i = 1, \ldots, m && (1) \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1, j = 1, \ldots, n && (2) \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, j \in J && (3) \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Ahora las restricciones (3) obligan a la asignación de los pacientes del conjunto J. La restricción (2) puede quedar tal cual o ser especificada para que se cumpla para $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus J$, es equivalente.